И В МЕЩЕРСКИЙ

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Под редакцией
Н В БУТЕНИНА А И ЛУРЬЕ Д Р МЕРКИНА

ИЗДАНИЕ ТРИДЦАТЬ ШЕСТОЕ
ИСПРАВЛЕННОЕ

*Допущено Министерством
высшего и среднего специального образования СССР
в качестве учебного пособия для студентов
высших технических учебных заведений*

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1986

ББК 22.25
М 56
УДК 531

Мещерский И. В. Сборник задач по теоретической механике: Учеб. пособие. — 36-е изд., исправл. / Под ред. Н. В. Бутенина, А. И. Лурье, Д. Р. Меркина. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. — 448 с.

Содержит задачи по всем разделам курса теоретической механики, читаемым во втузах по разным программам. Наличие задач различной степени трудности позволяет использовать сборник в университетах, втузах и техникумах.

Помещено большое количество задач, отражающих развитие современной техники. Имеются новые разделы, посвященные механике материальных систем с неголономными связями, а также механике систем при наличии сил и моментов, носящих случайный характер.

Для студентов университетов и втузов.

Ил. 1025. Табл. 16.

Рецензент член-корреспондент АН СССР *К. С. Колесников*

Иван Всеволодович Мещерский

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Редакторы *В. А. Брострем, А. Г. Мордвинцев*
Художественный редактор *Т. Н. Кольченко*
Технический редактор *И. Ш. Аксельрод*
Корректор *И. Я. Кришталь*

ИБ № 12906

Сдано в набор 07.07.85. Подписано к печати 11.07.86. Формат 60×90¹/₁₆. Бумага тип. № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 28. Усл. кр.-отт. 28. Уч.-изд. л. 29,69. Тираж 275 000 экз. (2-й завод 125 001—275 000 экз.) Заказ № 1546. Цена 1 р. 30 к.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Ленинградская типография № 2 головное предприятие ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 198052, г. Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29.

Отпечатано с матриц на Ярославском полиграфкомбинате Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 150014, Ярославль, ул. Свободы, 97.

$$М\ \frac{1703020000-163}{053(02)-86}\ 84-86$$

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОТДЕЛ ПЕРВЫЙ
СТАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

ОТДЕЛ ВТОРОЙ
КИНЕМАТИКА

ОТДЕЛ ТРЕТИЙ

ДИНАМИКА

ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРИДЦАТЬ ПЯТОМУ ИЗДАНИЮ

В настоящем издании продолжена попытка отразить в задачнике новые проблемы техники и более полно охватить разделы механики, ранее не нашедшие достаточного освещения Кроме того, все величины в задачах переведены в Международную систему единиц (СИ), введенную в СССР с 1 января 1980 г в соответствии со стандартом Совета Экономической Взаимопомощи СТ СЭВ 1052—78 *) В конце книги приведена таблица основных, дополнительных и производных единиц геометрических, кинематических, статических и динамических величин этой системы

Новые разделы составлены М И Бать (Смешанные задачи на сложное движение точки и твердого тела, § 25), Н А Фуфаевым (Системы с качением Неголономные связи, § 50), И Б Челпановым (Вероятностные задачи теоретической механики, глава XIV) Одновременно дополнены новыми задачами почти все остальные разделы, в частности введены задачи, связанные с манипуляторами, часть задач исключена

Авторский коллектив понес тяжелую утрату — в 1980 г после тяжелой продолжительной болезни скончался один из ведущих соавторов и титульных редакторов, член корреспондент Академии Наук СССР, профессор Анатолий Исакович Лурье, возглавлявший авторский коллектив с 1935 г

Подготовили «Сборник» к печати и представили новые задачи М И Бать, Н В Бутенин, А С Кельзон, А И Лурье, Д Р Меркин Кроме перечисленных выше лиц, новые задачи для настоящего издания представили Е Г Бергер, Ю Г Исполов, М В Миронов, З Б Сегал, В Б Старосельский И Б Челпанов, Н А Фуфаев

Нумерация задач двойная первое число означает номер параграфа, второе — номер задачи в этом параграфе В скобках указывается номер, который имела задача в тридцать втором — тридцать четвертом изданиях

---

*) Соответствует ГОСТ 8 417—81, введенному с 1 января 1982 г (*Примеч. ред*)

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ТРИДЦАТЬ ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

«Сборник задач по теоретической механике» И В Мещерского, составленный первоначально по мысли и под редакцией И В Мещерского группой преподавателей теоретической механики б Петербургского политехнического института как пособие для преподавания механики в этом институте, постепенно получил самое широкое распространение как в нашей стране, так и за ее пределами Начиная с 1914 г, когда вышло первое издание «Сборника», он переиздавался только в нашей стране тридцать один раз, первому печатному изданию предшествовало еще несколько литографированных изданий

Одна из основных причин успеха и распространения «Сборника» заключается в том, что в нем подобраны задачи, имеющие конкретную форму, дающие возможность студентам приобрести необходимые для них навыки в применении общих теорем и методов к решению конкретных прикладных вопросов

«Сборник» неоднократно перерабатывался

Составителями задач, помещенных в первом издании «Сборника» 1914 г, были Л В Ассур, Б А Бахметьев, И И Бентковский, А. А Горев, К М Дубяга, А М Ларионов, И В Мещерский, В Ф Миткевич, Е Л Николаи, К Э Рерих, Д Л Тагеев, В В Таклинский, С П Тимошенко, А И Тудоровский, А П Фан дер Флит, А К Федерман, В Д Шатров и другие В последующих изданиях приняли участие также Е К Митропольский и М Л Франк

В подготовке одиннадцатого переработанного издания принимали участие М И Акимов, М И Бать, Б А Берг, Н К Горчин, Ю В Долголенко, А С Кельзон, Ю Г Корнилов, А И Лурье, К В Меликов, Н Н Наугольная, П И Нелюбин, Н П Неронов, Е Л Николаи, В Ф Пекин, П Н Семенов, А А Смирнов, С А Сороков, К Н Страхович, А И Чекмарев и Ф Г Шмидт

Две существенные переработки осуществлены в четырнадцатом и шестнадцатом изданиях Работа по подготовке обоих изданий была выполнена коллективом кафедры теоретической механики Ленинградского политехнического института Составили новые задачи и редактировали отдел статики — С А Сороков, кинематики — Н Н Наугольная и А С Кельзон, динамики материальной точки — А С Кельзон, динамики системы — М И Бать, уравнений Лагранжа и теории колебаний — Г Ю Джанелидзе Общее редактирование осуществил А И Лурье Кроме упомянутых лиц, для четырнадцатого издания предоставили новые задачи Н С Бабищевич, Н И Идельсон, В Л Кан, А И Холодняк, А И Цымлов и Н А Докучаев

Развитие науки и техники за последние десятилетия вызвало необходимость новой переработки «Сборника» (последняя, наиболее существенная переработка была осуществлена в 1949 г , в шестнадцатом издании)

В тридцать втором издании сделана попытка, не выходя за рамки теоретической механики, отразить в какой то степени новые проблемы техники и более полно охватить те вопросы классической механики, которые не нашли до сих пор достаточного освещения В связи с этим в «Сборник» введены новые разделы, содержащие задачи по пространственной ориентации, динамике космического полета, нелинейным колебаниям, геометрии масс, аналитической механике Одновременно существенно пополнены новыми задачами разделы кинематики точки, кинематики относительного движения и плоского движения твердого тела, динамики материальной точки и системы, динамики точки и системы переменной массы, устойчивости движения Небольшое количество новых задач введено также почти во все другие разделы «Сборника», некоторые задачи исключены из него Сделаны также небольшие перестановки в размещении материала В конце «Сборника» в качестве добавления приведена Международная система единиц (СИ)

Работа по подготовке тридцать второго издания выполнена группой преподавателей высших учебных заведений г Ленинграда Составили новые задачи и подготовили к печати отдел статики — Д Р Меркин, отдел кинематики — М И Бать (§§ 15—18), А С Кельзон (§§ 21—25) и Д Р Меркин (§§ 10—14 и 19—20), отдел динамики материальной точки — А С Кельзон, отдел динамики материальной системы — М И Бать (§§ 34—44) и Н В Бутенин (§ 45), отдел аналитической механики — М И Бать (§§ 46, 47) и Д Р Меркин (§§ 48, 49), отдел динамики космического полета — Д Р Меркин, отдел теории колебаний и устойчивости движения — Н В Бутенин Кроме вышеупомянутых лиц предоставили новые задачи М З Коловский, И Е Лившиц и Б А Смольников

Считаем своим приятным долгом выразить искреннюю благодарность профессорам Г Ю Степанову и В Н Щелкачеву и возглавляемым ими коллективам кафедр за ценные замечания и советы позволившие улучшить «Сборник»

ОТДЕЛ ПЕРВЫЙ

СТАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

ГЛАВА I

ПЛОСКАЯ СИСТЕМА СИЛ

§ 1. Силы, действующие по одной прямой

1.1(1.1). Два груза, в 10 Н и 5 Н, висящие на одной веревке, укреплены на ней в разных местах, причем больший груз висит ниже меньшего. Каково натяжение веревки, если верхний конец ее прикреплен к неподвижной точке?

Ответ: 10 Н и 15 Н.

1.2(1.2). Буксир тянет три баржи различных размеров, следующие одна за другой. Сила тяги винта буксира в данный момент равна 18 кН. Сопротивление воды движению буксира равно 6 кН, сопротивление воды движению первой баржи — 6 кН, второй баржи — 4 кН и третьей — 2 кН. Имеющийся в распоряжении канат выдерживает безопасно растягивающую силу в 2 кН. Сколько канатов надо протянуть от буксира к первой барже, от первой ко второй и от второй к третьей, если движение — прямолинейное и равномерное?

Ответ: 6, 3 и 1 канат.

1.3(1.4). На дне шахты находится человек веса 640 Н; посредством каната, перекинутого через неподвижный блок, человек удерживает груз в 480 Н. 1) Какое давление оказывает человек на дно шахты? 2) Какой наибольший груз он может удержать с помощью каната?

Ответ: 1) 160 Н, 2) 640 Н.

1.4(1.5). Поезд идет по прямолинейному горизонтальному пути с постоянной скоростью, вес поезда, не считая электровоза, $12 \cdot 10^3$ кН. Какова сила тяги электровоза, если сопротивление движению поезда равно 0,005 давления поезда на рельсы?

Ответ: 60 кН.

1.5(1.6). Пассажирский поезд состоит из электровоза, багажного вагона веса 400 кН и 10 пассажирских вагонов веса 500 кН каждый. С какой силой будут натянуты вагонные стяжки и какова сила тяги электровоза, если сопротивление движению поезда равно 0,005 его веса? При решении задачи принять, что сопротивление движению распределяется между составом поезда пропорционально весу и что движение поезда равномерное.

Ответ Сила тяги электровоза 27 кН, $T_{11} = 2,5$ кН, $T_{10} = 2 \cdot 2,5$ кН и т. д. (нижний индекс означает номер вагона, начиная от электровоза).

§ 2. Силы, линии действия которых пересекаются в одной точке

2.1(2.1) В центре правильного шестиугольника приложены силы 1, 3, 5, 7, 9 и 11 Н, направленные к его вершинам. Найти величину и направление равнодействующей и уравновешивающей.

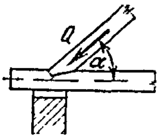
Ответ 12 Н, направление уравновешивающей противоположно направлению заданной силы в 9 Н.

2.2(2.3) Силу в 8 Н разложить на две по 5 Н каждая. Можно ли ту же силу разложить на две по 10 Н, 15 Н, 20 Н и т. д.? На две по 100 Н?

Ответ Да, если не заданы направления разложения.

2.3(2.4) По направлению стропильной ноги, наклоненной к горизонту под углом $\alpha = 45°$, действует сила $Q = 2,5$ кН. Какое усилие S возникает при этом по направлению горизонтальной затяжки и какая сила N действует на стену по отвесному направлению?

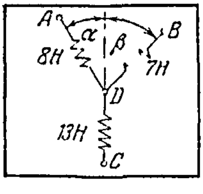
Ответ $S = N = 1,77$ кН.



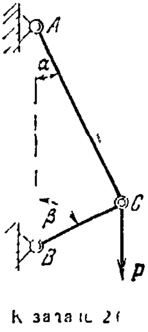
К задаче 2.3

2.4(2.5) Два трактора, идущих по берегам прямого канала с постоянной скоростью, тянут барку при помощи двух канатов. Силы натяжения канатов равны 0,8 кН и 0,96 кН, угол между ними равен 60°. Найти сопротивление воды P, испытываемое баркой при ее движении, и углы α и β, которые должны составлять канаты с берегами канала, если барка движется параллельно берегам.

Ответ $P = 1,53$ кН, $\alpha = 33°$, $\beta = 27°$.



К задаче 2.5



К задаче 2.6

2.5(2.6) Кольца A, B и C трех пружинных весов укреплены неподвижно на горизонтальной доске. К крючкам весов привязаны три веревки, которые натянуты и связаны в один узел D. Показания весов 8, 7 и 13 Н. Определить углы α и β, образуемые направлениями веревок, как указано на рисунке.

Ответ $\alpha = 27,8°$, $\beta = 32,2°$.

2.6(2.7) Стержни AC и BC соединены между собой и с вертикальной стеной посредством шарниров. На шарнирный болт C действует вертикальная сила $P = 1000$ Н.

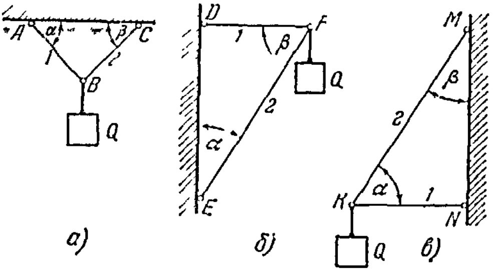
Определить реакции этих стержней на шарнирный болт C, если углы, составляемые стержнями со стеной, равны $\alpha = 30°$ и $\beta = 60°$.

Ответ 866 Н, 500 Н.

2.7(2.8). На рисунках *а*, *б* и *в*, как и в предыдущей задаче, схематически изображены стержни, соединенные между собой, с потолком и стенами посредством шарниров. К шарнирным болтам B, F и K подвешены грузы $Q = 1000$ Н. Определить усилия в стержнях для случаев

а) $\alpha = \beta = 45°$,
б) $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$,
в) $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$.

Ответ: а) $S_1 = S_2 = 707$ Н, б) $S_1 = 577$ Н, $S_2 = -1154$ Н*), в) $S_1 = -577$ Н, $S_2 = 1154$ Н.

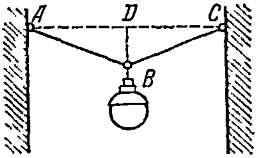


К задаче 2.7

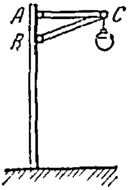
2.8(2.9). Уличный фонарь подвешен в точке B к середине троса ABC, прикрепленного концами к крюкам A и C, находящимся на одной горизонтали. Определить натяжения T_1 и T_2 в частях троса AB и BC, если вес фонаря равен 150 Н, длина всего троса ABC равна 20 м и отклонение точки его подвеса от горизонтали $BD = 0{,}1$ м. Весом троса пренебречь.

Ответ: $T_1 = T_2 = 7{,}5$ кН.

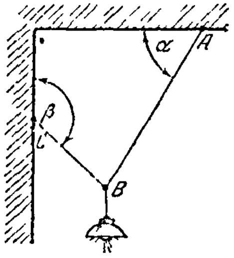
2.9(2.10). Уличный фонарь веса 300 Н подвешен к вертикальному столбу с помощью горизонтальной поперечины $AC = 1{,}2$ м и



К задаче 2.8



К задаче 2.9



К задаче 2.10

подкоса $BC = 1{,}5$ м. Найти усилия S_1 и S_2 в стержнях AC и BC, считая крепления в точках A, B и C шарнирными.

Ответ: $S_1 = 400$ Н, $S_2 = -500$ Н.

2.10(2.11). Электрическая лампа веса 20 Н подвешена к потолку на шнуре AB и затем оттянута к стене веревкой BC. Определить натяжения T_A шнура AB и T_C веревки BC, если известно, что угол $\alpha = 60°$, а угол $\beta = 135°$. Весом шнура и веревки пренебречь.

Ответ: $T_A = 14{,}6$ Н, $T_C = 10{,}4$ Н.

2.11(2.12). Мачтовый кран состоит из стрелы AB, прикрепленной шарниром A к мачте, и цепи CB. К концу B стрелы подвешен

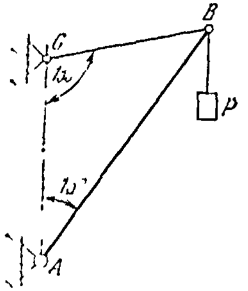
---

*) Знак минус показывает, что стержень сжат.

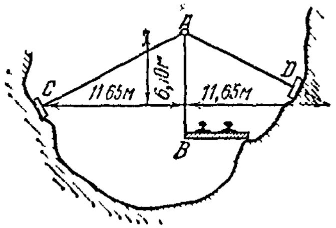
груз $P = 2$ кН; углы $BAC = 15°$, $ACB = 135°$. Определить натяжение T цепи CB и усилие Q в стреле AB.

Ответ. $T = 1{,}04$ кН, $Q = 2{,}83$ кН.

2.12(2.13). На одной железной дороге, проведенной в горах, участок пути в ущелье подвешен так, как показано на рисунке. Предполагая подвеску AB нагруженной силой $P = 500$ кН, найти усилия в стержнях AC и AD.



К задаче 2.11

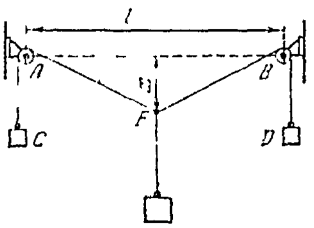


К задаче 2.12

Ответ. Стержни AC и AD сжаты одинаковым усилием 539 кН.

2.13(2.14). Через два блока A и B, находящихся на одной горизонтальной прямой $AB = l$, перекинута веревка $CAEBD$. К концам C и D веревки подвешены гири веса p каждая, а к точке E — гиря веса P. Определить, пренебрегая трением на блоках и их размерами, расстояние x точки E от прямой AB в положении равновесия. Весом веревки пренебречь.

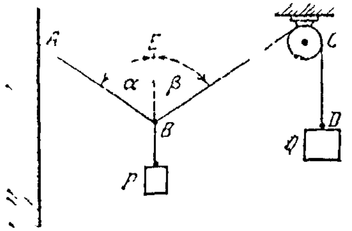
Ответ: $x = \dfrac{Pl}{2\sqrt{4p^2 - P^2}}$.



К задаче 2.13

2.14(2.15). Груз веса 25 Н удерживается в равновесии двумя веревками, перекинутыми через блоки и натягиваемыми грузами. Один из этих грузов весит 20 Н, синус угла, образуемого соответствующей веревкой с вертикалью, равен 0,6. Пренебрегая трением на блоках, определить величину p второго груза и угол α, образуемый второй веревкой с вертикальной линией. Весом веревки пренебречь.

Ответ. $p = 15$ Н, $\sin\alpha = 0{,}8$.



К задаче 2.15

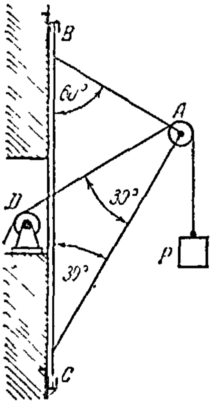
2.15(2.16). К веревке AB, один конец которой закреплен в точке A, привязаны в точке B груз P и веревка BCD, перекинутая через блок, к концу ее D привязана гиря Q веса 100 Н. Определить, пренебрегая трением на блоке, натяжение T веревки AB и величину груза P, если в положении равновесия углы, образуемые веревками с вертикалью BE, равны: $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$.

Ответ. $T = 122$ Н, $P = 137$ Н.

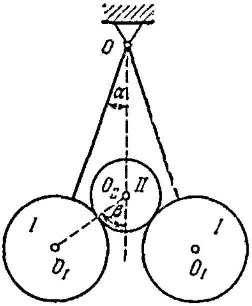
2.16(2.17). Груз $P = 20$ кН поднимается магазинным краном BAC посредством цепи, перекинутой через блок A и через блок D, который укреплен на стене так, что угол $CAD = 30°$. Углы между стержнями крана: $ABC = 60°$, $ACB = 30°$. Определить усилия Q_1 и Q_2 в стержнях AB и AC.

Ответ. $Q_1 = 0$, $Q_2 = -34{,}6$ кН.

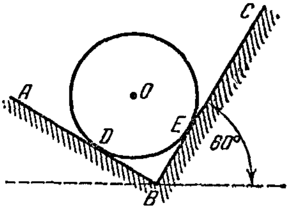
2.17. Два одинаковых цилиндра I веса P каждый подвешены на нитях к точке O. Между ними лежит цилиндр II веса Q. Вся система находится в равновесии. Цилиндры I не касаются друг друга. Определить зависимость между углом α, образованным нитью с вертикалью, и углом β, образованным прямой, проходящей через оси цилиндров I и II, с вертикалью.



К задаче 2.16



К задаче 2.17



К задаче 2.18

Ответ: $\operatorname{tg}\beta = \left(\frac{2P}{Q} + 1\right)\operatorname{tg}\alpha$.

2.18(2.18). На двух взаимно перпендикулярных гладких наклонных плоскостях AB и BC лежит однородный шар O веса 60 Н. Определить давление шара на каждую плоскость, зная, что плоскость BC составляет с горизонтом угол 60°.

Ответ. $N_D = 52$ Н, $N_E = 30$ Н.

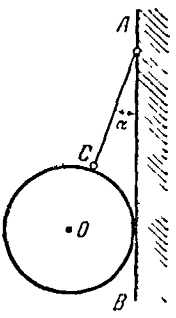
2.19(2.19). К вертикальной гладкой стене AB подвешен на тросе AC однородный шар O. Трос составляет со стеной угол α, вес шара P. Определить натяжение троса T и давление Q шара на стену.

Ответ. $T = P/\cos\alpha$, $Q = P\operatorname{tg}\alpha$.

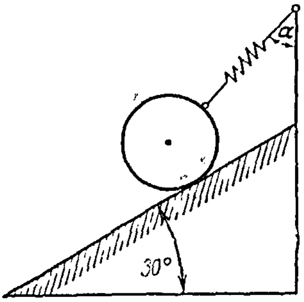
2.20(2.20). Однородный шар веса 20 Н удерживается на гладкой наклонной плоскости тросом, который привязан к пружинным весам, укрепленным над плоскостью; показание пружинных весов 10 Н. Угол наклона плоскости к горизонту равен 30°. Определить угол α, составляемый направлением троса с вертикалью, и давление Q шара на плоскость. Весом пружинных весов пренебречь

Ответ $\alpha = 60°$, $Q = 17{,}3$ Н

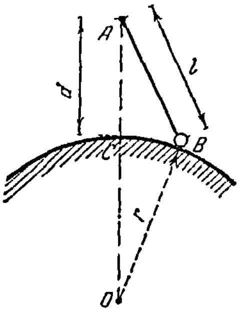
2.21(2.21). Шарик B веса P подвешен к неподвижной точке A посредством нити AB и лежит на поверхности гладкой сферы радиуса r; расстояние точки A от поверхности сферы $AC = d$, длина нити $AB = l$, прямая AO вертикальна. Определить натяжение T нити и реакцию Q сферы. Радиусом шарика пренебречь



К задаче 2.19



К задаче 2.20



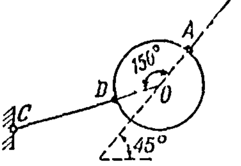
К задаче 2.21

Ответ $T = P\dfrac{l}{d + r}$, $Q = P\dfrac{r}{d + r}$

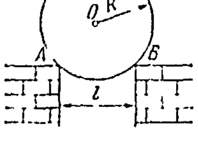
2.22(2.22). Однородный шар веса 10 Н удерживается в равновесии двумя тросами AB и CD, расположенными в одной вертикальной плоскости и составляющими один с другим угол 150°. Трос AB наклонен к горизонту под углом 45°. Определить натяжение тросов

Ответ $T_B = 19{,}3$ Н, $T_C = 14{,}1$ Н.

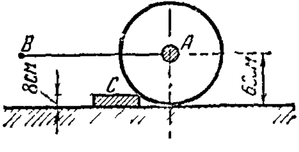
2.23(2.23). Котел с равномерно распределенным по длине весом $P = 40$ кН и радиуса $R = 1$ м лежит на выступах каменной кладки. Расстояние между стенками кладки $l = 1{,}6$ м. Пренебрегая трением, найти давление котла на кладку в точках A и B



К задаче 2.22



К задаче 2.23



К задаче 2.24

Ответ $N_A = N_B = 33{,}3$ кН

2.24(2.24). Вес однородного трамбовочного катка равен 20 кН, радиус его 60 см. Определить горизонтальное усилие P, необходимое для перетаскивания катка через каменную плиту высоты 8 см, в положении, указанном на рисунке.

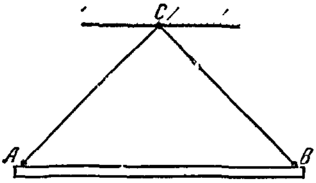
Ответ: $P = 11{,}5$ кН.

2.25(2.25). Однородный стержень AB веса 160 Н, длины 1,2 м подвешен в точке C на двух тросах AC и CB одинаковой длины, равной 1 м. Определить натяжения тросов.

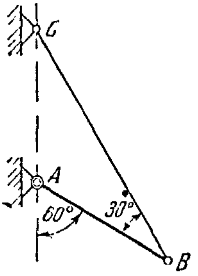
Ответ. Натяжение каждого троса равно 100 Н.

2.26(2.26). Однородный стержень AB прикреплен к вертикальной стене посредством шарнира A и удерживается под углом 60° к вертикали при помощи троса BC, образующего с ним угол 30°. Определить величину и направление реакции R шарнира, если известно, что вес стержня равен 20 Н.

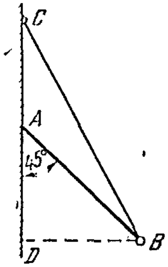
Ответ: $R = 10$ Н, угол $(R, AC) = 60°$.



К задаче 2.25



К задаче 2.26

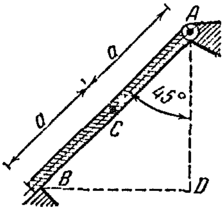


К задаче 2.27

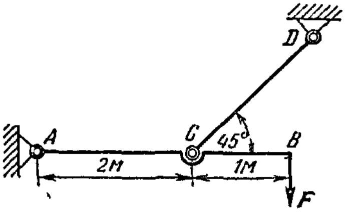
2.27(2.27). Верхний конец A однородного бруса AB, длина которого 2 м, а вес 50 Н, упирается в гладкую вертикальную стену. К нижнему концу B привязан трос BC. Найти, на каком расстоянии AC нужно прикрепить трос к стене для того, чтобы брус находился в равновесии, образуя угол $BAD = 45°$. Найти натяжение T троса и реакцию R стены.

Ответ. $AC = AD = 1{,}41$ м, $T = 56$ Н, $R = 25$ Н.

2.28(2.28). Оконная рама AB, изображенная на рисунке в разрезе, может вращаться вокруг горизонтальной оси шарнира A и своим нижним краем B свободно опирается на уступ паза. Найти реакции опор, если дано, что вес рамы, равный 89 Н, приложен к середине C рамы и $AD = BD$.



К задаче 2.28



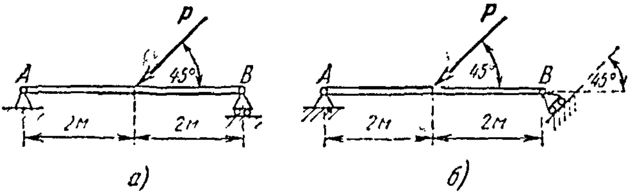
К задаче 2.29

Ответ. $R_A = 70{,}4$ Н, $R_B = 31{,}5$ Н.

2.29(2.29). Балка AB поддерживается в горизонтальном положении стержнем CD; крепления в A, C и D шарнирные. Определить реакции опор A и D, если на конце балки действует вертикальная сила $F = 5$ кН. Размеры указаны на рисунке. Весом пренебречь.

Ответ: $R_A = 7{,}9$ кН, $R_D = 10{,}6$ кН.

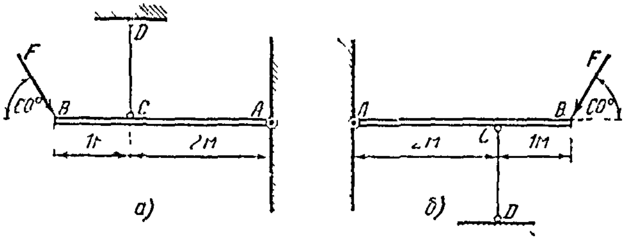
2.30(2.30). Балка AB шарнирно закреплена на опоре A, у конца B она положена на катки. В середине балки, под углом 45° к ее оси, действует сила $P = 2$ кН. Определить реакции опор для случаев *а* и *б*, взяв размеры с рисунков и пренебрегая весом балки.



К задаче 2.30

Ответ: а) $R_A = 1{,}58$ кН, $R_B = 0{,}71$ кН, б) $R_A = 2{,}24$ кН, $R_B = 1$ кН.

2.31(2.31). На рисунках изображены балки AB, удерживаемые в горизонтальном положении вертикальными стержнями CD. На концах балок действуют силы $F = 30$ кН под углом 60° к горизонту. Взяв размеры с рисунков, определить усилия S в стержнях CD и давления Q балок на стену, если крепления в A, C и D шарнирные. Весом стержней и балок пренебречь.



К задаче 2.31

Ответ: а) $S = 39$ кН, $Q = 19{,}8$ кН, б) $S = 39$ кН, $Q = 19{,}8$ кН.

2.32(2.32). Электрический провод ACB натянут между двумя столбами так, что образует пологую кривую, стрела провисания которой $CD = f = 1$ м. Расстояние между столбами $AB = l = 40$ м. Вес провода $Q = 0{,}4$ кН. Определить натяжения провода T_C в средней точке, T_A и T_B на концах.

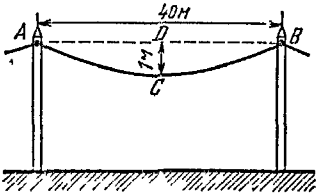
При решении задачи считать, что вес каждой половины провода приложен на расстоянии $l/4$ от ближнего столба.

Ответ. $T_C = \frac{Ql}{8f} = 2$ кН; $T_A = T_B = 2{,}01$ кН.

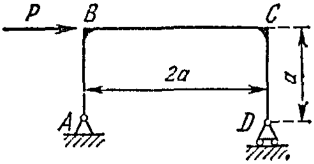
2.33(2.33) Для рамы, изображенной на рисунке, определить опорные реакции R_A и R_D, возникающие при действии горизонтальной силы P, приложенной в точке B. Весом рамы пренебречь.

Ответ: $R_A = P\sqrt{5}/2$, $R_D = P/2$.

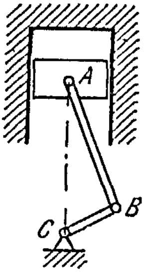
2.34(2.34) В двигателе внутреннего сгорания площадь поршня равна 0,02 м², длина шатуна $AB = 30$ см, длина кривошипа $BC = 6$ см. Давление газа в данный момент над поршнем равно $P_1 = 1000$ кПа, под поршнем $P_2 = 200$ кПа. Найти силу T, действующую со стороны шатуна AB на кривошип BC, вызванную перепадом давлений газа, если угол $ABC = 90°$. Трением между поршнем и цилиндром пренебречь.



К задаче 2.32



К задаче 2.33

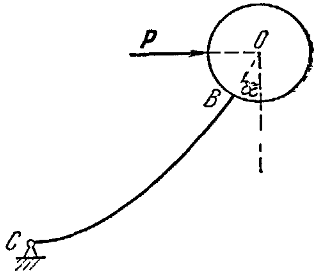


К задаче 2.34

Ответ: $T = 16$ кН.

2.35(2.35) Воздушный шар, вес которого равен G, удерживается в равновесии тросом BC. На шар действуют подъемная сила $\boldsymbol{Q}$ и горизонтальная сила давления ветра, равная $\boldsymbol{P}$. Определить натяжение троса в точке B и угол α.

Ответ: $T = \sqrt{P^2 + (Q - G)^2}$, $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{P}{Q - G}$.



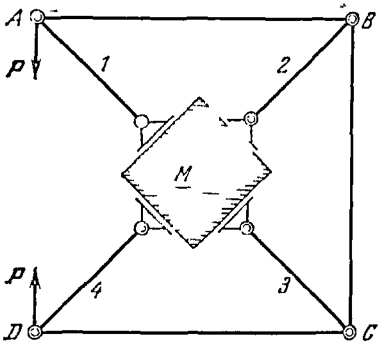
К задаче 2.35

2.36(2.36) Для сжатия цементного кубика M по четырем граням пользуются шарнирным механизмом, в котором стержни AB, BC и CD совпадают со сторонами квадрата $ABCD$, а стержни 1, 2, 3, 4 равны между собой и направлены по диагоналям того же квадрата, две равные по модулю силы P прикладываются к точкам A и D, как показано на рисунке. Определить силы N_1, N_2, N_3, N_4, сжимающие кубик, и усилия S_1, S_2, S_3 в стержнях AB, BC и CD, если величина сил, приложенных в точках A и D, равна 50 кН.

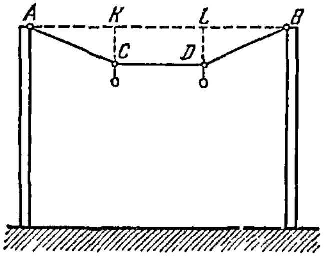
Ответ: $N_1 = N_2 = N_3 = N_4 = 70{,}7$ кН. Растягивающие усилия $S_1 = S_2 = S_3 = 50$ кН.

2.37(2.37) Два трамвайных провода подвешены к поперечным проволочным канатам, из которых каждый прикреплен к двум столбам. Столбы расставлены вдоль пути на расстоянии 40 м друг от друга. Для каждого поперечного каната расстояния $AK = KL = LB = 5$ м; $KC = LD = 0{,}5$ м. Пренебрегая весом проволочного каната, найти натяжения T_1, T_2 и T_3 в частях его AC, CD и DB, если вес 1 м провода равен 7,5 Н.

Ответ $T_1 = T_3 = 3{,}015$ кН, $T_2 = 3$ кН.



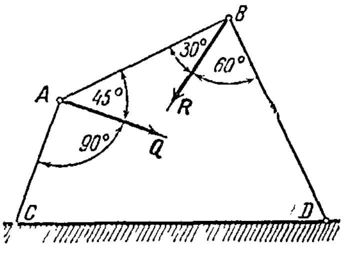
К задаче 2.36



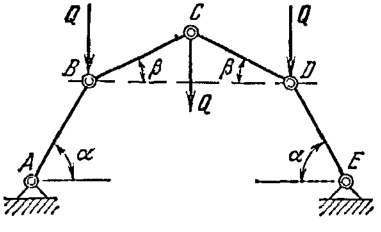
К задаче 2.37

2.38(2.38). К шарниру A стержневого шарнирного четырехугольника $ABDC$, сторона CD, которого закреплена, приложена сила $Q = 100$ Н под углом $BAQ = 45°$. Определить величину силы R, приложенной в шарнире B под углом $ABR = 30°$ таким образом, чтобы четырехугольник $ABDC$ был в равновесии, если углы $CAQ = 90°$, $DBR = 60°$.

Ответ $R \doteq 163$ Н.



К задаче 2.38



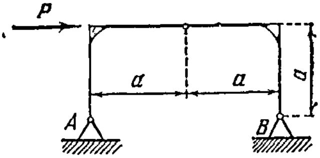
К задаче 2.39

2.39(2.39). Стержневой шарнирный многоугольник состоит из четырех равных стержней, концы A и E шарнирно закреплены; узлы B, C и D нагружены одинаковой вертикальной нагрузкой Q. В положении равновесия угол наклона крайних стержней к горизонту $\alpha = 60°$. Определить угол β наклона средних стержней к горизонту.

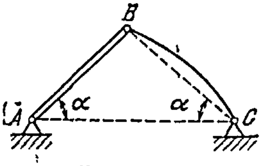
Ответ $\beta = 30°$.

2.40(2.40). Для трехшарнирной арки, показанной на рисунке, определить реакции опор A и B, возникающие при действии горизонтальной силы $\boldsymbol{P}$. Весом арки пренебречь.

Ответ: $R_A = R_B = P\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.



К задаче 2.40

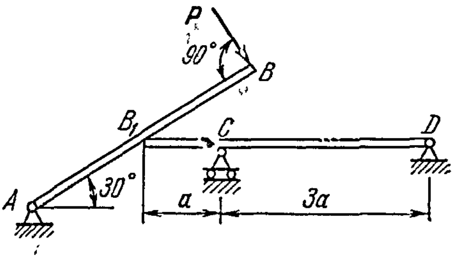


К задаче 2.41

2.41(2.41). Прямолинейный однородный брус AB веса P и невесомый стержень BC с криволинейной осью произвольного очертания соединены шарнирно в точке B и так же соединены с опорами A и C, расположенными на одной горизонтали AC. Прямые AB и BC образуют с прямой AC углы $\alpha = 45°$. Определить реакции опор A и C.

Ответ: $R_A = \dfrac{\sqrt{10}}{4}P$, $R_C = \dfrac{\sqrt{2}}{4}P$.

2.42(2.42). Наклонная балка AB, на конец которой действует сила $\boldsymbol{P}$, серединой B_1 опирается на ребро консоли балки CD. Определить опорные реакции, пренебрегая весом балок.

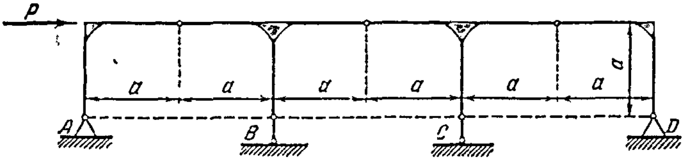


К задаче 2.42

Ответ: $R_A = P$, $R_C = 4P/\sqrt{3}$, $R_D = 2P/\sqrt{3}$.

2.43(2.43). Дана система, состоящая из четырех арок, размеры которых указаны на рисунке. Определить реакции опор A, B, C и D, возникающие при действии горизонтальной силы $\boldsymbol{P}$.

Ответ: $R_A = P\sqrt{2}/2$, $R_B = P$, $R_C = P$, $R_D = P\sqrt{2}/2$.

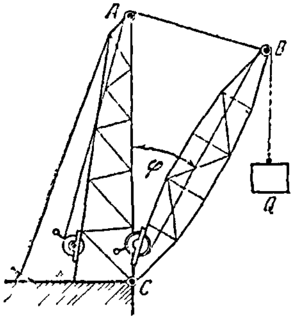


К задаче 2.43

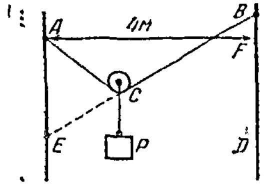
2.44(2.44). Кран состоит из неподвижной башни AC и подвижной фермы BC, которая имеет шарнир C и удерживается тросом AB. Груз $Q = 40$ кН висит на цепи, перекинутой через блок в точке B и идущей к вороту по прямой BC. Длина $AC = BC$. Определить, пренебрегая весом фермы и трением на блоке, натяжение T троса AB и силу P, сжимающую ферму по прямой BC, как функции угла $ACB = \varphi$.

Ответ $T = 80\sin(\varphi/2)$ кН, $P = 80$ кН независимо от угла φ.

2.45(2.45). Блок C с грузом $P = 18$ Н может скользить вдоль гибкого троса ACB, концы которого A и B прикреплены к стенам. Расстояние между стенами 4 м, длина троса 5 м. Определить на-



К задаче 2.44



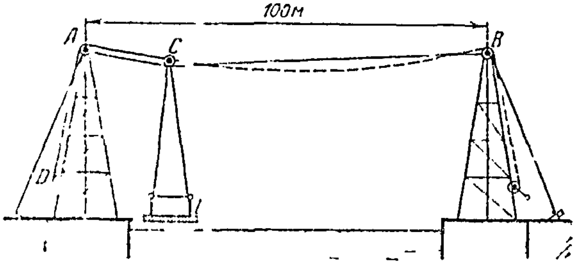
К задаче 2.45

тяжение троса при равновесии блока с грузом, пренебрегая весом троса и трением блока о трос.

Натяжения частей троса AC и CB одинаковы, их величина может быть определена из подобия треугольника сил и равнобедренного треугольника, одна из боковых сторон которого есть прямая BCF, а основание лежит на вертикали BD.

Ответ 15 Н независимо от высоты BF.

2.46(2.46). Для переправы через реку устроена люлька L, которая посредством ролика C подвешена к стальному тросу AB, закрепленному в вершинах башен A и B. Для передвижения ролика

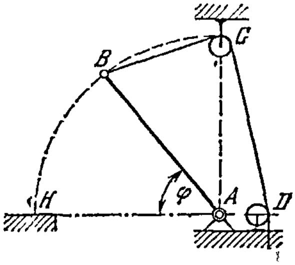


К задаче 2.46

C к левому берегу служит канат CAD, перекинутый через блок A и наматываемый на ворот D, такой же канат имеется для подтягивания люльки к правому берегу. Точки A и B находятся на одной горизонтали на расстоянии $AB = 100$ м одна от другой, длина троса ACB равна 102 м, вес люльки 50 кН. Пренебрегая весом канатов и троса, а также трением ролика о трос, определить натяжение каната CAD и натяжение троса ACB в тот момент, когда длина ветви $AC = 20$ м

Ответ: $S_{CAD} = 7{,}5$ кН; $S_{CB} = S_{CA} = 95{,}6$ кН

2.47(2.47). Оконная рама AB, изображенная на рисунке в разрезе, веса 100 Н, открывается, вращаясь вокруг горизонтальной оси A, при помощи шнура BCD, огибающего блоки C и D. Блок C, размерами которого пренебрегаем, и точка A лежат на одной вертикали; вес рамы приложен в ее середине; трением также пренебрегаем. Найти натяжение T шнура в зависимости от угла φ, образуемого рамой AB с горизонталью AH, предполагая $AB = AC$, а также наибольшее и наименьшее значения этого натяжения.



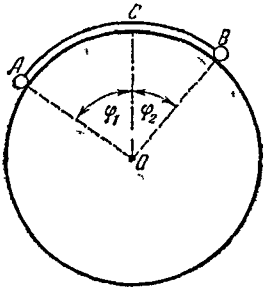
К задаче 2 47

Ответ: $T = 100 \sin(45° - \varphi/2)$ Н;

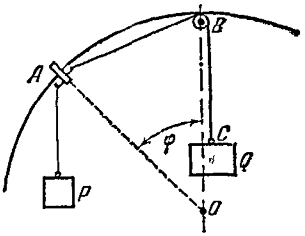
$T_{max} = 70{,}7$ Н при $\varphi = 0$;

$T_{min} = 0$ при $\varphi = 90°$.

2.48(2.48). На круглом гладком цилиндре с горизонтальной осью и радиуса $OA = 0{,}1$ м лежат два шарика A и B; вес первого 1 Н, второго 2 Н. Шарики соединены нитью AB длины 0,2 м. Определить углы φ_1 и φ_2, составляемые радиусами OA и OB с вертикальной прямой OC в положении равновесия, и давления N_1 и N_2 шариков на цилиндр в точках A и B. Размерами шариков пренебречь.



К задаче 2 48



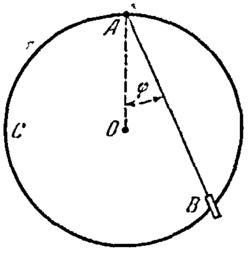
К задаче 2 49

Ответ. $\varphi_1 = 2 - \varphi_2$, $\operatorname{tg} \varphi_2 = \dfrac{\sin 2}{2 + \cos 2}$, $\varphi_1 = 84°45'$, $\varphi_2 = 29°50'$, $N_1 = \cos \varphi_1$ Н $= 0{,}092$ Н, $N_2 = 2 \cos \varphi_2$ Н $= 1{,}73$ Н

2.49(2.49). Гладкое кольцо A может скользить без трения по неподвижной проволоке, согнутой по окружности, расположенной в вертикальной плоскости. К кольцу подвешена гиря P и привязана веревка ABC, которая перекинута через неподвижный блок B, находящийся в высшей точке окружности, размерами блока пренебрегаем. В точке C подвешена гиря Q. Определить центральный угол φ дуги AB в положении равновесия, пренебрегая весом кольца и трением на блоке, и указать условие, при котором возможно равновесие

Ответ: $\sin(\varphi_1/2)=Q/(2P)$, $\varphi_2=\pi$; первое из указанных положений равновесия возможно при $Q<2P$, второе — при любых Q и P.

2.50(2.50). На проволочной окружности ABC радиуса R, расположенной в вертикальной плоскости, помещено гладкое кольцо B, вес которого p, размерами кольца пренебречь Кольцо посредством упругой нити AB соединено с наивысшей точкой A окружности. Определить угол φ в положении равновесия, зная, что сила натяжения нити T пропорциональна ее относительному удлинению, причем коэффициент пропорциональности равен k.



К задаче 2.50

Если через L и l обозначим длину нити соответственно в состоянии растянутом и нерастянутом, то $T=k\,\frac{L-l}{l}$

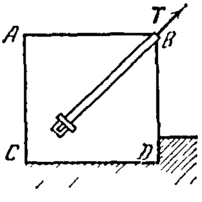
Ответ: $\cos\varphi=\frac{1}{2}\,\frac{kl}{kR-pl}$, если $k\geqslant\frac{2pl}{2R-l}$; в противном случае $\varphi=0$.

2.51(2.51). Точка M притягивается тремя неподвижными центрами $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$ и $M_3(x_3,y_3)$ силами, пропорциональными расстояниям: $F_1=k_1r_1$, $F_2=k_2r_2$, $F_3=k_3r_3$, где $r_1=MM_1$, $r_2=MM_2$, $r_3=MM_3$, а k_1, k_2, k_3 — коэффициенты пропорциональности. Определить координаты x, y точки M в положении равновесия

Ответ: $x=\frac{k_1x_1+k_2x_2+k_3x_3}{k_1+k_2+k_3}$, $y=\frac{k_1y_1+k_2y_2+k_3y_3}{k_1+k_2+k_3}$.

2.52(2.52). Однородная прямоугольная пластинка веса 50 Н подвешена так, что может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей вдоль одной из ее сторон. Равномерно дующий ветер удерживает ее в наклонном положении под углом 18° к вертикальной плоскости Определить равнодействующую давлений, производимых ветром на пластинку перпендикулярно ее плоскости.

Ответ $5\sin 18^\circ=15{,}5$ Н



К задаче 2.53

2.53(2.53). Концевая цепь цепного моста заложена в каменное основание, имеющее форму прямоугольного параллелепипеда, среднее сечение которого есть $ABDC$ Стороны $AB=AC=5$ м, удельный вес кладки 25 кН/м^3; цепь расположена на диагонали BC Найти необходимую длину a третьей стороны параллелепипеда, если натяжение цепи $T=1000$ кН

Основание должно быть рассчитано на опрокидывание вокруг ребра D, при расчете пренебрегаем сопротивлением грунта

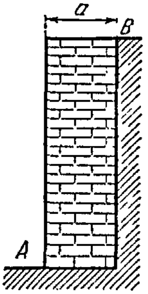
Ответ. $a>2{,}26$ м.

2.54(2.54). Земляная насыпь подпирается вертикальной каменной стеной AB. Найти необходимую толщину стены a, предполагая, что давление земли на стену направлено горизонтально, приложено на 1/3 ее высоты и равно 60 кН/м (на метр длины стены); удельный вес кладки 20 кН/м^3

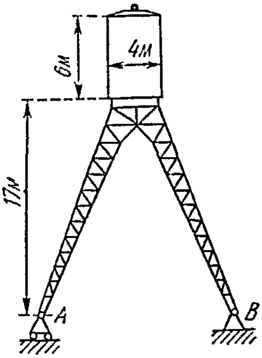
Стена должна быть рассчитана на опрокидывание вокруг ребра A

Ответ $a \geqslant 1{,}42$ м

2.55(2.55). Водонапорная башня состоит из цилиндрического резервуара высоты 6 м и диаметра 4 м, укрепленного на четырех симметрично расположенных столбах, наклонных к горизонту, дно резервуара находится на высоте 17 м над уровнем опор, вес башни 80 кН, давление ветра рассчитывается на площадь проекции поверхности резервуара на плоскость, перпендикулярную направлению ветра, причем удельное давление ветра принимается равным 1,25 кПа Определить необходимое расстояние AB между основаниями столбов



К задаче 2.54



К задаче 2.55

Расстояние AB должно быть рассчитано на опрокидывание давлением ветра при горизонтальном его направлении

Ответ $AB \geqslant 15$ м

§ 3 Параллельные силы

3.1(3.1) Определить вертикальные реакции опор, на которые свободно оперта у своих концов горизонтальная балка длины l, нагруженная равномерно по p Н на единицу длины Вес балки считать включенным в равномерно распределенную нагрузку

Ответ $R_1 = R_2 = {}^1/_2 pl$ Н

3.2(3.2) Определить вертикальные реакции опор горизонтальной балки пролета l, если груз P помещен на ней на расстоянии x от первой опоры

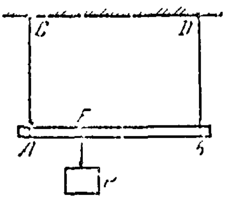
Ответ $R_1 = P\dfrac{l-x}{l}$, $R_2 = P\dfrac{x}{l}$

3.3(3.3) Однородный стержень AB, длина которого 1 м, а вес 20 Н, подвешен горизонтально на двух параллельных веревках AC и BD К стержню в точке E на расстоянии $AE = 1/4$ м подвешен груз $P = 120$ Н Определить натяжения веревок T_C и T_D

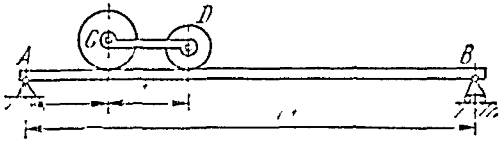
Ответ $T_C = 100$ Н, $T_D = 10$ Н

3.4(3.4) На горизонтальную балку, лежащую на двух опорах, расстояние между которыми равно 4 м, положены два груза, один C в 2 кН, другой D в 1 кН, так, что реакция опоры A в два раза больше реакции опоры B, если пренебречь весом балки. Расстояние CD между грузами равно 1 м. Каково расстояние x груза C от опоры A?

Ответ $x = 1$ м.

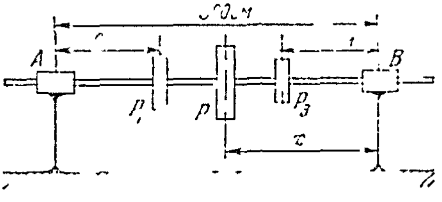


К задаче 3.3



К задаче 3.4

3.5(3.5). Трансмиссионный вал AB несет три шкива веса $P_1 = 3$ кН, $P_2 = 5$ кН, $P_3 = 2$ кН. Размеры указаны на рисунке. Определить, на каком расстоянии x от подшипника B надо установить шкив веса P_2, чтобы реакция подшипника A равнялась реакции подшипника B; весом вала пренебречь.

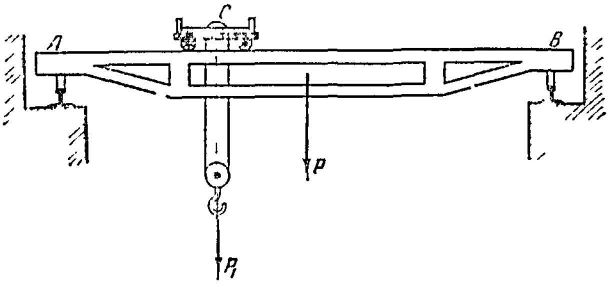


К задаче 3.5

Ответ $x = 139$ см.

3.6(3.6). Определить силы давления мостового крана AB на рельсы в зависимости от положения тележки C, на которой укреплена лебедка. Положение тележки определить расстоянием ее середины от левого рельса в долях общей длины моста. Вес моста $P = 60$ кН, вес тележки с поднимаемым грузом $P_1 = 40$ кН.

Ответ $F_A = (7 - 4n)\ 10$ кН, $F_B = (3 + 4n)\ 10$ кН, где $n = AC/AB$.

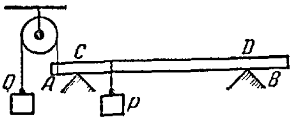


К задаче 3.6

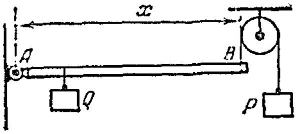
3.7(3.7). Балка AB длины 10 м и веса 2 кН лежит на двух опорах C и D. Опора C отстоит от конца A на 2 м, опора D от конца B — на 3 м. Конец балки A оттягивается вертикально вверх посредством перекинутого через блок троса, на котором подвешен груз Q

веса 3 кН. На расстоянии 3 м от конца A к балке подвешен груз P веса 8 кН. Определить реакции опор, пренебрегая трением на блоке.

Ответ. $R_C = 3$ кН, $R_D = 4$ кН.



К задаче 3.7

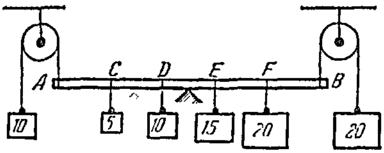


К задаче 3.8

3.8(3.8). Горизонтальный стержень AB веса 100 Н может вращаться вокруг неподвижной оси шарнира A. Конец B оттягивается кверху посредством перекинутой через блок нити, на которой подвешена гиря веса $P = 150$ Н. В точке, находящейся на расстоянии 20 см от конца B, подвешен груз Q веса 500 Н. Как велика длина x стержня AB, если он находится в равновесии?

Ответ. $x = 25$ см.

3.9(3.9). Конец A горизонтального стержня AB веса 20 Н и длины 5 м оттягивается кверху посредством перекинутой через блок веревки, на которой подвешен груз веса 10 Н. Конец B таким же образом оттягивается кверху посредством груза веса 20 Н. В точках C, D, E и F, отстоящих одна от другой и от точек A и B на 1 м, подвешены грузы веса соответственно 5, 10, 15 и 20 Н. В каком месте надо подпереть стержень, чтобы он оставался в равновесии?



К задаче 3.9

Ответ. В середине.

3.10(3.10). К однородному стержню, длина которого 3 м, а вес 6 Н, подвешены 4 груза на равных расстояниях друг от друга, причем два крайних — на концах стержня. Первый груз слева весит 2 Н, каждый последующий тяжелее предыдущего на 1 Н. На каком расстоянии x от левого конца нужно подвесить стержень, чтобы он оставался горизонтальным?

Ответ. $x = 1,75$ м.

3.11(3.11). Однородная горизонтальная балка соединена со стеной шарниром и подперта в точке, лежащей на расстоянии 160 см от стены. Длина балки 400 см, ее вес 320 Н. На расстояниях 120 см и 180 см от стены на балке лежат два груза веса 160 Н и 240 Н. Определить опорные реакции.

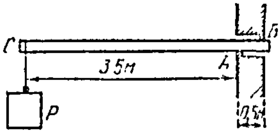
Ответ. 790 Н — вверх, 70 Н — вниз.

3.12(3.12). Однородная горизонтальная балка длины 4 м и веса 5 кН заложена в стену, толщина которой равна 0,5 м, так, что опирается на нее в точках A и B. Определить реакции в этих точках, если к свободному концу балки подвешен груз P веса 40 кН.

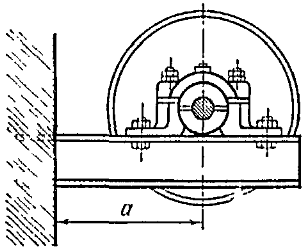
Ответ. $R_A = 340$ кН — вверх, $R_B = 295$ кН — вниз.

3.13(3.13). Горизонтальная балка заделана одним концом в стену, а на другом конце поддерживает подшипник вала. От веса вала, шкивов и подшипника балка испытывает вертикальную нагрузку Q, равную 1,2 кН. Пренебрегая весом балки и считая, что нагрузка Q действует на расстоянии $a = 0{,}75$ м от стены, определить реакции заделки.

Ответ. Реакция $R = 1{,}2$ кН, реактивный момент $M = 0{,}9$ кН·м.

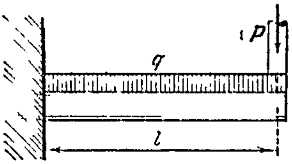


К задаче 3.12

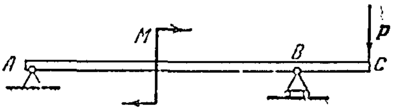


К задаче 3.13

3.14(3.14). Горизонтальная балка, поддерживающая балкон, подвергается действию равномерно распределенной нагрузки интенсивности $q = 2$ кН/м. На балку у свободного конца передается нагрузка от колонны $P = 2$ кН. Расстояние оси колонны от стены $l = 1{,}5$ м. Определить реакции заделки.



К задаче 3.14

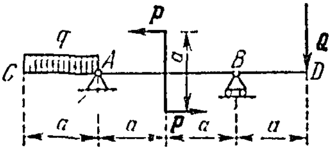


К задаче 3.15

Ответ. $R = 5$ кН, $M = 5{,}25$ кН·м.

3.15(3.15). На консольную горизонтальную балку действует пара сил с моментом $M = 6$ кН·м, а в точке C вертикальная нагрузка $P = 2$ кН. Длина пролета балки $AB = 3{,}5$ м, вынос консоли $BC = 0{,}5$ м. Определить реакции опор.

Ответ. $R_A = 2$ кН — вниз, $R_B = 4$ кН — вверх.



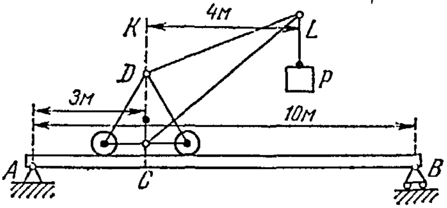
К задаче 3.16

3.16(3.16). На двухконсольную горизонтальную балку действует пара сил $(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{P})$, на левую консоль — равномерно распределенная нагрузка интенсивности q, а в точке D правой консоли — вертикальная нагрузка $\boldsymbol{Q}$. Определить реакции опор, если $P = 1$ кН, $Q = 2$ кН, $q = 2$ кН/м, $a = 0{,}8$ м.

Ответ. $R_A = 1{,}5$ кН, $R_B = 2{,}1$ кН.

3.17(3.17). На балке AB длины 10 м уложен путь для подъемного крана. Вес крана равен 50 кН, и центр тяжести его находится на оси CD; вес груза P равен 10 кН; вес балки AB равен 30 кН; вылет крана $KL = 4$ м; расстояние $AC = 3$ м. Найти опорные реакции в точках A и B для такого положения крана, когда стрелка крана DL находится в одной вертикальной плоскости с балкой AB.

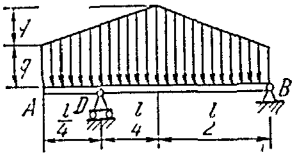
Ответ. $R_A = 53$ кН, $R_B = 37$ кН.



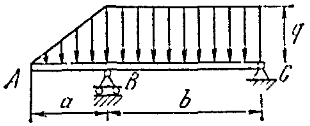
К задаче 3.17

3.18(3.18). Балка AB длины l м несет распределенную нагрузку, показанную на рисунке. Интенсивность нагрузки равна q Н/м на концах A и B балки и $2q$ Н/м в середине балки. Пренебрегая весом балки, найти реакции опор D и B.

Ответ: $R_D = ql$ Н, $R_B = 0{,}5ql$ Н.



К задаче 3.18



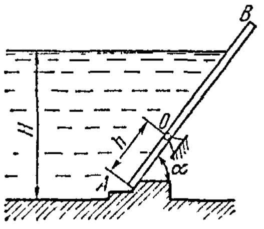
К задаче 3.19

3.19(3.19). Горизонтальная балка AC, опертая в точках B и C, несет между опорами B и C равномерно распределенную нагрузку интенсивности q Н/м; на участке AB интенсивность нагрузки уменьшается по линейному закону до нуля. Найти реакции опор B и C, пренебрегая весом балки.

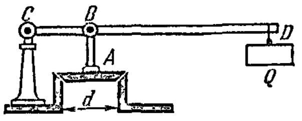
Ответ. $R_B = \frac{q}{6}\left(3a + 3b + \frac{a^2}{b}\right)$ Н, $R_C = \frac{q}{6}\left(3b - \frac{a^2}{b}\right)$ Н.

3.20(3.20). Прямоугольный щит AB ирригационного канала может вращаться относительно оси O. Если уровень воды невысок, щит закрыт, но, когда вода достигает некоторого уровня H, щит поворачивается вокруг оси и открывает канал. Пренебрегая трением и весом щита, определить высоту H, при которой открывается щит.

Ответ. $H = 3h \sin\alpha$.



К задаче 3.20



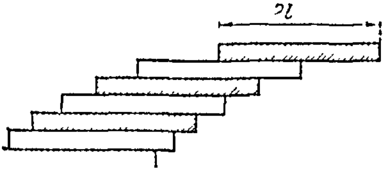
К задаче 3.21

3.21(3.21). Предохранительный клапан A парового котла соединен стержнем AB с однородным рычагом CD длины 50 см и веса 10 Н, который может вращаться вокруг неподвижной оси C;

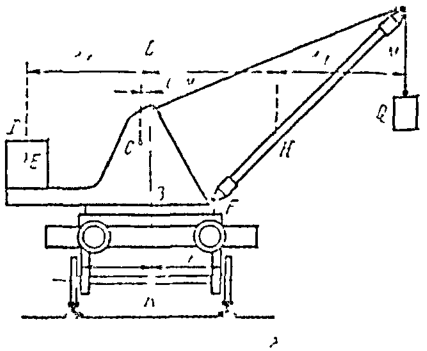
диаметр клапана $d = 6$ см, плечо $BC = 7$ см. Какой груз Q нужно подвесить к концу D рычага для того, чтобы клапан сам открывался при давлении в котле, равном 1100 кПа?

Ответ $Q = 430$ Н.

3.22(3.22). Несколько одинаковых однородных плит длины $2l$ сложены так, что часть каждой плиты выступает над плитой нижележащей. Определить предельные длины выступающих частей, при которых плиты будут находиться в равновесии.



К задаче 3.22



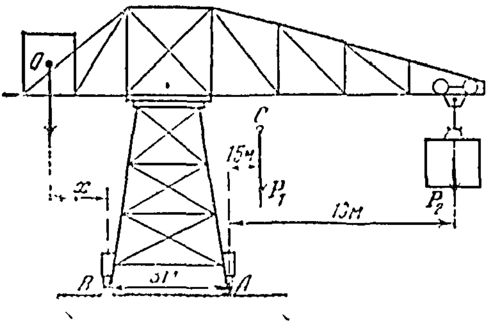
К задаче 3.23

При решении складываются последовательно веса плит, начиная с верхней.

Ответ: $l,\ \frac{1}{2}l,\ \frac{1}{3}l,\ \frac{1}{4}l,\ \frac{1}{5}l$ и т. д.

3.23(3.23). Железнодорожный кран опирается на рельсы, расстояние между которыми равно 1,5 м. Вес тележки крана равен 30 кН, центр тяжести ее находится в точке A, лежащей на линии KL пересечения плоскости симметрии тележки с плоскостью рисунка. Вес лебедки B крана равен 10 кН, центр тяжести ее лежит в точке C на расстоянии 0,1 м от прямой KL. Вес противовеса D равен 20 кН, центр тяжести его лежит в точке E на расстоянии 1 м от прямой KL. Вес укосины FG равен 5 кН, и центр тяжести ее находится в точке H на расстоянии 1 м от прямой KL. Вылет крана $LM = 2$ м. Определить наибольший груз Q, который не опрокинет крана.

Ответ $Q = 51,8$ кН.

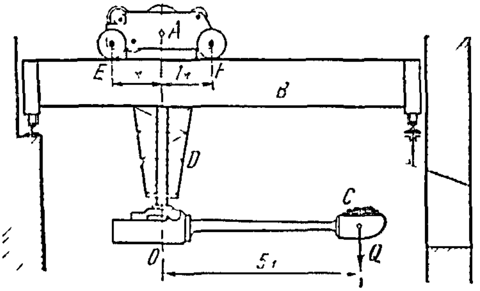


К задаче 3.24

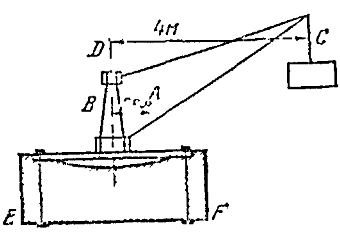
3.24(3.24). Центр тяжести передвижного рельсового крана, вес которого (без противовеса) равен $P_1 = 500$ кН, находится в точке C, расстояние которой от вертикальной плоскости, проходящей через правый рельс, равно 1,5 м. Крановая тележка рассчитана на подъем груза $P_2 = 250$ кН; вылет ее равен 10 м. Определить наименьший вес Q и наибольшее расстояние x центра тяжести противовеса от вертикальной плоскости, проходящей через левый рельс B так, чтобы кран не опрокинулся при всех положениях тележки как нагруженной, так и ненагруженной. Собственным весом тележки пренебречь.

Ответ. $Q = 333$ кН, $x = 6{,}75$ м.

3.25(3.25). Кран для загрузки материалов в мартеновскую печь состоит из лебедки A, ходящей на колесах по рельсам, уложенным на балках передвижного моста B. К нижней части лебедки прикреплена опрокинутая колонна D, служащая для укрепления лопаты C. Какой вес P должна иметь лебедка с колонной, чтобы



К задаче 3.25



К задаче 3.26

груз $Q = 15$ кН, помещенный на лопате на расстоянии 5 м от вертикальной оси OA лебедки, не опрокидывал ее? Центр тяжести лебедки расположен на оси OA, расстояние каждого колеса от оси OA равно 1 м.

Ответ. $P \geqslant 60$ кН.

3.26(3.26). Подъемный кран установлен на каменном фундаменте. Вес крана $Q = 25$ кН и приложен в центре тяжести A на расстоянии $AB = 0{,}8$ м от оси крана, вылет крана $CD = 4$ м. Фундамент имеет квадратное основание, сторона которого $EF = 2$ м; удельный вес кладки 20 кН/м^3. Вычислить наименьшую глубину фундамента, если кран предназначен для подъема тяжестей до 30 кН, причем фундамент должен быть рассчитан на опрокидывание вокруг ребра F.

Ответ. 1,06 м.

3.27(3.27). Магнитная стрелка подвешена на тонкой проволоке и установлена горизонтально в магнитном меридиане. Горизонтальные составляющие силы земного магнитного поля, действующие на полюсы стрелки в противоположных направлениях, равны каждая 0,02 мН, расстояние между полюсами 10 см. На какой угол нужно закрутить проволоку, чтобы стрелка составила угол 30° с магнитным меридианом, если известно, что для закручивания проволоки на угол 1° нужно приложить пару, момент которой равен 0,05 мН·см?

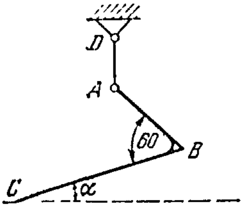
Момент закручивающей пары пропорционален углу закручивания.

Ответ: 32°.

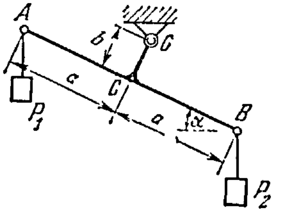
3.28(3.28). Два однородных стержня AB и BC одинакового поперечного сечения, из которых AB вдвое короче BC, соединенные своими концами под углом 60°, образуют ломаный рычаг ABC. У конца A рычаг подвешен на нити AD. Определить угол α наклона стержня BC к горизонту при равновесии рычага; поперечными размерами стержней пренебречь.

Ответ: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{5}\sqrt{3}$, $\alpha = 19°5'$.

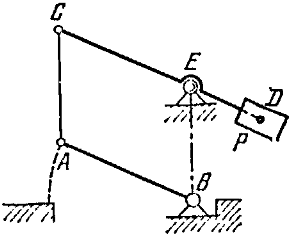
3.29(3.29). Два стержня AB и OC, вес единицы длины которых равен $2p$, скреплены под прямым углом в точке C. Стержень OC



К задаче 3.28



К задаче 3.29



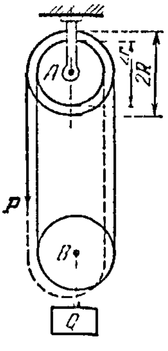
К задаче 3.30

может вращаться вокруг горизонтальной оси O; $AC = CB = a$, $OC = b$. В точках A и B подвешены гири, веса которых P_1 и P_2; $P_2 > P_1$. Определить угол α наклона стержня AB к горизонту в положении равновесия.

Ответ: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}\,\frac{P - P_1}{P + P_1 + p(1a + b)}$

3.30(3.30). Подъемный мост AB поднимается посредством двух брусьев CD длины 8 м, веса 4 кН, по одному с каждой стороны моста; длина моста $AB = CE = 5$ м; длина цепи $AC = BE$; вес моста 30 кН и может считаться приложенным в середине AB. Рассчитать вес противовесов P, уравновешивающих мост.

Ответ. $P = 13{,}83$ кН.



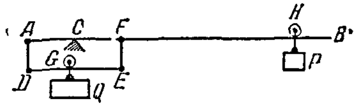
К задаче 3.31

3.31(3.31). Главную часть дифференциального блока составляют два неизменно связанных между собой шкива A, ось которых подвешена к неподвижному крюку. Желоба их снабжены зубцами, захватывающими бесконечную цепь, образующую две петли, в одну из которых помещен подвижной блок B. К подвижному блоку подвешен поднимаемый груз Q, а к свисающей с большого блока ветви свободной петли приложено усилие P. Радиусы шкивов A суть R и r, причем $r < R$. Требуется найти зависимость усилия P от величины поднимаемого груза Q и определить это усилие в случае: $Q = 500$ Н, $R = 25$ см, $r = 24$ см. Трением пренебречь.

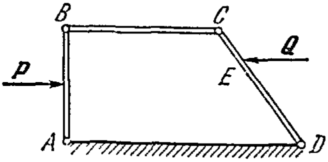
Ответ: $P = \frac{1}{2}Q\left(1 - \frac{r}{R}\right) = 10$ Н.

3.32(3.32). Дифференциальный рычаг состоит из стержня AB, имеющего неподвижную опорную призму в точке C, и перекладины DE, соединенной с рычагом AB посредством шарнирных серег AD и EF. Груз $Q = 1$ кН подвешен к перекладине в точке G посредством призмы. Расстояние между вертикалями, проведенными через точки C и G, равно 1 мм. Определить вес гири P, которую нужно подвесить к рычагу AB в точке H на расстоянии $CH = 1$ м для того, чтобы уравновесить груз Q. Трением пренебречь.

Ответ: $P = 10$ Н.



К задаче 3.32

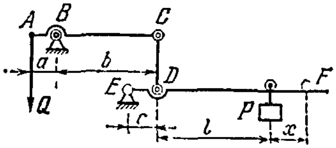


К задаче 3.33

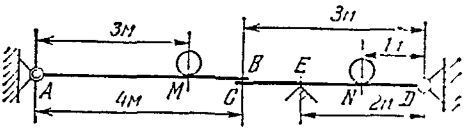
3.33(3.33). В шарнирном четырехзвенном механизме звено BC параллельно неподвижному звену AD. Звено $AB = h$ перпендикулярно AD. Посредине AB приложена горизонтальная сила $\boldsymbol{P}$. Какую горизонтальную силу $\boldsymbol{Q}$ следует приложить к звену CD в точке E, если $CE = CD/4$, чтобы механизм был в равновесии? Найти реакцию в шарнире D. Весом звеньев пренебречь.

Ответ: $Q = {}^2/_3P$, $R_D = {}^1/_6P$ и направлена по AD вправо.

3.34(3.34). Для измерения больших усилий Q устроена система двух неравноплечих рычагов ABC и EDF, соединенных между собой тяжем CD. В точках B и E имеются неподвижные опоры. По рычагу EDF может передвигаться груз P веса 125 Н. Сила $\boldsymbol{Q}$, приложенная в точке A, уравновешивается этим грузом, помещенным на расстоянии l от точки D.



К задаче 3.34



К задаче 3.35

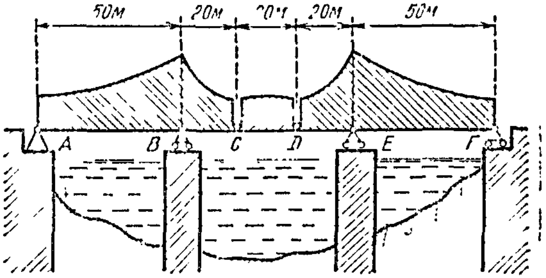
На какую длину x надо передвинуть для сохранения равновесия груз P при увеличении силы Q на 10 кН, если указанные на рисунке размеры соответственно равны $a = 3{,}3$ мм, $b = 660$ мм, $c = 50$ мм?

Ответ: $x = 2$ см.

3.35(3.35). Балка AB длины 4 м, веса 2 кН может вращаться вокруг горизонтальной оси A и опирается концом B на другую балку CD длины 3 м, веса 1,6 кН, которая подперта в точке E и соединена со стеной шарниром D. В точках M и N помещены грузы по 0,8 кН каждый. Расстояния: $AM = 3$ м, $ED = 2$ м, $ND = 1$ м. Определить опорные реакции.

Ответ $R_A = 1{,}2$ кН, $R_B = 1{,}6$ кН, $R_E = 1$ кН, $R_D = 0$

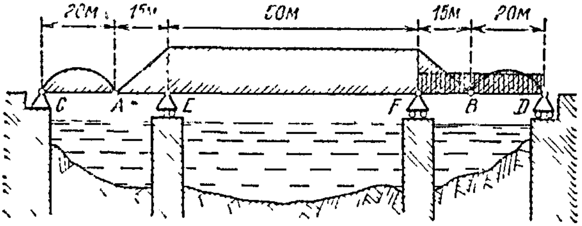
3.36(3.36). Консольный мост состоит из трех частей: AC, CD и DF, из которых крайние опираются каждая на две опоры. Размеры соответственно равны $AC = DF = 70$ м, $CD = 20$ м,



К задаче 3.36

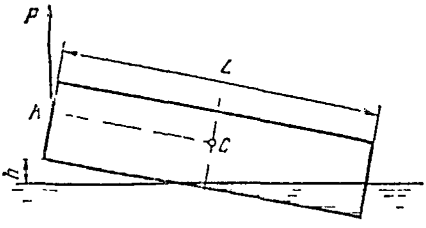
$AB = EF = 50$ м. Погонная нагрузка на мост равна 60 кН/м. Найти давления на опоры A и B, производимые этой нагрузкой.

Ответ. $N_A = 1020$ кН, $N_B = 3780$ кН.



К задаче 3.37

3.37(3.37). Консольный мост состоит из главной фермы AB и двух боковых ферм AC и BD. Собственный вес, приходящийся на погонный метр фермы AB, равен 15 кН, а для ферм AC и BD равен 10 кН. Определить реакции всех опор в тот момент, когда весь правый пролет FD занят поездом, вес которого можно заменить равномерно распределенной по пролету FD нагрузкой интенсивности 30 кН на погонный метр. Размеры соответственно равны $AC = BD = 20$ м, $AE = BF = 15$ м; $EF = 50$ м.



К задаче 3.38

Ответ $R_C = 100$ кН, $R_D = 400$ кН, $R_E = 512{,}5$ кН, $R_F = 1607{,}5$ кН

3.38. Для осмотра на плаву днища понтона водоизмещением $D = 2000$ кН его носовая оконечность поднимается краном грузоподъемности $P = 750$ кН. Принимая удельный вес воды $\gamma =$

$= 10$ кН/м³, определить наибольший подъем днища над уровнем воды h, если понтон имеет форму прямоугольного параллелепипеда длины $L = 20$ м, ширины $B = 10$ м. Центр тяжести понтона C лежит посредине его длины. Точка K крепления троса подъемного крана и центр тяжести C находятся на одинаковом расстоянии от днища понтона. (Водоизмещение судна численно равно его весу.)

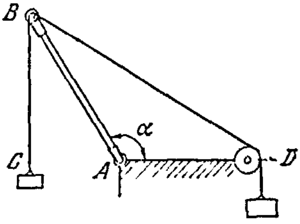
Ответ: $h = 1{,}36$ м.

§ 4. Произвольная плоская система сил

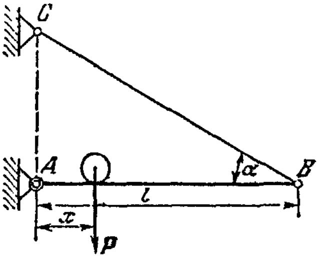
4.1(4.1). К однородному стержню AB, который может вращаться вокруг шарнира A, подвешена в точке B на веревке гиря C веса в 10 Н. От конца стержня B протянут трос, перекинутый через блок D и поддерживающий гирю веса в 20 Н. Найти величину угла $BAD = \alpha$, при котором стержень будет находиться в положении равновесия, зная, что $AB = AD$ и вес стержня 20 Н. Трением на блоке пренебречь.

Ответ: $\alpha = 120°$.

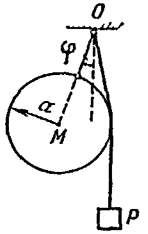
4.2(4.2). Горизонтальная балка крана, длина которой равна l, у одного конца укреплена шарнирно, а у другого конца B подвешена к стене посредством тяги BC, угол наклона которой к горизонту равен α. По балке может перемещаться груз P, положение которого определяется переменным расстоянием x до шарнира A. Определить натяжение T тяги BC в зависимости от положения груза. Весом балки пренебречь.



К задаче 4.1



К задаче 4.2



К задаче 4.3

Ответ: $T = \dfrac{Px}{l \sin \alpha}$.

4.3(4.3). Однородный шар веса Q и радиуса a и гиря веса P подвешены на веревках в точке O, как показано на рисунке. Расстояние $OM = b$. Определить, какой угол φ образует прямая OM с вертикалью при равновесии.

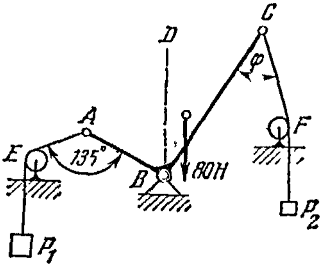
Ответ: $\sin \varphi = \dfrac{a}{b} \dfrac{P}{P + Q}$.

4.4(4.4). Ломаный рычаг ABC, имеющий неподвижную ось B, весит 80 Н, плечо $AB = 0{,}4$ м, плечо $BC = 1$ м, центр тяжести рычага находится на расстоянии 0,212 м от вертикальной прямой BD. В точках A и C привязаны веревки, перекинутые через блоки E и

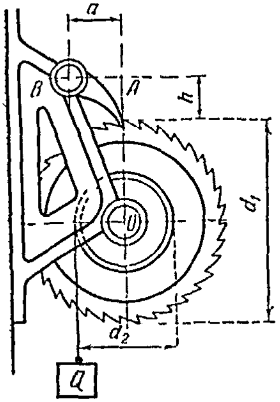
F и натягиваемые нитями веса $P_1 = 310$ Н и $P_2 = 100$ Н. Пренебрегая трением на блоках, определить угол $BCF = \varphi$ в положении равновесия, если угол $BAE = 135°$.

Ответ: $\varphi_1 = 45°$, $\varphi_2 = 135°$.

4.5(4.5). Лебедка снабжена храповым колесом диаметра d_1 с собачкой A. На барабан диаметра d_2, неподвижно скрепленный с колесом, намотан трос, поддерживающий груз Q. Определить давление R на ось B собачки, если дано $Q = 50$ Н, $d_1 = 420$ мм, $d_2 = 240$ мм, $h = 50$ мм, $a = 120$ мм. Весом собачки пренебречь.



К задаче 4.4

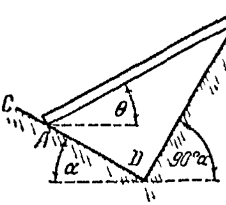


К задаче 4.5

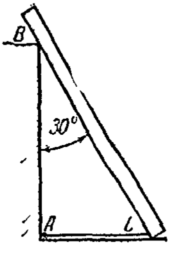
Ответ: $R = Q\dfrac{d_2}{d_1}\dfrac{\sqrt{a^2+h^2}}{a} = 31$ Н.

4.6(4.6). Однородная балка AB веса P опирается на две гладкие наклонные прямые CD и DE, находящиеся в вертикальной плоскости; угол наклона первой из них к горизонту равен α, второй $90° - \alpha$. Найти угол θ наклона балки к горизонту в положении равновесия и давления ее на опорные прямые.

Ответ: $N_A = P\cos\alpha$, $N_B = P\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\theta = \operatorname{ctg}2\alpha$, $\theta = 90° - 2\alpha$ при $\alpha \leqslant 45°$.



К задаче 4.6



К задаче 4.7

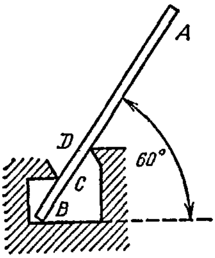
4.7(4.7). Однородная балка веса 600 Н и длины 4 м опирается одним концом на гладкий пол, а промежуточной точкой B — на столб высоты 3 м, образуя с вертикалью угол 30°. Балка удерживается в таком положении веревкой AC, протянутой по полу. Пренебрегая трением, определить натяжение веревки T и реакции R_B столба и R_C пола.

Ответ. $T = 150$ Н, $R_B = 173$ Н, $R_C = 513$ Н.

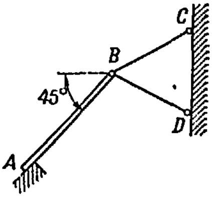
4.8(4.8). Однородная балка AB веса 200 Н опирается на гладкий горизонтальный пол в точке B под углом 60° и, кроме того, поддерживается двумя опорами C и D Определить реакции опор в точках B, C и D, если длина $AB = 3$ м, $CB = 0{,}5$ м, $BD = 1$ м.

Ответ. $R_B = 200$ Н, $R_C = 300$ Н, $R_D = 300$ Н

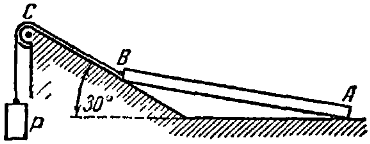
4.9(4.9). Однородная плита AB веса $P = 100$ Н свободно опирается в точке A и удерживается под углом 45° к горизонту двумя стержнями BC и BD. BCD — равносторонний треугольник. Точки C и D лежат на вертикальной прямой CD Пренебрегая весом стержней и считая крепления в точках B, C и D шарнирными, определить реакцию опоры A и усилия в стержнях



К задаче 4.8



К задаче 4.9



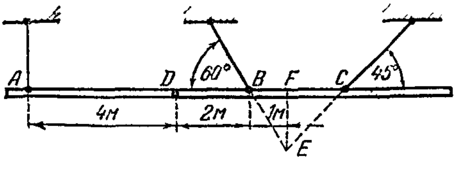
К задаче 4.10

Ответ. $R_A = 35{,}4$ Н, $S_C = 89{,}5$ Н, $S_D = -60{,}6$ Н

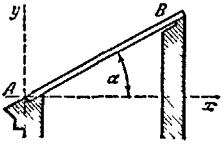
4.10(4.10). Однородный стержень AB веса 100 Н опирается одним концом на гладкий горизонтальный пол, другим — на гладкую плоскость, наклоненную под углом 30° к горизонту У конца B стержень поддерживается веревкой, перекинутой через блок C и несущей груз P; часть веревки BC параллельна наклонной плоскости. Пренебрегая трением на блоке, определить груз P и силы давления N_A и N_B на пол и на наклонную плоскость

Ответ. $P = 25$ Н; $N_A = 50$ Н, $N_B = 43{,}3$ Н.

4.11(4.11). При сборке моста пришлось поднимать часть мостовой фермы ABC тремя канатами, расположенными, как указано на рисунке. Вес этой части фермы 42 кН, центр тяжести находится в точке D. Расстояния соответственно равны $AD = 4$ м, $DB = 2$ м, $BF = 1$ м. Найти натяжения канатов, если прямая AC горизонтальна



К задаче 4.11



К задаче 4.12

Ответ: $T_A = 18$ кН, $T_B = 17{,}57$ кН, $T_C = 12{,}43$ кН.

4.12(4.12). Стропила односкатной крыши состоят из бруса AB, у верхнего конца B свободно лежащего на гладкой опоре, а нижним концом A упирающегося в стену. Наклон крыши $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}5$;

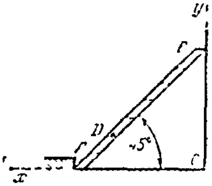
на брус AB приходится вертикальная нагрузка 9 кН, приложенная в середине бруса. Определить реакции опор в точках A и B.

Ответ: $X_A = 1{,}8$ кН, $Y_A = 5{,}4$ кН, $R_B = 4{,}02$ кН.

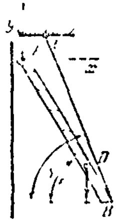
4.13(4.13). К гладкой стене прислонена однородная лестница AB под углом 45° к горизонту, вес лестницы 200 Н; в точке D на расстоянии, равном 1/3 длины лестницы, от нижнего конца находится человек веса 600 Н. Найти силы давления лестницы на опору A и на стену.

Ответ: $X_A = 300$ Н, $Y_A = -800$ Н, $X_B = -300$ Н.

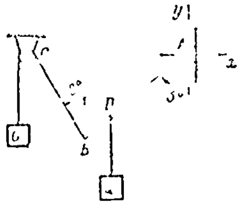
4.14(4.14). На подъемной однородной лестнице длины 6 м и веса 2,4 кН, которая может вращаться вокруг горизонтальной оси



К задаче 4.13



К задаче 4.14



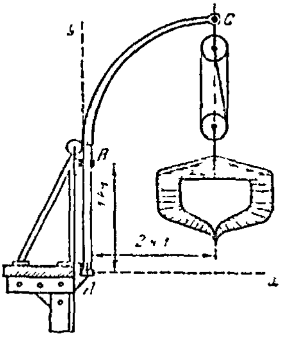
К задаче 4.15

A и наклонена под углом 60° к горизонту, в точке D стоит человек веса 0,8 кН на расстоянии 2 м от конца B. У конца B лестница поддерживается веревкой BC, наклоненной под углом 75° к горизонту. Определить натяжение T веревки и реакцию A оси.

Ответ: $T = 3{,}35$ кН, $X_A = 0{,}867$ кН, $Y_A = -0{,}034$ кН.

4.15(4.15). Однородная балка AB веса $P = 100$ Н прикреплена к стене шарниром A и удерживается под углом 45° к вертикали при помощи троса, перекинутого через блок и несущего груз G. Ветвь BC троса образует с вертикалью угол 30°. В точке D к балке подвешен груз Q веса 200 Н. Определить вес груза G и реакцию шарнира A, пренебрегая трением на блоке, если $BD = {}^1/_4\, AB$.

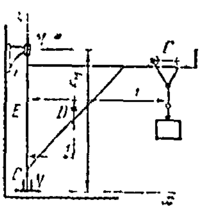
Ответ: $G = 146$ Н, $X_A = 73$ Н, $Y_A = 173$ Н.



К задаче 4.16

4.16(4.16). Шлюпка висит на двух шлюпбалках, причем вес ее, равный 9,6 кН, распределяется между ними поровну. Шлюпбалка ABC нижним полусферическим концом опирается на подпятник A и на высоте 1,8 м над ним свободно проходит через подшипник B; вылет шлюпбалки равен 2,4 м. Пренебрегая весом шлюпбалки, определить силы давления ее на опоры A и B.

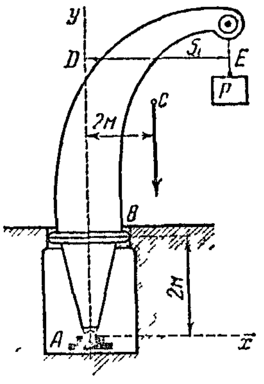
Ответ: $X_A = -6{,}4$ кН, $Y_A = -4{,}8$ кН, $X_B = 6{,}4$ кН.



К задаче 4.17

4.17(4.17). Литейный кран ABC имеет вертикальную ось вращения MN, расстояния $MN = 5$ м, $AC = 5$ м, вес крана 20 кН, центр тяжести его D находится от оси вращения на расстоянии 2 м, вес груза, подвешенного в точке C, равен 30 кН. Найти реакции подшипника M и подпятника N.

Ответ: $X_M = -38$ кН, $X_N = 38$ кН, $Y_N = 50$ кН.



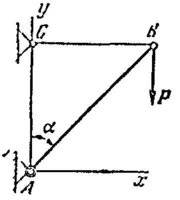
К задаче 4.18

4.18(4.18). Кран в шахте, поднимающий груз $P = 40$ кН, имеет подпятник A и в точке B опирается на гладкую цилиндрическую поверхность, ось которой Ay вертикальна. Длина хвоста AB равна 2 м. Вылет крана $DE = 5$ м. Вес крана равен 20 кН и приложен в точке C, расстояние которой от вертикали Ay равно 2 м. Определить реакции опор A и B.

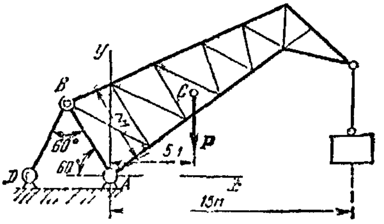
Ответ: $X_A = 120$ кН, $Y_A = 60$ кН, $X_B = -120$ кН.

4.19(4.19). Кран для подъема тяжестей состоит из балки AB, нижний конец которой соединен со стеной шарниром A, а верхний удерживается горизонтальным тросом BC. Определить натяжение T троса BC и давление на опору A, если известно, что вес груза $P = 2$ кН, вес балки AB равен 1 кН и приложен в середине балки, а угол $\alpha = 45°$.

Ответ: $T = 2{,}5$ кН, $X_A = -2{,}5$ кН, $Y_A = -3$ кН.



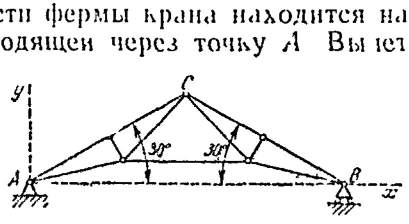
К задаче 4.19



К задаче 4.20

4.20(4.20). Кран имеет шарниры в точках A, B и D, причем $AB = AD = BD = 8$ м. Центр тяжести фермы крана находится на расстоянии 5 м от вертикали, проходящей через точку A. Вылет крана, считая от точки A, при этом равен 15 м. Поднимаемый груз весит 200 кН, вес фермы $P = 120$ кН. Определить опорные реакции и натяжение стержня BD для указанного положения крана.

Ответ: $X_A = 260$ кН, $Y_A = 770$ кН, $T = 520$ кН.

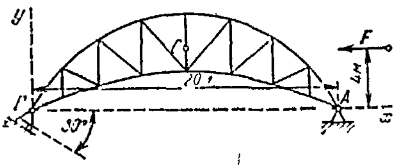


К задаче 4.21

4.21(4.21). Симметричная стропильная ферма ABC у одного конца шарнирно укреплена в неподвижной точке A, а у другого конца B опирается катками на гладкую горизонтальную пло скость. Вес фермы 100 кН. Сторона AC находится под равномерно распределенным, перпендикулярным ей давлением ветра; равнодействующая сил давления ветра равна 8 кН. Длина $AB = 6$ м, угол $CAB = 30°$. Определить опорные реакции.

Ответ: $X_A = -1$ кН, $Y_A = 54{,}6$ кН, $Y_B = 52{,}3$ кН.

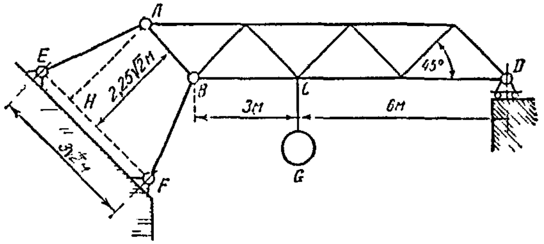
4.22(4.22). Арочная ферма имеет неподвижный опорный шарнир в точке A, в точке B — подвижную гладкую опору, плоскость которой наклонена к горизонту под углом 30°. Пролет $AB = 20$ м. Центр тяжести фермы, вес которой вместе со снеговой нагрузкой равен 100 кН, находится в точке C, расположенной над серединой пролета AB. Равнодействующая сил давления ветра F равна 20 кН и направлена параллельно AB, линия ее действия отстоит от AB на 4 м. Определить опорные реакции.



К задаче 4.22

Ответ: $X_A = -11{,}2$ кН, $Y_A = 46$ кН, $R_B = 62{,}4$ кН.

4.23(4.23). Ферма $ABCD$ в точке D опирается на катки, а в точках A и B поддерживается наклонными стержнями AE и BF, шарнирно укрепленными в точках E и F. Раскосы фермы и прямая EF



К задаче 4.23

наклонены к горизонту под углом 45°; длина панели $BC = 3$ м; стержни AE и BF одинаковой длины, расстояние $EF = 3\sqrt{2}$ м; $AH = 2{,}25\sqrt{2}$ м. Вес фермы и нагрузки равен 75 кН и направлен по прямой CG. Найти реакцию катков R_D.

Ответ: $R_D = 15$ кН.

4.24(4.24). Давление воды на маленькую площадку плотины возрастает пропорционально расстоянию ее от свободной поверхности воды и равно весу столба воды, высота которого равна этому расстоянию, а площадь основания равна взятой площадке. Определить толщину плотины в ее основании в двух случаях:

1) когда поперечное сечение плотины прямоугольное,

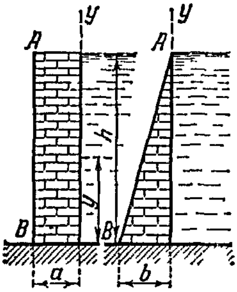
2) когда это сечение треугольное.

Плотина должна быть рассчитана на опрокидывание вокруг ребра B давлением воды, причем коэффициент устойчивости должен быть равен 2. Высота h плотины такая же, как глубина воды, и равна 5 м. Удельный вес воды $\gamma = 10$ кН/м^3, удельный вес материала плотины $\gamma_1 = 22$ кН/м^3.

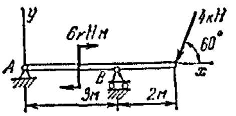
Коэффициентом устойчивости называется отношение момента веса массива к моменту опрокидывающей силы. Давление воды на площадку плотины длиной 1 м и высотой dy, где y — расстояние площадки от дна в метрах, равно в килоньютонах $\gamma(h-y)dy$. Момент этого давления относительно точки B равен $\gamma(h-y)y\,dy$. Опрокидывающий момент равен $\int\limits_0^h \gamma(h-y)\,y\,dy$.

Ответ: $a = 2{,}75$ м; $b = 3{,}37$ м.

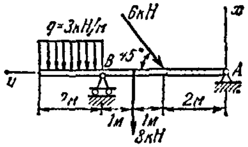
4.25(4.25). Определить реакции опор A и B балки, находящейся под действием одной сосредоточенной силы и пары сил. Нагрузка и размеры указаны на рисунке



К задаче 4.24



К задаче 4.25



К задаче 4.26

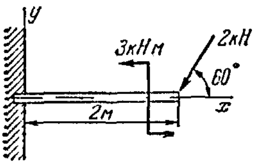
Ответ: $X_A = 2$ кН, $Y_A = -4{,}32$ кН, $Y_B = 7{,}78$ кН.

4.26(4.26). Определить реакции опор A и B балки, находящейся под действием двух сосредоточенных сил и равномерно распределенной нагрузки. Интенсивность распределенной нагрузки, величины сил и размеры указаны на рисунке.

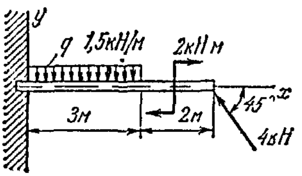
Ответ. $X_A = 2{,}6$ кН, $Y_A = 4{,}2$ кН, $X_B = 15{,}6$ кН.

4.27(4.27). Определить реакции заделки консольной балки, изображенной на рисунке и находящейся под действием сосредоточенной силы и пары сил.

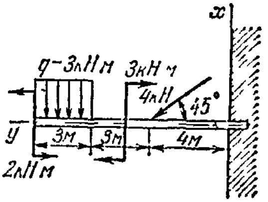
Ответ. $X = 1$ кН, $Y = 1{,}73$ кН, $M = 0{,}47$ кН·м.



К задаче 4.27



К задаче 4.28



К задаче 4.29

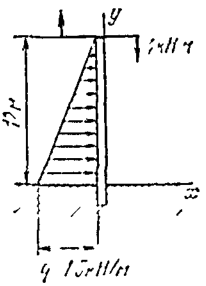
4.28(4.28). Определить реакции заделки консольной балки, изображенной на рисунке и находящейся под действием равномерно распределенной нагрузки, сосредоточенной силы и пары сил.

Ответ. $X = 2{,}8$ кН, $Y = 1{,}7$ кН, $M = -5{,}35$ кН·м.

4.29(4.29). Определить реакции заделки консольной балки, изображенной на рисунке и находящейся под действием равномерно распределенной нагрузки, одной сосредоточенной силы и двух пар сил

Ответ. $X = 11{,}8$ кН, $Y = -2{,}8$ кН, $M = -86{,}8$ кН·м.

4.30(4.30). Определить реакции заделки консольной балки, изображенной на рисунке и находящейся под действием пары сил и распределенной нагрузки, изменяющейся по закону треугольника.



К задаче 4.30

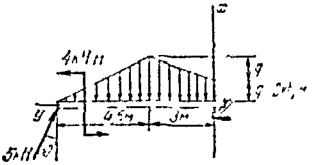
Ответ. $X = -9$ кН, $Y = 0$, $M = 40$ кН·м.

4.31(4.31). Определить реакцию заделки консольной балки, изображенной на рисунке и находящейся под действием сосредоточенной силы, пары сил и распределенной нагрузки, изменяющейся по закону треугольника и трапеции.

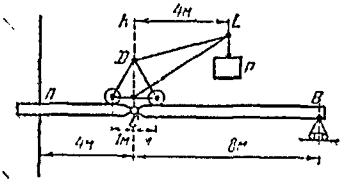
Ответ. $X = 137$ кН, $Y = 25$ кН, $M = -270$ кН·м.

4.32(3.38). Горизонтальная разрезная балка ACB у конца A заделана в стену, у конца B опирается на подвижную опору, в точке C — шарнир. Балка загружена краном, несущим груз P веса 10 кН, вылет $KL = 4$ м, вес крана $Q = 50$ кН, центр тяжести крана лежит на вертикали CD. Размеры указаны на рисунке. Определить, пренебрегая весом балки, опорные реакции в точках A и B для такого положения крана, когда он находится в одной вертикальной плоскости с балкой AB.

Ответ. $R_A = 53{,}75$ кН, $R_B = 6{,}25$ кН, $M_A = 205$ кН.



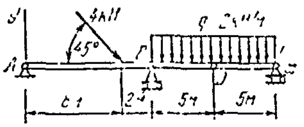
К задаче 4.31



К задаче 4.32

4.33(4.32). Определить реакции опор A, B, C и шарнира D составной балки, изображенной на рисунке вместе с нагрузкой.

Ответ. $X_A = -2{,}8$ кН, $Y_A = -1{,}4$ кН, $Y_B = 22{,}2$ кН, $Y_C = 5$ кН, $X_D = 0$, $Y_D = \pm 5$ кН.



К задаче 4.33

К задаче 4.34

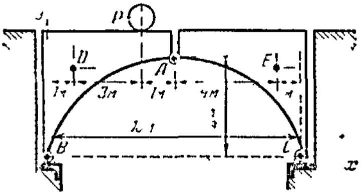
4.34(4.33). Определить реакции опор A, B, C и шарнира D составной балки, изображенной на рисунке вместе с нагрузкой.

Ответ. $X_A = 3$ кН, $Y_A = 13{,}8$ кН; $Y_B = -6{,}6$ кН, $Y_C = 10$ кН, $X_D = 0$, $Y_D = \pm 5$ кН.

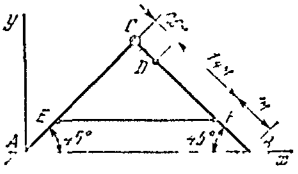
4.35(4.34). Мост состоит из двух частей, связанных между собой шарниром A и прикрепленных к береговым устоям шарнирами B и C. Вес каждой части моста 40 кН, их центры тяжести D и E;

на мосту находится груз $P = 20$ кН; размеры указаны на рисунке. Определить силу давления в шарнире A и реакции в точках B и C.

Ответ: $X_A = \pm 20$ кН, $Y_A = \mp 8$ кН, $X_B = -X_C = 20$ кН, $Y_B = 52$ кН, $Y_C = 48$ кН



К задаче 4.35



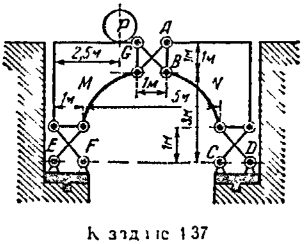
К задаче 4.36

4.36(4.35). На гладкой горизонтальной плоскости стоит передвижная лестница, состоящая из двух частей AC и BC, длины 3 м, веса 120 Н каждая, соединенных шарниром C и веревкой EF; расстояние $BF = AE = 1$ м, центр тяжести каждой из частей AC и BC находится в ее середине. В точке D на расстоянии $CD = 0{,}6$ м стоит человек, весящий 720 Н. Определить реакции пола и шарнира, а также натяжение T веревки EF, если угол $BAC = ABC = 45°$.

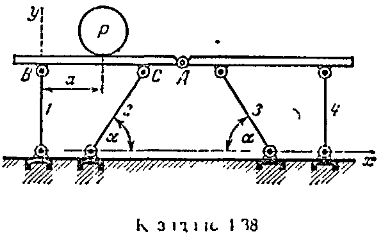
Ответ $R_A = 408$ Н, $R_B = 552$ Н, $X_C = \pm 522$ Н, $Y_C = \pm 288$ Н, $T = 522$ Н

4.37(4.36). Мост состоит из двух одинаковых частей M и N, соединенных между собой и с неподвижными опорами посредством шести стержней, наклоненных к горизонту под углом 45° и снабженных на концах шарнирами. Размеры указаны на рисунке. В точке G помещен груз веса P. Определить те усилия в стержнях, которые вызваны действием этого груза.

Ответ: $R_A = 0$, $R_B = P\sqrt{2}/3$, $R_C = 0$, $R_D = P\sqrt{2}/3$, $R_E = P\sqrt{2}/2$, $R_F = P\sqrt{2}/6$.



К задаче 4.37

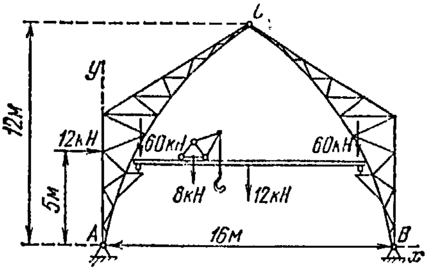


К задаче 4.38

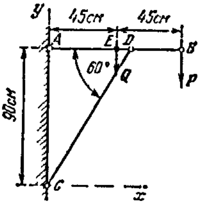
4.38(4.37). Мост состоит из двух одинаковых горизонтальных балок, соединенных шарниром A и прикрепленных шарнирно к основанию жесткими стержнями 1, 2, 3, 4, причем крайние стержни вертикальны, а средние наклонены к горизонту под углом $\alpha = 60°$. Соответствующие размеры равны $BC = 6$ м, $AB = 8$ м. Определить усилия в стержнях и реакцию шарнира A, если мост несет вертикальную нагрузку $P = 15$ кН на расстоянии $a = 4$ м от точки B.

Ответ $S_1 = -6{,}25$ кН, $S_2 = S_3 = -5{,}77$ кН, $S_4 = 1{,}25$ кН, $X_A = \pm 2{,}89$ кН, $Y_A = \mp 3{,}75$ кН

4.39(4.38). Вдоль мастерской, здание которой поддерживается трехшарнирной аркой, ходит по рельсам мостовой кран. Вес поперечной балки, передвигающейся по рельсам, 12 кН; вес крана 8 кН (кран не нагружен), линия действия веса крана отстоит от левого рельса на расстоянии 0,25 длины балки. Вес каждой половины арки равен 60 кН и приложен на расстоянии 2 м от вертикали, проходящей через соответствующую опору A или B; опорные рельсы мостового крана расположены на расстоянии 1,8 м от этих вертикалей. Высота здания 12 м, ширина пролета 16 м. Равнодействующая сил давления ветра равна 12 кН и направлена параллельно AB, линия ее действия отстоит от AB на 5 м. Определить реакции шарниров A и B и силу давления в шарнире C.



К задаче 4.39

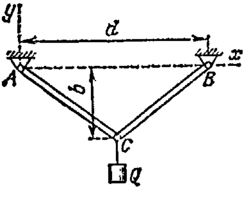


К задаче 4.40

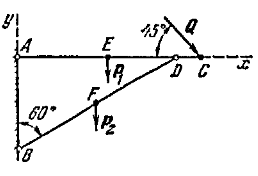
Ответ: $X_A = 2$ кН, $Y_A = 67{,}8$ кН, $X_B = -14$ кН, $Y_B = 72{,}2$ кН, $X_C = \pm 14$ кН, $Y_C = \mp 4{,}2$ кН

4.40(4.39). Груз $P = 25$ Н подвешен к концу горизонтального бруса AB. Вес бруса $Q = 10$ Н и приложен в точке E. Брус прикреплен к стенке посредством шарнира A и подперт стержнем CD, с которым скреплен тоже посредством шарнира. Весом стержня CD пренебрегаем. Размеры указаны на рисунке. Определить реакции шарниров A и C.

Ответ: $X_A = -30$ Н, $Y_A = -17$ Н, $R_C = 60$ Н



К задаче 4.41



К задаче 4.42

4.41(4.40). Два однородных бруса одинаковой длины соединены шарнирно в точке C, а в точках A и B также шарнирно прикреплены к опорам. Вес каждого бруса равен P. В точке C подвешен груз Q. Расстояние $AB = d$. Расстояние точки C до горизонтальной прямой AB равно b. Определить реакции шарниров A и B

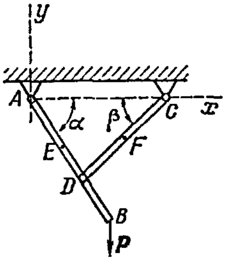
Ответ: $-X_A = X_B = \frac{d}{4b}(P + Q)$, $Y_A = Y_B = P + \frac{Q}{2}$

4.42(4.41). Два стержня AC и BD одинаковой длины шарнирно соединены в точке D и так же прикреплены к вертикальной стене в точках A и B. Стержень AC расположен горизонтально, стержень BD образует угол 60° с вертикальной стеной. Стержень AC в точке E нагружен вертикальной силой $P_1 = 40$ Н и в точке C силой $Q = 100$ Н, наклоненной к горизонту под углом 45°. Стержень BD в точке F нагружен вертикальной силой $P_2 = 40$ Н. Дано: $AE = EC$, $BF = FD$. Определить реакции шарниров A и B.

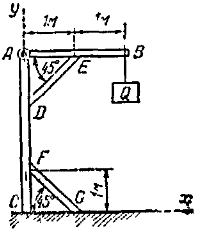
Ответ: $X_A = -287$ Н, $Y_A = 6$ Н, $X_B = 216$ Н, $Y_B = 145$ Н.

4.43(4.42). Подвеска состоит из двух балок AB и CD, соединенных шарнирно в точке D и прикрепленных к потолку шарнирами A и C. Вес балки AB равен 60 Н и приложен в точке E. Вес балки CD равен 50 Н и приложен в точке F. В точке B к балке AB приложена вертикальная сила $P = 200$ Н. Определить реакции в шарнирах A и C, если заданы следующие размеры: $AB = 1$ м, $CD = 0{,}8$ м; $AE = 0{,}4$ м, $CF = 0{,}4$ м; углы наклона балок AB и CD к горизонту соответственно равны: $\alpha = 60°$ и $\beta = 45°$.

Ответ: $-X_A = X_C = 135$ Н, $Y_A = 150$ Н, $Y_C = 160$ Н.



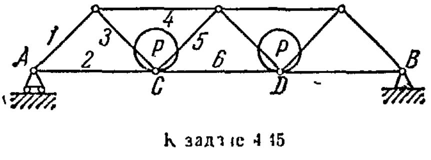
К задаче 4.43



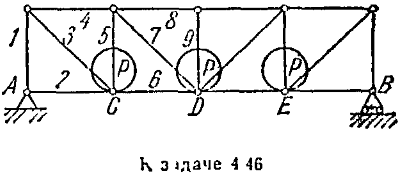
К задаче 4.44

4.44(4.43). Горизонтальная балка AB длины 2 м, прикрепленная к вертикальному столбу AC в точке A и подпертая подкосом DE, несет на конце груз Q веса 500 Н, столб AC укреплен подкосом FG, причем $AE = CG = 1$ м; подкосы DE и FG наклонены под углом 45° к горизонту. Найти усилия S_E и S_F в подкосах DE и FG и реакцию грунта в точке C, предполагая, что крепления шарнирные, и пренебрегая весом балки, столба и подкосов.

Ответ: $S_E = -1410$ Н, $S_F = -1410$ Н, $X_C = 1000$ Н, $Y_C = -500$ Н.



К задаче 4.45



К задаче 4.46

4.45(4.44). В мостовой ферме, изображенной на рисунке, на узлы C и D приходится одинаковая вертикальная нагрузка $P = 100$ кН; наклонные стержни составляют углы 45° с горизонтом. Найти усилия в стержнях *1*, *2*, *3*, *4*, *5* и *6*, вызываемые данной нагрузкой.

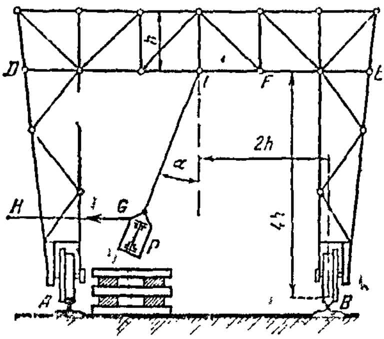
Ответ. $S_1 = -141$ кН, $S_2 = 100$ кН, $S_3 = 141$ кН, $S_4 = -200$ кН, $S_5 = 0$, $S_6 = 200$ кН.

4.46(4.45). В мостовой ферме, изображенной на рисунке, узлы C, D и E загружены одинаковой вертикальной нагрузкой $P =$

$= 100$ кН. Наклонные стержни составляют углы 45° с горизонтом. Найти усилия в стержнях *1*, *2*, *3*, *4*, *5*, *6*, *7*, *8* и *9*, вызываемые данной нагрузкой.

Ответ: $S_1 = -150$ кН, $S_2 = 0$, $S_3 = 212$ кН, $S_4 = -150$ кН, $S_5 = -50$ кН, $S_6 = 150$ кН, $S_7 = 71$ кН, $S_8 = -200$ кН, $S_9 = 0$.

4.47(4.46). Для сборки моста устроен временный деревянный кран, перемещающийся по рельсам *A* и *B* на колесах. К среднему узлу *C* нижнего пояса *DE* крана прикреплен блок, служащий для поднятия тяжести с помощью цепи. Вес поднимаемого с подмостей груза $P = 50$ кН, причем в момент отделения его от подмостей направление цепи составляет с вертикалью угол $\alpha = 20°$, во избежание колебаний груза он оттягивается горизонтальным канатом *GH*.



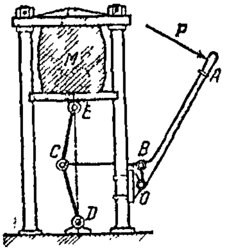
К задаче 4.47

Предполагая, что горизонтальная составляющая натяжения цепи воспринимается одним правым рельсом *B*, определить усилие S_1 в горизонтальном стержне *CF* в момент отделения груза от подмостей и сравнить его с тем усилием S_2, которое получилось бы при угле $\alpha = 0$. Размеры указаны на рисунке.

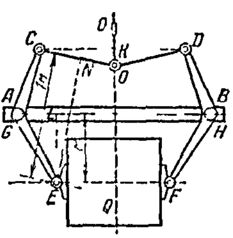
Ответ: $S_1 = 104{,}6$ кН, $S_2 = 50$ кН.

4.48(4.47). Найти величину усилия, сжимающего предмет *M* в прессе, при следующих условиях: усилие $P = 0{,}2$ кН и направлено перпендикулярно рычагу *OA*, имеющему неподвижную ось *O*, в рассматриваемом положении пресса тяж *BC* перпендикулярен *OB* и делит $\angle ECD$ пополам, причем $\angle CED = \operatorname{arctg} 0{,}2 = 11°20'$, длина $OA = 1$ м; $OB = 10$ см.

Ответ: 5 кН.



К задаче 4.48



К задаче 4.49

4.49(4.48). Цепь OO_1 самозахватывающего грузы приспособления соединена шарниром *O* со стержнями $OC = OD = 60$ см. Стержни соединены шарнирами же с двумя равными ломаными рычагами *CAE* и *DBF*, которые могут вращаться вокруг точек *A* и *B* соединительного стержня *GH*. В шарнирах *E* и *F* особые колодки удерживают груз $Q = 10$ кН трением. Расстояние точки *E* от стержня *GH* равно $EL = 50$ см, а расстояние ее от стержня *OC* равно $EN = 1$ м. Высота треугольника *COD* равна $OK = 10$ см. Найти силу, растягивающую соединительный стержень *GH*, пренебрегая весом частей механизма.

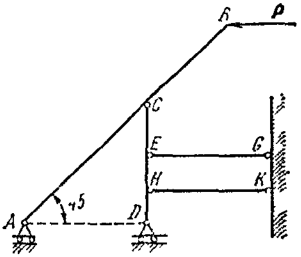
Ответ. 60 кН

4.50(4.49). Определить реакции шарниров A, C, D, E и H в стержневой системе, изображенной на рисунке, если $CE = EH = HD$ и $AC = CB$

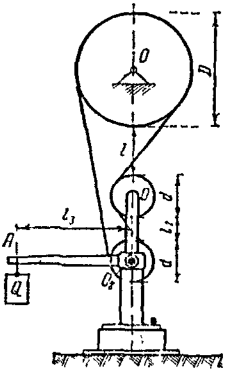
Ответ: $R_A = R_D = R_H = P$, $R_E = 2P$, $R_C = P\sqrt{2}$. Стержень EG растянут, стержень HK сжат

4.51(4.50). Натяжение приводного ремня, осуществляемое при помощи ломаного рычага AO_2O_1 и натяжного ролика O_1, равно по ту и другую сторону ролика P Н. Найти величину груза Q при равновесии системы, если дано $\angle AO_2O_1 = 90°$, $D = 55$ см, $d = 15$ см, $l_1 = 35$ см, $l_2 = 15$ см, $l_3 = 45$ см, $P = 18$ Н.

Ответ. $Q = 12$ Н.



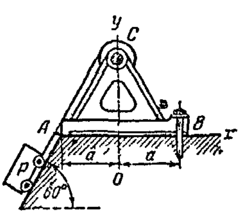
К задаче 4.50



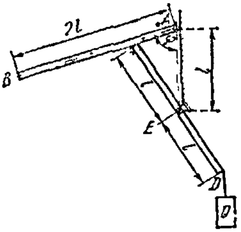
К задаче 4.51

4.52(4.51). Груз P веса 4,8 кН удерживается на гладкой наклонной плоскости посредством веревки, параллельной плоскости и намотанной на неподвижный вал лебедки ABC. Угол наклона плоскости к горизонту 60°. Вес лебедки $Q = 2{,}4$ кН, ее центр тяжести находится на прямой CO, лебедка опирается в точке A на гладкий пол, а в точке B прикреплена к полу болтом. Найти опорные реакции, пренебрегая расстоянием веревки от плоскости.

Ответ $Y_A = 4{,}8$ кН, $X_B = 2{,}08$ кН, $Y_B = 1{,}2$ кН



К задаче 4.52

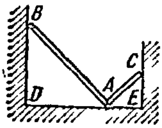


К задаче 4.53

4.53(4.52). Однородный стержень AB длины $2l$ и веса P может вращаться вокруг горизонтальной оси на конце A стержня. Он опирается на однородный стержень CD той же длины $2l$, который может вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через его середину E. Точки A и E лежат на одной вертикали на расстоянии $AE = l$. К концу D подвешен груз $Q = 2P$. Определить угол φ, образуемый стержнем AB с вертикалью в положении равновесия, пренебрегая трением.

Ответ: $\varphi = \arccos {}^1/_8 = 82°50'$.

4.54(4.53). Два однородных стержня AB и AC опираются в точке A на гладкий горизонтальный пол и друг на друга по гладким вертикальным плоскостям, а в точках B и C на гладкие вертикальные стены. Определить расстояние DE между стенами, при котором стержни находятся в положении равновесия, образуя друг с другом угол в 90°, если длина AB равна a, длина AC равна b, вес AB равен P_1, вес AC равен P_2.



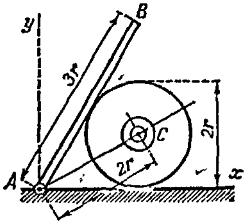
К задаче 4.54

Ответ: $DE = \dfrac{a\sqrt{P_2} + b\sqrt{P_1}}{\sqrt{P_1 + P_2}}$.

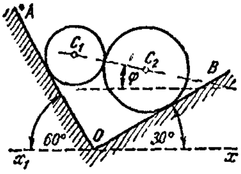
4.55(4.54). Однородный брусок AB, который может вращаться вокруг горизонтальной оси A, опирается на поверхность гладкого цилиндра радиуса r, лежащего на гладкой горизонтальной плоскости и удерживаемого нерастяжимой нитью AC. Вес бруска 16 Н; длина $AB = 3r$, $AC = 2r$. Определить натяжение нити T и силу давления бруска на шарнир A.

Ответ: $T = 6{,}9$ Н, $X_A = -6$ Н, $Y_A = -12{,}5$ Н.

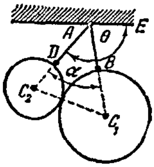
4.56(4.55). Между двумя гладкими наклонными плоскостями OA и OB положены два гладких соприкасающихся однородных цилиндра: цилиндр с центром C_1 веса $P_1 = 10$ Н и цилиндр с центром C_2 веса $P_2 = 30$ Н. Определить угол φ, составляемый прямой C_1C_2 с горизонтальной осью xOx_1, давления N_1 и N_2 цилиндров на плоскости, а также силу N взаимного давления цилиндров, если угол $AOx_1 = 60°$, а угол $BOx = 30°$.



К задаче 4.55



К задаче 4.56



К задаче 4.57

Ответ: $\varphi = 0$, $N_1 = 20$ Н, $N_2 = 34{,}6$ Н; $N = 17{,}3$ Н.

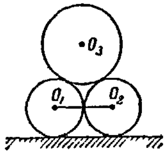
4.57(4.56). Два гладких однородных шара C_1 и C_2, радиусы которых R_1 и R_2, а веса P_1 и P_2, подвешены на веревках AB и AD в точке A; $AB = l_1$; $AD = l_2$, $l_1 + R_1 = l_2 + R_2$; угол $BAD = \alpha$. Определить угол θ, образуемый веревкой AD с горизонтальной плоскостью AE, натяжения веревок T_1, T_2 и силу давления одного шара на другой.

Ответ: $\operatorname{tg}\theta = -\dfrac{P_2 + P_1\cos\alpha}{P_1\sin\alpha}$, $T_1 = P_1\dfrac{\sin(\theta - \alpha/2)}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}$,

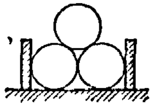
$$T_2 = P_2\frac{\sin(\theta - \alpha/2)}{\cos(\alpha/2)}, \quad N = P_2\frac{|\cos\theta|}{\cos(\alpha/2)}.$$

4.58(4.57). На двух одинаковых круглых однородных цилиндрах радиуса r и веса P каждый, лежащих на горизонтальной плоскости и связанных за центры нерастяжимой нитью длины $2r$, покоится третий однородный цилиндр радиуса R и веса Q. Определить натяжение нити, давление цилиндров на плоскость и взаимное давление цилиндров. Трением пренебречь.

Ответ. Давление каждого нижнего цилиндра на плоскость равно $P + Q/2$. Давление между верхним и каждым из нижних цилиндров равно $\dfrac{Q(R+r)}{2\sqrt{R^2+2rR}}$. Натяжение нити равно $\dfrac{Qr}{2\sqrt{R^2+2rR}}$.



К задаче 4.58

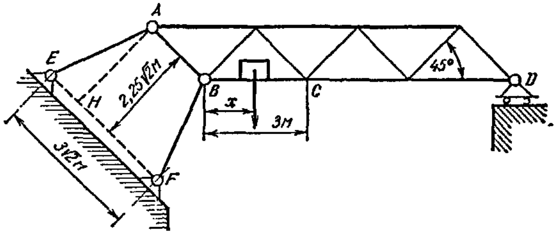


К задаче 4.59

4.59(4.58). Три одинаковых трубы веса $M = 120$ Н каждая лежат, как указано на рисунке. Определить давление каждой из нижних труб на землю и на удерживающие их с боков стенки. Трением пренебречь.

Ответ: Давление на землю равно 180 Н. Давление на каждую стенку равно 34,6 Н.

4.60. Ферма $ABCD$ в точке D опирается на катки, а в точках A и B поддерживается наклонными стержнями AE и BF, шарнирно укрепленными в точках E и F. Раскосы фермы и прямая EF наклонены к горизонту под углом 45°; длина панели $BC = 3$ м; стержни AE и BF одинаковой длины, расстояние $EF = 3\sqrt{2}$м; $AH = 2{,}25\sqrt{2}$м. Вес фермы равен 25 кН и направлен по вертикали, проходящей через точку C. Вес нагрузки 112,5 кН. Определить, на каком расстоянии x от точки B нужно расположить нагрузку, чтобы реакция в опоре D стала равна нулю.



К задаче 4.60

Ответ. $x = 0{,}25$ м.

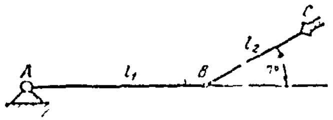
4.61. Механизм робота-манипулятора представляет собой шарнирный трехзвенник; звенья поворачиваются в вертикальной плоскости. Найти моменты сил приводов в шарнирах A и B механизма робота-манипулятора, необходимые для того чтобы удерживать звенья механизма в горизонтальном положении. Масса объекта манипулирования $m_C = 15$ кг. Длины звеньев: $l_1 = 0{,}7$ м, $l_2 = 0{,}5$ м

Звенья однородные и их массы соответственно равны $m_1 = 35$ кг, $m_2 = 25$ кг

Ответ. $M_A = 530$ Н·м, $M_B = 135$ Н·м

Примечание к задачам 4.61—4.64 Механизмы, создающие моменты в шарнирах, на рисунках не указаны

К задаче 4.61



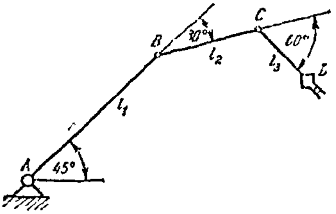
К задаче 4.62

4.62. Найти моменты сил приводов в шарнирах механизма робота-манипулятора, находящегося в равновесии, когда второе звено поднято под углом 30° к горизонту. Масса объекта манипулирования $m_C = 15$ кг Длины звеньев. $l_1 = 0{,}7$ м, $l_2 = 0{,}5$ м. Массы звеньев $m_1 = 35$ кг, $m_2 = 25$ кг

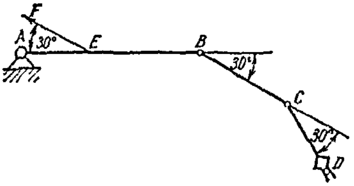
Ответ $M_A = 510$ Н·м, $M_B = 117$ Н·м

4.63. Механизм робота-манипулятора в положении равновесия расположен в вертикальной плоскости Длины звеньев $l_1 = 0{,}8$ м, $l_2 = 0{,}5$ м, $l_3 = 0{,}3$ м Массы звеньев: $m_1 = 40$ кг, $m_2 = 25$ кг, $m_3 = 15$ кг Найти моменты сил приводов в шарнирах, если рука CD манипулятора несет груз, масса которого $m_D = 15$ кг. Звенья считать однородными стержнями

Ответ. $M_A = 665$ Н·м, $M_B = 248$ Н·м, $M_C = 46{,}7$ Н·м.



К задаче 4.63



К задаче 4.64

4.64. Рука механизма робота-манипулятора удерживает в равновесии груз, масса которого $m_D = 15$ кг. Пружина разгрузочного устройства, предназначенного для уменьшения нагрузки на привод, действует на первое звено силой $F = 3000$ Н, приложенной на расстоянии $AE = 0{,}2$ м от шарнира A. Найти моменты сил в шарнирах Длины звеньев $l_1 = 0{,}8$ м, $l_2 = 0{,}5$ м, $l_3 = 0{,}3$ м. Массы звеньев: $m_1 = 40$ кг, $m_2 = 25$ кг, $m_3 = 15$ кг. Звенья считать однородными стержнями

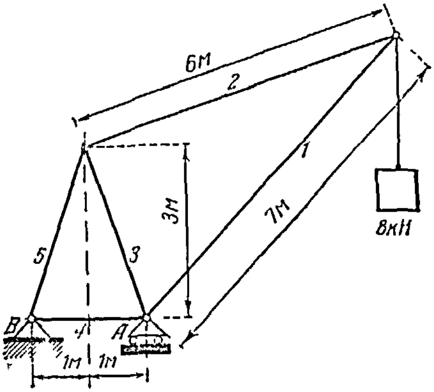
Ответ. $M_A = 502$ Н·м, $M_B = 214$ Н·м, $M_C = 33$ Н·м

4.65(5.5). Определить опорные реакции и усилия в стержнях крана, изображенного на рисунке, при нагрузке в 8 кН Весом стержня пренебречь.

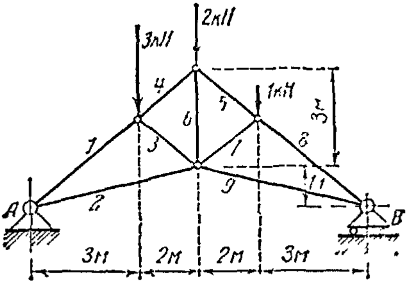
Ответ. $R_A = 26$ кН, $R_B = 18$ кН — вниз

Номер стержня	1	2	3	4	5
Усилие, кН	−16,1	+11,5	−14,3	−1	+19

4.66(5.6). Определить опорные реакции и усилия в стержнях стропильной фермы, изображенной вместе с приложенными к ней силами на рисунке



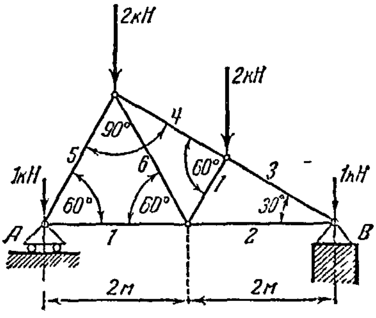
К задаче 4.65



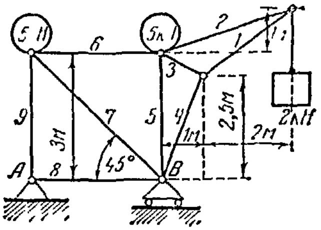
К задаче 4.66

Ответ: $R_A = 3{,}4$ кН, $R_B = 2{,}6$ кН.

Номер стержня	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Усилие, кН	−7,3	+5,8	−2,11	−4,7	−1,7	+3,9	−0,81	−5,5	+1,1



К задаче 4.67



К задаче 4.68

4.67(5.7). Определить опорные реакции и усилия в стержнях пильчатой фермы, изображенной вместе с действующими на нее силами на рисунке.

Ответ $R_A = 3{,}25$ кН, $R_B = 2{,}75$ кН.

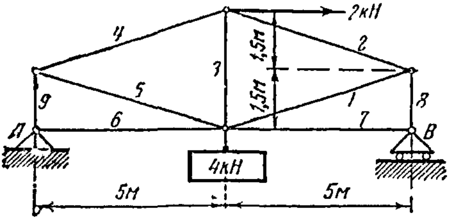
Номер стержня	1	2	3	4	5	6	7
Усилие, кН	+1,3	+3,03	−3,5	−2,5	−2,6	+1,73	−1,73

4.68(5.8). Определить опорные реакции и усилия в стержнях фермы крана, изображенного вместе с приложенными к нему силами на рисунке

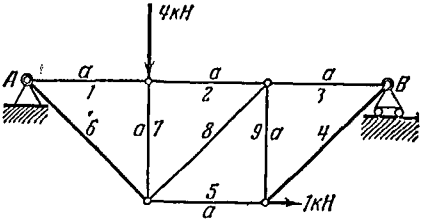
Ответ $R_A = 3$ кН, $R_B = 9$ кН.

Номер стержня	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Усилие, кН	−0,6	+5,1	−3,13	−5,4	−2,0	+2,0	−2,83	0	−3,0

4.69(5.11). Определить опорные реакции и усилия в стержнях сооружения, изображенного вместе с действующими на него силами на рисунке



К задаче 4.69



К задаче 4.70

Как в этой, так и в следующих задачах ось Ox направлена по горизонтальной прямой AB вправо, а ось Oy — по вертикали вверх.

Ответ. $X_A = -2$ кН, $Y_A = 1{,}4$ кН, $Y_B = 2{,}6$ кН

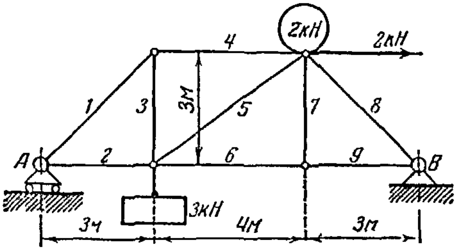
Номер стержня	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Усилие, кН	+4,5	−4,5	+2	−2,44	+2,44	+2	0	−2,6	−1,4

4.70(5.12). Определить опорные реакции и усилия в стержнях раскосной фермы, изображенной на рисунке вместе с нагрузкой.

Ответ: $X_A = -1$ кН, $Y_A = 3$ кН, $Y_B = 1$ кН.

Номер стержня	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Усилие, кН	−2	−2	−1	+1,41	+2	+4,24	−4	+1,41	−1

4.71(5.13). Определить опорные реакции и усилия в стержнях мостовой фермы, которая вместе с приложенными к ней силами изображена на рисунке.

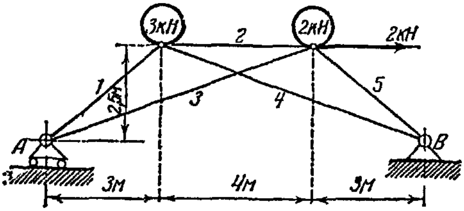


К задаче 4.71

Ответ $Y_A = 2{,}1$ кН, $X_B = -2$ кН, $Y_B = 2{,}9$ кН

Номер стержня	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Усилие, кН	−2,97	+2,1	+2,1	−2,1	+1,5	+0,9	0	−1,1	+0,9

4.72(5.14). Определить опорные реакции и усилия в стержнях сооружения, изображенного вместе с приложенными к нему силами на рисунке. Стержни *3* и *4* не соединены шарниром в точке их пересечения.



К задаче 4.72

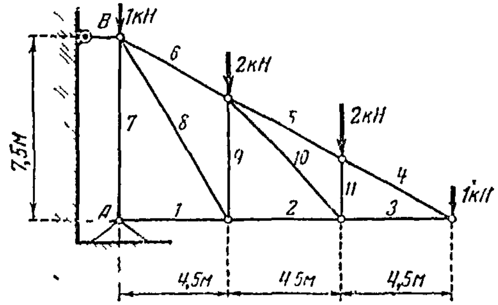
Ответ $Y_A = 2{,}2$ кН, $X_B = -2$ кН, $Y_B = 2{,}8$ кН

Номер стержня	1	2	3	4	5
Усилие, кН	−6	−7	+4,9	+2,53	−5,7

4.73(5.15). Определить опорные реакции и усилия в стержнях навесной фермы, изображенной вместе с действующими на нее силами на рисунке.

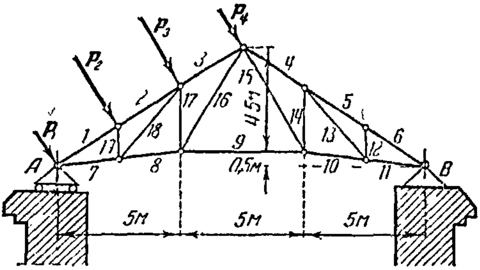
Ответ: $X_A = 5{,}4$ кН, $Y_A = 6$ кН, $X_B = -5{,}4$ кН

Номер стержня	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Усилие, кН	−5,4	−3,6	−1,8	+2,06	+2,06	+4,1	−6	+3,5	−3	+2,7	−2



К задаче 4.73

4.74(5.17). В узлах стропильной фермы с равными панелями вследствие давления ветра возникают силы, перпендикулярные



К задаче 4.74

кровле: $P_1 = P_4 = 312{,}5$ Н и $P_2 = P_3 = 625$ Н. Определить вызываемые ветром реакции опор и усилия в стержнях фермы, размеры которой указаны на рисунке.

Ответ: $Y_A = 997$ Н, $X_B = 1040$ Н, $Y_B = 563$ Н, $S_1 = -1525$ Н, $S_2 = -1940$ Н, $S_3 = -1560$ Н, $S_4 = S_5 = S_6 = -970$ Н, $S_7 = +1100$ Н, $S_8 = 410$ Н, $S_9 = -215$ Н, $S_{10} = S_{11} = -230$ Н, $S_{12} = S_{13} = S_{14} = 0$, $S_{15} = -26$ Н, $S_{16} = +1340$ Н, $S_{17} = -1130$ Н, $S_{18} = +1050$ Н, $S_{19} = -750$ Н

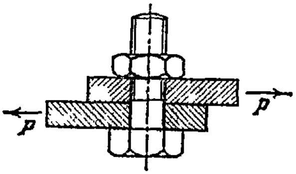
§ 5. Силы трения

5.1(2.56). Определить необходимую затяжку болта, скрепляющего две стальные полосы, разрываемые силой $P = 2$ кН. Болт поставлен с зазором и не должен работать на срез. Коэффициент трения между листами равен 0,2.

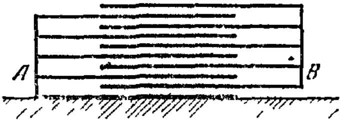
Указание. Болт не должен работать на срез, поэтому его надо затянуть с такой силой, чтобы развивающееся между листами трение могло предотвратить скольжение листов. Сила, действующая вдоль оси болта, и является искомой затяжкой.

Ответ. 10 кН.

5.2(2.57). Листы бумаги, сложенные, как показано на рисунке, сцепляются свободными концами через лист таким образом, что получаются две самостоятельные кипы A и B. Вес каждого листа 0,06 Н, число всех листов 200, коэффициент трения бумаги о бумагу, а также о стол, на котором бумага лежит, равен 0,2. Предполагая, что одна из кип удерживается неподвижно, определить наименьшее горизонтальное усилие P, необходимое для того, чтобы вытащить вторую кипу.



К задаче 5.1.



К задаче 5.2.

Ответ. При вытаскивании A из B сила $P = 241{,}2$ Н, а при вытаскивании B из A сила $P = 238{,}8$ Н.

5.3(2.58). Вагон, спускающийся по уклону в 0,008, достигнув некоторой определенной скорости, движется затем равномерно. Определить сопротивление R, которое испытывает вагон при этой скорости, если вес вагона равен 500 кН.

Уклоном пути называется тангенс угла наклона пути к горизонту, вследствие малости уклона синус может быть принят равным тангенсу этого угла.

Ответ. $R = 4$ кН.

5.4(2.59). Поезд поднимается по прямолинейному пути, имеющему уклон 0,008, с постоянной скоростью, вес поезда, не считая электровоза, 12000 кН. Какова сила тяги P электровоза, если сопротивление движению равно 0,005 силы давления поезда на рельсы?

Ответ. $P = 156$ кН.

5.5(2.60). Негладкой наклонной плоскости придан такой угол α наклона к горизонту, что тяжелое тело, помещенное на эту плоскость, спускается с той постоянной скоростью, которая ему сообщена в начале движения. Определить коэффициент трения f.

Ответ. $f = \operatorname{tg}\alpha$.

5.6(2.61). Найти угол естественного откоса земляного грунта, если коэффициент трения для этого грунта $f = 0{,}8$.

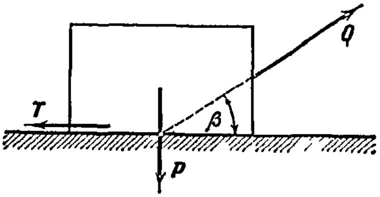
Углом естественного откоса называется тот наибольший угол наклона откоса к горизонту, при котором частица грунта, находящаяся на откосе, остается в равновесии.

Ответ. 38°40′.

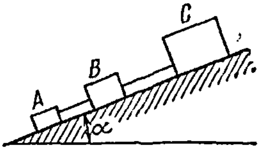
5.7(2.63). Ящик веса P стоит на шероховатой горизонтальной плоскости с коэффициентом трения f. Определить, под каким углом β надо приложить силу Q, и величину этой силы при условии: сдвинуть ящик при наименьшей величине Q.

Ответ: $\beta = \operatorname{arctg} f$; $Q_{min} = \dfrac{fP}{\sqrt{1+f^2}}$.

5.8(2.64). Три груза A, B, C веса 10 Н, 30 Н и 60 Н соответственно лежат на плоскости, наклоненной под углом α к горизонту. Грузы соединены тросами, как показано на рисунке. Коэффициенты трения между грузами и плоскостью равны $f_A = 0{,}1$, $f_B = 0{,}25$ и $f_C = 0{,}5$ соответственно. Определить угол α, при котором тела равномерно движутся вниз по плоскости. Найти также натяжения тросов T_{AB} и T_{BC}.



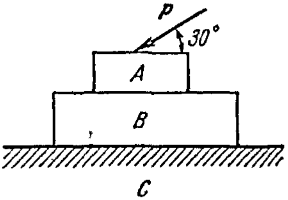
К задаче 5.7



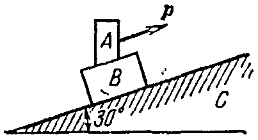
К задаче 5.8

Ответ: $\alpha = \operatorname{arctg} 0{,}38$, $T_{AB} = 2{,}7$ Н, $T_{BC} = 6{,}5$ Н.

5.9(2.65). На верхней грани прямоугольного бруса B, вес которого 200 Н, находится прямоугольный брус A веса 100 Н. Брус B опирается своей нижней гранью на горизонтальную поверхность C, причем коэффициент трения между ними $f_2 = 0{,}2$. Коэффициент трения между брусами A и B $f_1 = 0{,}5$. На брус A действует сила $P = 60$ Н, образующая с горизонтом угол $\alpha = 30°$. Будет ли брус A двигаться относительно B? Будет ли брус B двигаться относительно плоскости C?



К задаче 5.9



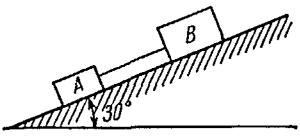
К задаче 5.10

Ответ. Брусы A и B остаются в покое.

5.10(2.66). Два тела A и B расположены на наклонной плоскости C так, как показано на рисунке. Тело A весит 100 Н, тело B — 200 Н. Коэффициент трения между A и B $f_1 = 0{,}6$, между B и C $f_2 = 0{,}2$. Исследовать состояние системы при различных значениях силы P, приложенной к телу A параллельно наклонной плоскости.

Ответ: При $P < 98$ Н оба тела двигаются вниз, не перемещаясь друг относительно друга, при $98\ \text{Н} < P < 102$ Н оба тела находятся в покое; при $P > 102$ Н тело B неподвижно, а тело A скользит по телу B вверх

5.11(2.67). На наклонной плоскости лежит прямоугольный брус B веса 400 Н К нему с помощью троса присоединяют прямоугольный брус A веса 200 Н, который, скользя по наклонной плоскости, натягивает трос Коэффициенты трения с наклонной плоскостью $f_A = 0{,}5$ и $f_B = 2/3$ Будет ли система в дальнейшем находиться в покое? Найти натяжение T троса и величины сил трения, действующие на каждое тело. Весом троса пренебречь

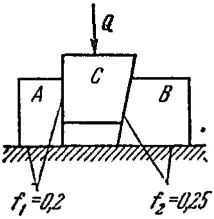


К задаче 5.11

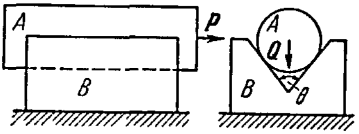
Ответ. Система останется в покое $F_A = 86{,}6$ Н, $F_B = 213{,}4$ Н, $T = 13{,}4$ Н

5.12(2.68). Клин C вставлен между двумя телами A и B, которые лежат на шероховатой горизонтальной плоскости. Одна сторона клина вертикальна, другая — образует с вертикалью угол $\alpha = \operatorname{arctg} 1/3$.

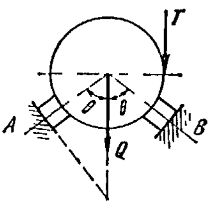
Вес тела A равен 400 Н, а вес тела B 300 Н; коэффициенты трения между поверхностями указаны на рисунке Найти величину силы Q, под действием которой одно из тел сдвинется, а также значение силы трения F, действующей при этом со стороны горизонтальной плоскости на оставшееся неподвижным тело



К задаче 5.12



К задаче 5.13



К задаче 5.14

Ответ. $Q = 70$ Н, причем начнет двигаться тело A, $F_B = 83$ Н

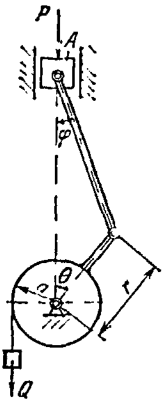
5.13(2.69). Цилиндр A лежит в направляющих B, поперечное сечение которых — симметричный клин с углом раствора θ Коэффициент трения между цилиндром A и направляющей B равен f. Вес цилиндра равен Q. При какой величине силы P цилиндр начнет двигаться горизонтально? Каков должен быть угол θ, чтобы движение началось при значении силы P, равной весу цилиндра Q?

Ответ: $P = \dfrac{Qf}{\sin(\theta/2)}$, $\theta = 2 \arcsin f$.

5.14(2.70). Цилиндр веса Q лежит на двух опорах A и B, расположенных симметрично относительно вертикали, проходящей через центр цилиндра Коэффициент трения между цилиндром и опорами равен f. При какой величине тангенциальной силы T цилиндр начнет вращаться? При каком угле θ это устройство будет самотормозящимся?

Ответ. $T = \dfrac{fQ}{(1+f)^2\cos\theta - f}$, $\theta \leqslant \arccos\dfrac{1}{1+f^2}$

5.15(2.71). Пренебрегая трением между ползуном A и направляющей, а также трением во всех шарнирах и подшипниках кривошипного механизма, определить, какова должна быть сила P, необходимая для поддерживания груза Q при указанном на рисунке положении механизма. Каковы минимальное и максимальное значения P, обеспечивающие неподвижность груза Q, если коэффициент трения между ползуном A и направляющей равен f?



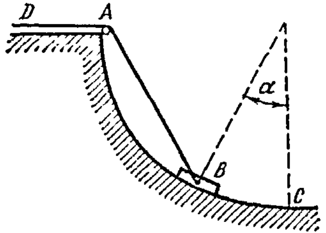
К задаче 5.15

Ответ. $P = \dfrac{Qa\cos\varphi}{r\sin(\varphi+\theta)}$; $P_{\min} = \dfrac{Qa}{r}\,\dfrac{\cos\varphi - f\sin\varphi}{\sin(\varphi+\theta)}$;

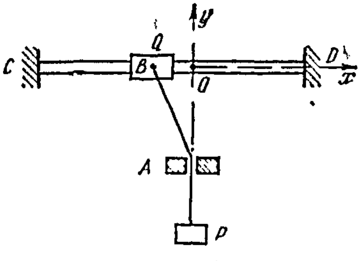
$$P_{\max} = \frac{Qa}{r}\,\frac{\cos\varphi + f\sin\varphi}{\sin(\varphi+\theta)}.$$

5.16. Груз B веса P удерживается с помощью троса BAD в равновесии при подъеме по шероховатой поверхности, имеющей форму четверти кругового цилиндра. Коэффициент трения между поверхностью и грузом $f = \operatorname{tg}\varphi$, где φ — угол трения. Определить натяжение троса как функцию угла α. Найти условие, которому должен удовлетворять угол α, чтобы натяжение троса принимало экстремальное значение. Размерами груза и блока A пренебречь.

Ответ. $S = P\dfrac{\sin(\varphi+\alpha)}{\sin(45^\circ + \alpha/2 + \varphi)}$. Натяжение S принимает экстремальное значение при $\dfrac{\operatorname{tg}(\varphi+\alpha)}{\operatorname{tg}(45^\circ + \alpha/2 + \varphi)} = 2$.



К задачам 5.16 и 5.17



К задаче 5.18

5.17. Груз B веса P удерживается в равновесии при спуске по шероховатой поверхности, имеющей форму четверти кругового цилиндра. Коэффициент трения между поверхностью и грузом $f = \operatorname{tg}\varphi$, где φ — угол трения. Определить натяжение троса S как функцию угла α. В каких пределах может меняться натяжение троса при равновесии груза B? Размерами груза и блока пренебречь.

Ответ: $S = P\dfrac{\sin(\alpha-\varphi)}{\sin(45^\circ+\alpha/2-\varphi)}$. Груз будет находиться в равновесии, если натяжение троса будет изменяться в пределах

$$P\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\sin(45^\circ+\alpha/2+\varphi)} \geqslant S \geqslant P\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\sin(45^\circ+\alpha/2-\varphi)}.$$

При $\alpha < \varphi$ груз будет в равновесии и при отсутствии троса.

5.18. Груз Q может скользить по шероховатым горизонтальным направляющим CD. К грузу прикреплен трос, пропущенный через гладкое отверстие A и несущий груз P. Коэффициент трения груза о направляющие $f = 0{,}1$. Вес груза $Q = 100$ Н, груза $P = 50$ Н. Расстояние от отверстия A до оси направляющих $OA = 15$ см. Определить границы зоны застоя (геометрического места положений равновесия груза). Размерами груза и отверстия пренебречь.

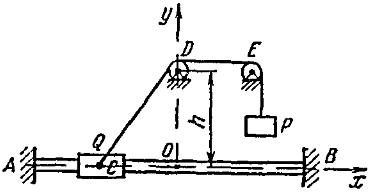
Ответ. Границы имеют координаты ±4,64 см.

5.19. Автомобиль удерживается с помощью тормозов на наклонной части дороги. При перемещении тормозной педали на 2 см тормозные колодки дисковых тормозов перемещаются на 0,2 мм. Диаметр рабочей части диска 220 мм, нагруженный диаметр колеса 520 мм, вес автомобиля 14 кН. Определить, с какой силой водитель должен нажимать на педаль тормоза, если угол наклона дороги 20°. Трением качения пренебречь. Коэффициент трения скольжения между тормозными колодками и диском $f = 0{,}5$. Тормоза всех колес работают одинаково.

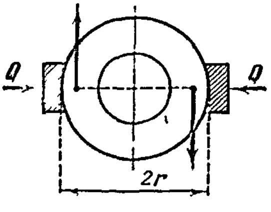
Ответ. 0,226 кН.

5.20. Груз Q может скользить по шероховатым горизонтальным направляющим AB. К грузу прикреплен трос, несущий груз P. Определить границы участков, где равновесие невозможно, если вес груза $Q = 100$ Н, груза $P = 45$ Н, коэффициент трения скольжения $f = 0{,}5$. Расстояние от центра блока D до оси направляющих $h = 15$ см. Размерами блока D и груза Q пренебречь.

Ответ. Два участка с границами, координаты которых соответственно равны (—39,6 см, —23,8 см) и (23,8 см, 39,6 см).



К задаче 5.20



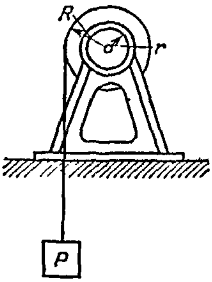
К задаче 5.21

5.21(4.59). К валу приложена пара сил с моментом $M = 100$ Нм. На валу заключено тормозное колесо, радиус r которого равен 25 см. Найти, с какой силой Q надо прижимать к колесу тормозные колодки, чтобы колесо оставалось в покое, если коэффициент трения покоя f между колесом и колодками равен 0,25.

Ответ: $Q = 800$ Н.

5.22(4.60). Трамвайная дверь отодвигается с трением в нижнем пазу. Коэффициент трения f не более 0,5. Определить наибольшую высоту h, на которой можно поместить ручку двери, чтобы дверь при отодвигании не опрокидывалась. Ширина двери $l = 0{,}8$ м; центр тяжести двери находится на ее вертикальной оси симметрии.

Ответ $h = \frac{l}{2f} = 0{,}8$ м.

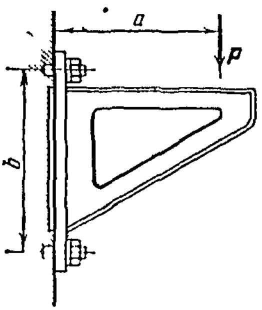


К задаче 5.23

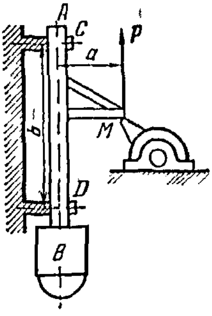
5.23(4.61). Цилиндрический вал веса Q и радиуса R приводится во вращение грузом, подвешенным к нему на веревке, вес груза равен P. Радиус шипов вала $r = R/2$. Коэффициент трения в подшипниках равен 0,05. Определить, при каком отношении веса Q к весу P груза последний опускается равномерно.

Ответ $Q/P = 39$.

5.24(4.62). Кронштейн, нагруженный вертикальной силой $P = 600$ Н, прикреплен к стене двумя болтами. Определить затяжку болтов, необходимую для укрепления кронштейна на стене. Коэффициент трения между кронштейном и стеной $f = 0{,}3$. Для большей осторожности расчет произвести в предположении, что затянут только верхний болт и что болты поставлены с зазором и не должны работать на срез. Дано $b/a > f$.



К задаче 5.24



К задаче 5.25

Указание. Затяжкой называется усилие, действующее вдоль оси болта. Полная затяжка верхнего болта состоит из двух частей: первая устраняет возможность отрыва кронштейна и опрокидывания его вокруг нижнего болта, вторая обеспечивает то нормальное давление верхней части кронштейна на стену, которое вызывает необходимую силу трения.

Ответ 2 кН.

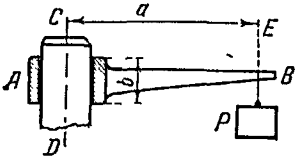
5.25(4.63). Пест AB приводится в движение пальцами M, насаженными на вал. Вес песта 180 Н. Расстояние между направляющими C и D равно $b = 1{,}5$ м. Расстояние точки прикосновения пальца к выступу от оси песта $a = 0{,}15$ м. Найти силу P, необходимую для подъема песта, если принять во внимание силу трения между направляющими C и D и пестом, равную 0,15 давления между трущимися частями.

Ответ: $P = 186$ Н.

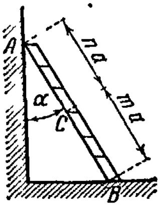
5.26(4.64). Горизонтальный стержень AB имеет на конце A отверстие, которым он надет на вертикальную круглую стойку CD; длина втулки $b = 2$ см; в точке E на расстоянии a от оси стойки к стержню подвешен груз P. Определить, пренебрегая весом стержня AB, расстояние a так, чтобы под действием груза P стержень оставался в равновесии, если коэффициент трения между стержнем и стойкой $f = 0{,}1$

Ответ $a \geqslant 10$ см

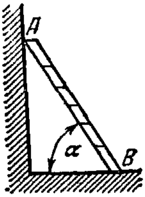
5.27(4.65). К вертикальной стене приставлена лестница AB, опирающаяся своим нижним концом на горизонтальный пол. Коэффициент трения лестницы о стену f_1, о пол f_2. Вес лестницы вместе с находящимся на ней человеком равен p и приложен в точке C, которая делит длину лестницы в отношении m/n. Определить наибольший угол α, составляемый лестницей со стеной в положении равновесия, а также нормальные составляющие реакций N_A стены и N_B пола для этого значения α.



К задаче 5.26



К задаче 5.27



К задаче 5.28

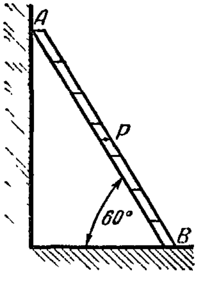
Ответ: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{(m+n)f_2}{m - nf_1f_2}$, $N_A = \dfrac{pf_2}{1+f_1f_2}$, $N_B = \dfrac{p}{1+f_1f_2}$.

5.28(4.66). Лестница AB веса P упирается в гладкую стену и опирается на горизонтальный негладкий пол. Коэффициент трения лестницы о пол равен f. Под каким углом α к полу надо поставить лестницу, чтобы по ней мог подняться доверху человек, вес которого p?

Ответ. $\operatorname{tg}\alpha \geqslant \dfrac{P+2p}{2f(P+p)}$

5.29(4.67). Лестница AB опирается на негладкую стену и негладкий пол, составляя с последним угол 60°. На лестнице помещается груз P. Пренебрегая весом лестницы, определить графически наибольшее расстояние BP, при котором лестница остается в покое. Угол трения для стены и пола равен 15°.

Ответ $BP = {}^1/_2\,AB$



К задаче 5.29

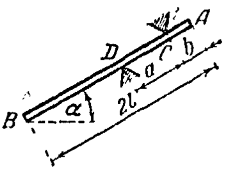
5.30(4.68). Тяжелый однородный стержень AB лежит на двух опорах C и D, расстояние между которыми $CD = a$, $AC = b$. Коэффициент трения стержня об опоры равен f. Угол наклона стержня к горизонту равен α. Какому условию должна удовлетворять длина стержня $2l$ для того, чтобы стержень находился в равновесии, если толщиной его можно пренебречь?

Ответ: $2l \geqslant 2b + a + \dfrac{a}{f}\operatorname{tg}\alpha$, $l > a + b$. Первое условие включает второе при $\alpha > \varphi$, где $\varphi = \operatorname{arctg} f$ — угол трения, если же

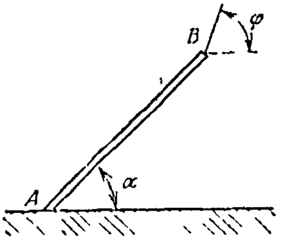
$\alpha < \varphi$, то достаточно удовлетворить второму условию. При $l < a + b$ равновесие при принятом на рисунке расположении опоры C невозможно.

5.31(4.69). Однородный брус опирается в точке A на негладкий горизонтальный пол и удерживается в точке B веревкой. Коэффициент трения бруса о пол равен f. Угол α, образуемый брусом с полом, равен 45°. При каком угле φ наклона веревки к горизонту брус начнет скользить?

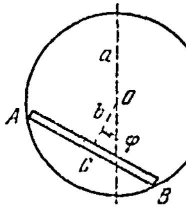
Ответ $\operatorname{tg}\varphi = 2 + 1/f$.



К задаче 5.30



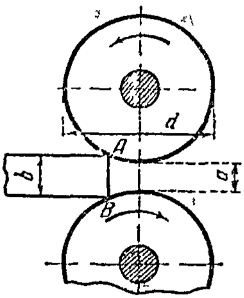
К задаче 5.31



К задаче 5.32

5.32(4.70). Однородный стержень своими концами A и B может скользить по негладкой окружности радиуса a. Расстояние OC стержня до центра O окружности, расположенной в вертикальной плоскости, равно b. Коэффициент трения между стержнем и окружностью равен f. Определить для положения равновесия стержня угол φ, составляемый прямой OC с вертикальным диаметром окружности.

Ответ $\operatorname{ctg}\varphi \geqslant \dfrac{b^2(1+f^2)}{a^2 f} - f$.



К задаче 5.33

5.33(4.72). Прокатный стан состоит из двух валов диаметром $d = 50$ см, вращающихся в противоположные стороны, указанные стрелками на рисунке, расстояние между валами $a = 0{,}5$ см. Какой толщины b листы можно прокатывать на этом стане, если коэффициент трения для раскаленного железа и чугунных валов $f = 0{,}1$?

Для работы стана необходимо, чтобы лист захватывался вращающимися валами, т. е. чтобы равнодействующая приложенных к листу нормальных реакций и сил трения в точках A и B была направлена по горизонтали вправо.

Ответ $b \leqslant 0{,}75$ см.

5.34(4.73). Блок радиуса R снабжен двумя шипами радиуса r, симметрично расположенными относительно его средней плоскости. Шипы опираются на две цилиндрические поверхности AB с горизонтальными образующими. На блок намотан трос, к которому подвешены грузы P и P_1, причем $P > P_1$. Определить наименьшую величину груза P_1, при которой блок будет находиться в равновесии, предполагая, что коэффициент трения шипов о цилиндрические поверхности AB равен f, а вес блока с шипами Q

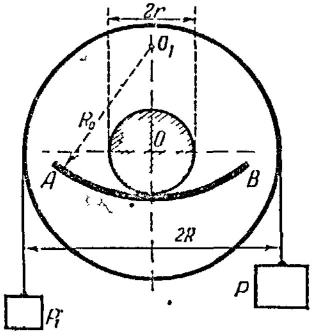
Указанное на рисунке положение системы не может быть положением равновесия, последнее требуется предварительно найти

Ответ В положении равновесия плоскость, проходящая через оси цилиндра AB и блока, образует с вертикалью угол, равный углу трения,

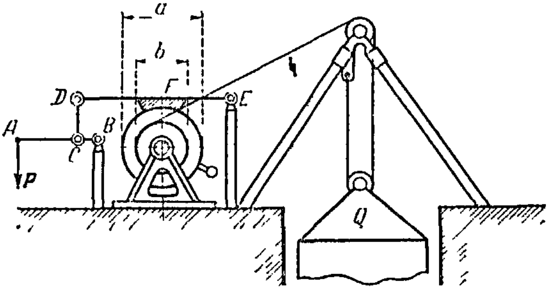
$$P_1 = \frac{P\left(R\sqrt{1+f^2} - fr\right) - frQ}{R\sqrt{1+f^2} + fr}$$

5.35(4.75). Для опускания грузов употребляется ворот с тормозом, изображенный на рисунке С барабаном, на который намотана цепь, скреплено концентрическое деревянное колесо, которое тормозят, надавливая на конец A рычага AB, соединенного цепью CD с концом D тормозного рычага ED Диаметр колеса $a = 50$ см, диаметр барабана $b = 20$ см, $ED = 120$ см, $EC = 60$ см, $AB = 1$ м, $BC = 10$ см Определить силу P, уравновешивающую груз $Q = 8$ кН, подвешенный к подвижному блоку, если коэффициент трения дерева о сталь $f = 0{,}4$; размерами колодки F пренебрегаем

Ответ $P = 0{,}2$ кН

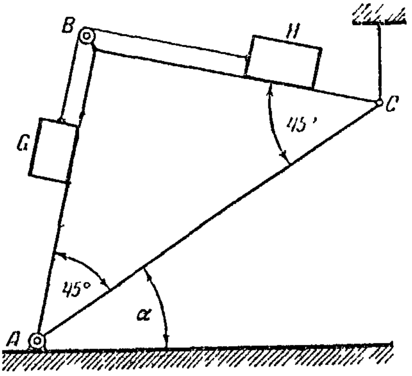


К задаче 5.34



К задаче 5.35

5.36(4.76). На гранях AB и BC призмы ABC помещены два одинаковых тела G и H веса P, связанные нитью, перекинутой через блок в точке B Коэффициент трения между телами и гранями призмы равен f. Углы BAC и BCA равны 45° Определить, пренебрегая трением на блоке, величину угла α наклона грани AC к горизонту, необходимую для того, чтобы груз G начал опускаться



К задаче 5.36

Ответ $\operatorname{tg}\alpha = f$.

5.37(4.77). Глубина заложения опор железнодорожного моста, перекинутого через реку, рассчитана в том предположении, что вес опоры с приходящимся на нее грузом уравновешивается давлением грунта на дно опоры и боковым трением, причем грунт — мелкозернистый песок, насыщенный водой, принимается за жидкое тело Вычислить глубину h заложения этих опор, если нагрузка на опору 1500 кН, вес опоры на 1 м ее высоты 80 кН, высота опоры над дном реки 9 м, высота воды над дном 6 м, площадь основания опоры 3,5 м^2, боковая поверхность опоры на 1 м высоты 7 м^2, вес 1 м^3 песку, насыщенного водой, равен 18 кН, вес 1 м^3 воды равен 10 кН и коэффициент трения о песок стального футляра, в котором заключена каменная опора, 0,18

При расчете трения принимаем во внимание, что среднее боковое давление на 1 м^2 равно $10(6 + 0{,}9h)$ кН

Ответ $h = 11$ м

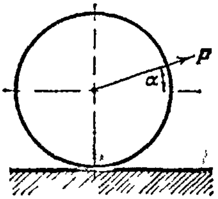
5.38(4.78). Определить угол α наклона плоскости к горизонту, при котором ролик радиуса $r = 50$ мм равномерно катится по плоскости Материал трущихся тел — сталь, коэффициент трения качения $k = 0{,}05$ мм.

Ввиду малости угла α можно принять $\alpha = \operatorname{tg}\alpha$

Ответ $\alpha = 3'26''$.

5.39(4.79). Определить силу P, необходимую для равномерного качения цилиндрического катка диаметра 60 см и веса 300 Н по горизонтальной плоскости, если коэффициент трения качения $k = 0{,}5$ см, а угол, составляемый силой P с горизонтальной плоскостью, равен $\alpha = 30°$.

Ответ $P = 5{,}72$ Н.



К задаче 5.39

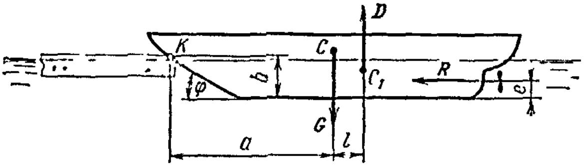
5.40(4.80). На горизонтальной плоскости лежит шар радиуса R и веса Q Коэффициент трения скольжения шара о плоскость f, коэффициент трения качения k. При каких условиях горизонтальная сила P, приложенная в центре шара, сообщает ему равномерное качение?

Ответ $k/R < f$; $P = Qk/R$

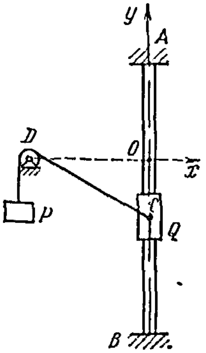
5.41. При взаимодействии с ледяным покровом ледокол рассматривается в равновесии под действием веса судна G, силы поддержания воды D, упора винтов R, а также сил, действующих со стороны льда в точке форштевня K нормального давления N и максимальной силы трения F Угол наклона форштевня $\varphi = 30°$, коэффициент трения $f = 0{,}2$ Известны значения $G = 6000$ кН, $R = 200$ кН, $a = 20$ м, $b = 2$ м, $e = 1$ м. Пренебрегая дифферентом судна, определить вертикальное давление судна на ледяной покров P, силу поддержания D и расстояние ее от центра тяжести судна l.

Ответ: $P = R\frac{1 - f\,\mathrm{tg}\,\varphi}{f + \mathrm{tg}\,\varphi} = 230$ кН, $D = 5770$ кН, $l = 0{,}83$ м.

5.42. Груз Q может скользить по шероховатой вертикальной направляющей AB. К грузу прикреплен трос, несущий груз P. Пренебрегая размером блока D, определить 1) условие, при котором возможна зона застоя (геометрическое место возможных положений равновесия); 2) условие, при котором верхняя граница зоны застоя находится в положительной части оси y, 3) ординаты границ зоны застоя при $Q = 5$ Н, $P = 10$ Н, $f = 0{,}2$, $OD = 10$ см, 4) ординаты границ зоны застоя при $Q = 1{,}5$ Н, $P = 10$ Н, $f = 0{,}2$, $OD = 10$ см



К задаче 5.41



К задаче 5.42

Ответ 1) $Q^2/P^2 \leqslant 1 + f^2$, 2) $Q/P < f$, 3) $Y_1 = -3{,}26$ см, $Y_2 = -8{,}6$ см, 4) $Y_1 = 0{,}5$ см, $Y_2 = -3{,}59$ см

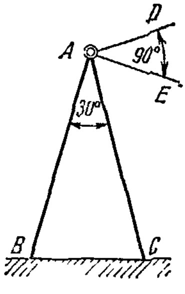
ГЛАВА II

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СИСТЕМА СИЛ

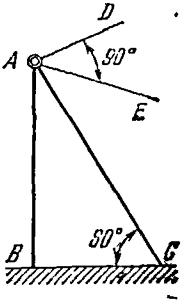
§ 6. Силы, линии действия которых пересекаются в одной точке

6.1(6.1). Угловой столб составлен из двух одинаково наклоненных брусьев AB и AC, скрепленных в вершине посредством шарнира. Угол $BAC = 30°$. Столб поддерживает два горизонтальных провода AD и AE, составляющих между собой прямой угол. Натяжение каждого провода равно 1 кН. Определить усилия в брусьях, предполагая, что плоскость BAC делит пополам угол DAE, пренебрегая весом брусьев.

Ответ $S_B = -S_C = 2{,}73$ кН



К задаче 6.1

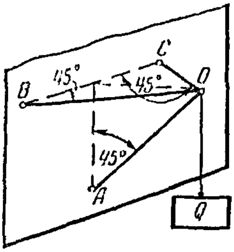


К задаче 6.2

6.2(6.2). Горизонтальные провода телеграфной линии подвешены к телеграфному столбу AB с подкосом AC и составляют угол $DAE = 90°$. Натяжения проводов AD и AE соответственно равны 120 Н и 160 Н. В точке A крепление шарнирное. Найти угол α между плоскостями BAC и BAE, при котором столб не испытывает бокового изгиба, и определить усилие S в подкосе, если он поставлен под углом 60° к горизонту. Весом столба и подкоса пренебречь.

Ответ. $\alpha = \arcsin(3/5) = 36°50'$, $S = -400$ Н.

6.3(6.3). Груз $Q = 100$ Н поддерживается брусом AO, шарнирно закрепленным в точке A и наклоненным под углом 45° к горизонту, и двумя горизонтальными цепями BO и CO одинаковой длины; $\angle CBO = \angle BCO = 45°$. Найти усилие S в брусе и натяжения T цепей.



К задаче 6.3

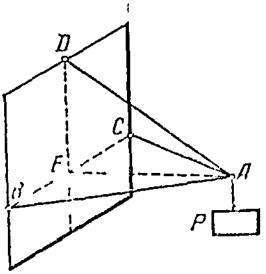
Ответ. $S = -141$ Н, $T = 71$ Н.

6.4(6.4). Найти усилия S_1 и S_2 в стержнях AB и AC и усилие T в тросе AD, если дано, что $\angle CBA = \angle BCA = 60°$, $\angle EAD = 30°$. Вес груза P равен 300 Н. Плоскость ABC горизонтальна. Крепления стержней в точках A, B и C шарнирные.

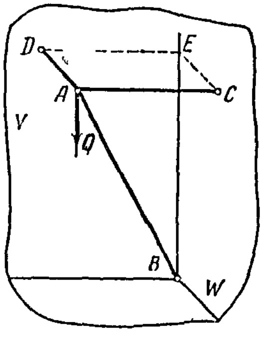
Ответ. $T = 600$ Н, $S_1 = S_2 = -300$ Н.

6.5(6.5). Найти усилия в стержне AB и цепях AC и AD, поддерживающих груз Q веса 420 Н, если $AB = 145$ см, $AC = 80$ см, $AD = 60$ см, плоскость прямоугольника $CADE$ горизонтальна, а плоскости V и W вертикальны. Крепление в точке B шарнирное.

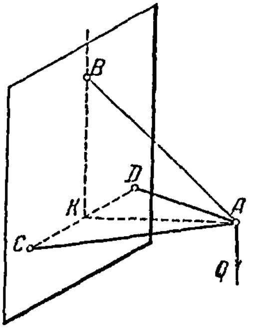
Ответ. $T_C = 320$ Н, $T_D = 240$ Н; $T_B = -580$ Н.



К задаче 6.4



К задаче 6.5



К задаче 6.6

6.6(6.6). Определить усилия в тросе AB и в стержнях AC и AD, поддерживающих груз Q веса 180 Н, если $AB = 170$ см, $AC = AD = 100$ см, $CD = 120$ см, $CK = KD$ и плоскость $\triangle CDA$ горизонтальна. Крепления стержней в точках A, C и D шарнирные.

Ответ. 204 Н, −60 Н.

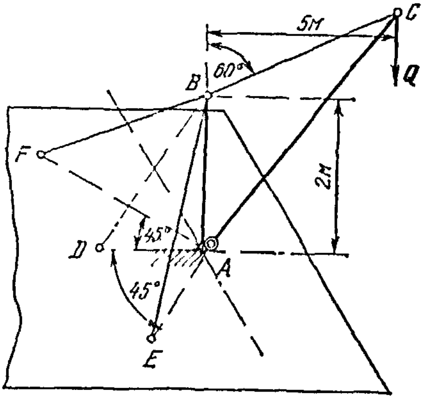
6.7(6.7). Переносный кран, поднимающий груз Q веса 20 кН, устроен так, как указано на рисунке, $AB = AE = AF = 2$ м, угол $EAF = 90°$, плоскость крана ABC делит прямой двугранный угол $EABF$ пополам. Определить силу P_1, сжимающую вертикальную стойку AB, а также силы P_2, P_3 и P_4, растягивающие струну BC и тросы BE и BF, пренебрегая весом частей крана.

Ответ: $P_1 = 42$ кН, $P_2 = 58$ кН, $P_3 = P_4 = 50$ кН

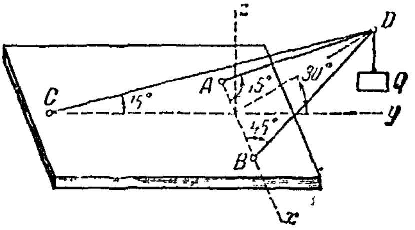
6.8(6.8). Груз Q веса 1 кН подвешен в точке D, как указано на рисунке. Крепления стержней в точках A, B и D шарнирные. Определить реакции опор A, B и C.

Ответ: $R_A = R_B = 2{,}64$ кН, $R_C = 3{,}35$ кН.

6.9(6.9). Воздушный шар, удерживаемый двумя тросами, находится под действием ветра. Тросы образуют между собой прямой угол; плоскость, в которой они находятся, составляет с плоскостью горизонта угол 60°. Направление ветра перпендикулярно линии пересечения этих плоскостей и параллельно поверхности земли. Вес шара и заключенного в нем газа 2,5 кН, объем шара 215,4 м^3, вес 1 м^3 воздуха 13 Н. Определить натяжения T_1 и T_2 тросов и равнодействующую P сил давления ветра на шар, считая, что линии действия всех сил, приложенных к шару, пересекаются в центре шара.



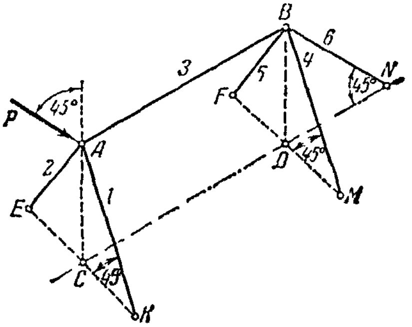
К задаче 6.7



К задаче 6.8

Ответ: $T_1 = T_2 = 245$ Н, $P = 173$ Н.

6.10(6.10). На рисунке изображена пространственная ферма, составленная из шести стержней *1*, *2*, *3*, *4*, *5*, *6*. Сила $\boldsymbol{P}$ действует на узел A в плоскости прямоугольника $ABCD$; при этом ее линия действия составляет с вертикалью CA угол 45°. $\Delta EAK = \Delta FBM$. Углы равнобедренных треугольников EAK, FBM и NDB при вершинах A, B и D прямые. Определить усилия в стержнях, если $P = 1$ кН.

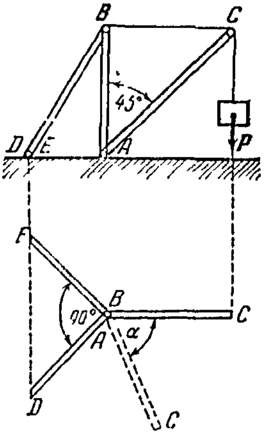


К задаче 6.10

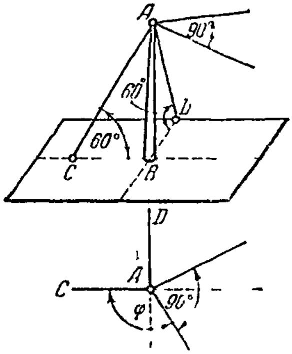
Ответ: $S_1 = -0{,}5$ кН, $S_2 = -0{,}5$ кН, $S_3 = -0{,}707$ кН, $S_4 = +0{,}5$ кН, $S_5 = +0{,}5$ кН, $S_6 = -1$ кН.

6.11(6.11). Определить усилия в вертикальной стойке и в ногах крана, изображенного на рисунке, в зависимости от угла α, если дано. $AB = BC = AD = AE$. Крепления в точках A, B, D и E шарнирные.

Ответ: $S_{BD} = P(\cos\alpha - \sin\alpha)$; $S_{BE} = P(\cos\alpha + \sin\alpha)$; $S_{AB} = -P\sqrt{2}\cos\alpha$.

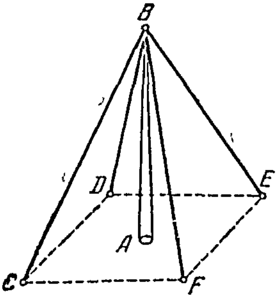


К задаче 6.11



К задаче 6.12

6.12(6.12). Угловой столб AB, поддерживающий воздушный кабель, удерживается двумя оттяжками AC и AD, причем $\angle CBD = 90°$. Определить усилия в столбе и оттяжках в зависимости от угла φ, образованного одной из двух ветвей кабеля с плоскостью CBA. Ветви кабеля горизонтальны и взаимно перпендикулярны, натяжения в них одинаковы и равны T.



К задаче 6.13

Ответ: $S_{AC} = 2T(\sin\varphi - \cos\varphi)$; $S_{AD} = 2T(\sin\varphi + \cos\varphi)$, $S_{AB} = -2\sqrt{3}T\sin\varphi$.

Оттяжки будут натянуты обе одновременно при условии $\pi/4 < \varphi < 3\pi/4$. При $\varphi < \pi/4$ или $\varphi > 3\pi/4$ одна из оттяжек должна быть заменена брусом.

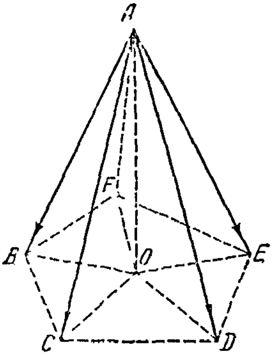
6.13(6.13). Мачта AB удерживается в вертикальном положении посредством четырех симметрично расположенных оттяжек. Угол между каждыми двумя смежными оттяжками равен 60°. Определить давление мачты на землю, если натяжение каждой из оттяжек равно 1 кН, а вес мачты 2 кН.

Ответ: 4,83 кН.

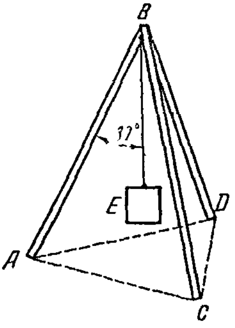
6.14(6.14). Четыре ребра AB, AC, AD и AE правильной пятиугольной пирамиды изображают по величине и направлению четыре силы в масштабе 1 Н в 1 м. Зная высоту пирамиды $AO = 10$ м и радиус круга, описанного около основания, $OC = 4{,}5$ м, найти равнодействующую R и расстояние x от точки O до точки пересечения равнодействующей с основанием.

Ответ $R = 40{,}25$ Н, $x = 1{,}125$ м.

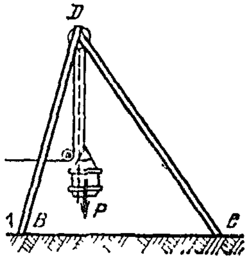
6.15(6.15). К вершине B треножника $ABCD$ подвешен груз E, вес которого 100 Н. Ножки имеют равную длину, укреплены на горизонтальном полу и образуют между собой равные углы. Определить усилие в каждой из ножек, если известно, что они образуют с вертикалью BE углы в 30°.



К задаче 6.14



К задаче 6.15



К задаче 6.16

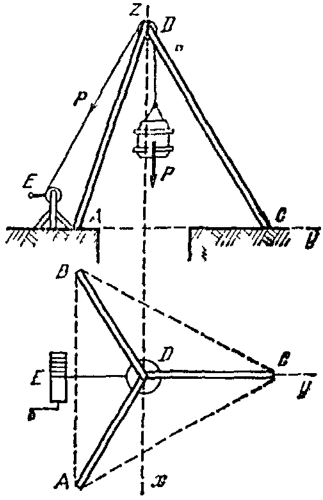
Ответ 3,85 Н.

6.16(6.16). Найти усилия S в ногах AD, BD и CD треноги, образующих углы в 60° с горизонтальной плоскостью, если вес P равномерно поднимаемого груза равен 3 кН. При этом $AB = BC = AC$. (Вид сверху рисунка аналогичен рис. 6.17.)

Ответ $S = 2{,}3$ кН.

6.17(6.17). Для подъема из шахты груза P веса 30 кН установлены тренога $ABCD$ и лебедка E. Определить усилия в ногах треноги при равномерном поднятии груза, если треугольник ABC равносторонний и углы, образованные ногами и тросом DE с горизонтальной плоскостью, равны 60°. Расположение лебедки по отношению к треноге видно из рисунка.

Ответ $S_A = S_B = 31{,}5$ кН, $S_C = 1{,}55$ кН.



К задаче 6.17

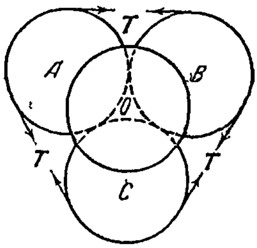
6.18(6.18). На гладком полу стоит трехногий штатив; нижние концы его ножек связаны шнурами так, что ножки и шнуры штатива образуют правильный тетраэдр. К верхней точке штатива подвешен груз веса P. Определить реакцию пола R в точках опоры и натяжение шнуров T, выразив искомые величины через P.

Ответ. $R = \frac{1}{3}P$, $T = \frac{P}{3\sqrt{6}}$.

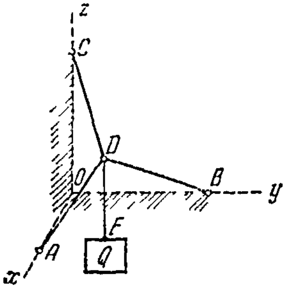
6.19(6.19). Решить предыдущую задачу в том случае, когда ножки штатива связаны шнурами не в концах, а в серединах, принимая при этом во внимание, что вес каждой ножки равен p и приложен к ее середине.

Ответ. $R = \frac{1}{3}P + p$, $T = \frac{2P + 3p}{18}\sqrt{6}$.

6.20(6.20). Три однородных шара A, B и C одинаковых радиусов положены на горизонтальную плоскость, взаимно прикасаются и обвязаны шнуром, огибающим их в экваториальной плоскости, а четвертый шар O того же радиуса и также однородный, веса 10 Н, лежит на трех нижних. Определить натяжение шнура T, вызываемое давлением верхнего шара. Трением шаров между собою и с горизонтальной плоскостью пренебречь.



К задаче 6.20



К задаче 6.21

Ответ. $T = 1{,}36$ Н.

6.21(6.21). В точках A, B и C, лежащих на прямоугольных координатных осях на одинаковом расстоянии l от начала координат O, закреплены нити $AD = BD = CD = L$, связанные в точке D, координаты которой

$$x = y = z = \frac{1}{3}\left(l - \sqrt{3L^2 - 2l^2}\right).$$

В этой точке подвешен груз Q. Определить натяжение нитей T_A, T_B и T_C, предполагая, что $\sqrt{\frac{2}{3}}\,l < L < l$.

Ответ: $T_A = T_B = \frac{l - \sqrt{3L^2 - 2l^2}}{3l\sqrt{3L^2 - 2l^2}}LQ$, $T_C = \frac{l + 2\sqrt{3L^2 - 2l^2}}{3l\sqrt{3L^2 - 2l^2}}LQ$.

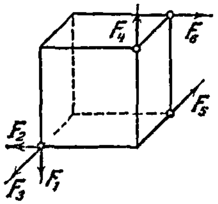
§ 7. Приведение системы сил к простейшему виду

7.1(7.1). К вершинам куба приложены по направлениям ребер силы, как указано на рисунке. Каким условиям должны удовлетворять модули сил F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 и F_6, чтобы они находились в равновесии?

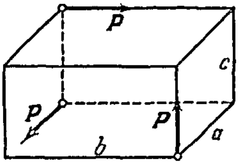
Ответ. $F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = F_5 = F_6$

7.2(7.2). По трем непересекающимся и непараллельным ребрам прямоугольного параллелепипеда действуют три равные по модулю силы P. Какое соотношение должно существовать между ребрами a, b и c, чтобы эта система приводилась к одной равнодействующей?

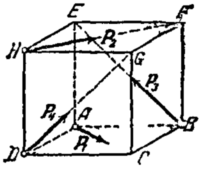
Ответ. $a = b - c$.



К задаче 7.1



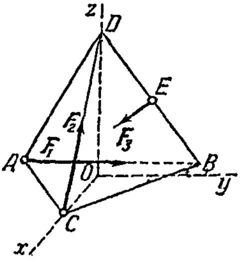
К задаче 7.2



К задаче 7.3

7.3(7.3). К четырем вершинам A, H, B и D куба приложены четыре равные по модулю силы $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P$, причем сила $\boldsymbol{P}_1$ направлена по AC, $\boldsymbol{P}_2$ — по HF, $\boldsymbol{P}_3$ — по BE и $\boldsymbol{P}_4$ — по DG. Привести эту систему к простейшему виду.

Ответ. Равнодействующая равна $2P$ и направлена по диагонали DG.



К задаче 7.4

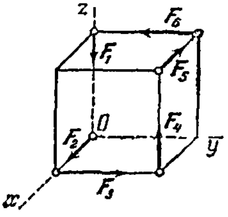
7.4(7.4). К правильному тетраэдру $ABCD$, ребра которого равны a, приложены силы. $\boldsymbol{F}_1$ по ребру AB, $\boldsymbol{F}_2$ по ребру CD и $\boldsymbol{F}_3$ в точке E — середине ребра BD. Величины сил $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$ какие угодно, а проекции силы $\boldsymbol{F}_3$ на оси x, y и z равны $+F_2 5\sqrt{3}/6$; $-F_2/2$; $-F_2\sqrt{2/3}$.

Приводится ли эта система сил к одной равнодействующей? Если приводится, то найти координаты x и z точки пересечения линии действия равнодействующей с плоскостью Oxz

Ответ. Приводится, так как проекции главного вектора и главного момента на координатные оси имеют значения

$$V_x = F_2\sqrt{3}/2,\quad V_y = F_1 - 0{,}5F_2,\quad V_z = 0;$$

$$M_x = 0,\quad M_y = 0,\quad M_z = -a\frac{\sqrt{3}}{6}(F_1 + F_2).$$



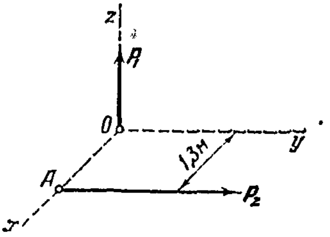
К задаче 7.5

Координаты: $x = \frac{M_z}{V_y} = -\frac{a\sqrt{3}(F_1 + F_2)}{6F_1 - 3F_2}$, $z = 0$.

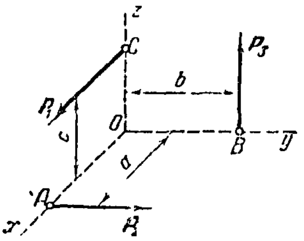
7.5(7.5). К вершинам куба, ребра которого имеют длину 5 см, приложены, как указано на рисунке, шесть равных по модулю сил, по 2 Н каждая. Привести эту систему к простейшему виду.

Ответ: Система приводится к паре, момент которой равен $20\sqrt{3}$ Н · см и составляет с координатными осями углы $\cos\alpha = -\cos\beta = \cos\gamma = \sqrt{3}/3$

7.6(7.6). Систему сил $P_1 = 8$ Н, направленную по Oz, и $P_2 = 12$ Н, направленную параллельно Oy, как указано на рисунке, где $OA = 1{,}3$ м, привести к каноническому виду, определив величину главного вектора V всех этих сил и величину их главного момента M относительно произвольной точки, взятой на центральной винтовой оси. Найти углы α, β и γ, составляемые центральной винтовой осью с координатными осями, а также координаты x и y точки встречи ее с плоскостью Oxy



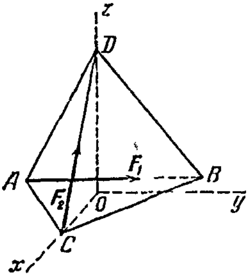
К задаче 7.6



К задаче 7.7

Ответ $V = 14{,}4$ Н, $M = 8{,}65$ Н м, $\alpha = 90°$; $\beta = \operatorname{arctg}(2/3)$; $\gamma = \operatorname{arctg}(3/2)$, $x = 0{,}9$ м, $y = 0$

7.7(7.7). Три силы $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$ и $\boldsymbol{P}_3$ лежат в координатных плоскостях и параллельны осям координат, но могут быть направлены как в ту, так и в другую сторону Точки их приложения A, B и C находятся на заданных расстояниях a, b и c от начала координат. Какому условию должны удовлетворять величины этих сил, чтобы они приводились к одной равнодействующей? Какому условию должны удовлетворять величины этих сил, чтобы существовала центральная винтовая ось, проходящая через начало координат?



К задаче 7.8

Ответ: $\dfrac{a}{P_1} + \dfrac{b}{P_2} + \dfrac{c}{P_3} = 0$, $\dfrac{P_1}{bP_3} = \dfrac{P_2}{cP_1} = \dfrac{P_3}{aP_2}$

В первом ответе P_1, P_2 и P_3 — проекции сил.

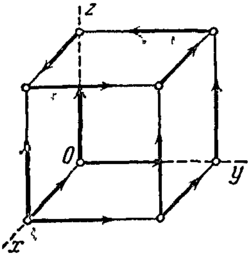
7.8(7.8). К правильному тетраэдру $ABCD$ с ребрами, равными a, приложена сила $\boldsymbol{F}_1$ по ребру AB и сила $\boldsymbol{F}_2$ по ребру CD Найти координаты x и y точки пересечения центральной винтовой оси с плоскостью Oxy

Ответ: $x = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}\,\dfrac{2F_2^2 - F_1^2}{F_1^2 + F_2^2}$, $y = -\dfrac{a}{2}\,\dfrac{F_1F_2}{F_1^2 + F_2^2}$

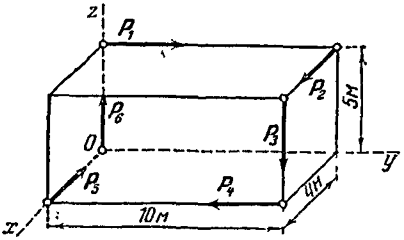
7.9(7.9). По ребрам куба, равным a, действуют двенадцать равных по модулю сил P, как указано на рисунке. Привести эту систему сил к каноническому виду и определить координаты x и y точки пересечения центральной винтовой оси с плоскостью Oxy.

Ответ: $V = 2P\sqrt{6}$, $M = {}^2/_3 Pa\sqrt{6}$, $\cos\alpha = -\cos\beta = -{}^1/_2\cos\gamma = -{}^1/_6\sqrt{6}$, $x = y = {}^2/_3 a$.

7.10(7.10). По ребрам прямоугольного параллелепипеда, соответственно равным 10 м, 4 м и 5 м, действуют шесть сил, указанных на рисунке: $P_1 = 4$ Н, $P_2 = 6$ Н, $P_3 = 3$ Н, $P_4 = 2$ Н, $P_5 = 6$ Н, $P_6 = 8$ Н. Привести эту систему сил к каноническому виду и определить координаты x и y точки пересечения центральной винтовой оси с плоскостью Oxy.

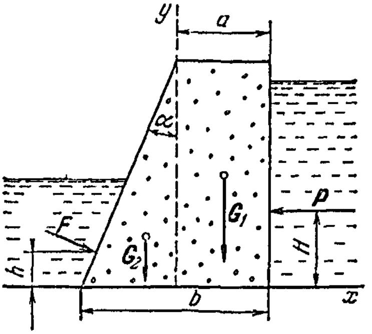


К задаче 7.9

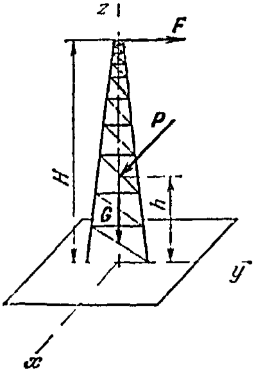


К задаче 7.10

Ответ: $V = 5{,}4$ Н, $M = -47{,}3$ Н·м, $\cos\alpha = 0$, $\cos\beta = 0{,}37$, $\cos\gamma = 0{,}93$, $x = -11{,}9$ м, $y = -10$ м.



К задаче 7.11



К задаче 7.12

7.11(7.11). Равнодействующие $P = 8000$ кН и $F = 5200$ кН сил давления воды на плотину приложены в средней вертикальной плоскости перпендикулярно соответствующим граням на расстоянии $H = 4$ м и $h = 2{,}4$ м от основания. Сила веса $G_1 = 12000$ кН прямоугольной части плотины приложена в ее центре, а сила веса $G_2 = 6000$ кН треугольной части — на расстоянии одной трети длины нижнего основания треугольного сечения от вертикальной грани этого сечения Ширина плотины в основании $b = 10$ м, в верхней части $a = 5$ м, $\operatorname{tg}\alpha = 5/12$. Определить равнодействующую распределенных сил реакции грунта, на котором установлена плотина

Ответ: $R_x = 3200$ кН, $R_y = 20\,000$ кН; уравнение линии действия равнодействующей $125x - 20y + 53 = 0$.

7.12(7.12). Вес радиомачты с бетонным основанием $G = 140$ кН. К мачте приложены сила натяжения антенны $F = 20$ кН и равнодействующая сил давления ветра $P = 50$ кН; обе силы горизонтальны и расположены во взаимно перпендикулярных плоскостях; $H = 15$ м, $h = 6$ м Определить результирующую реакцию грунта, в котором уложено основание мачты

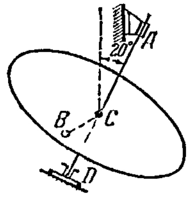
Ответ Силы реакции грунта приводятся к левосторонней динаме, состоящей из силы $V = 150$ кН, направленной по центральной оси

$$\frac{-30 + 14y + 2z}{5} = \frac{30 - 5z - 14x}{2} = \frac{-2x + 5y}{-14}$$

вверх, и пары сил с моментом $M = 60$ кН·м Ось динамы пересекает плоскость основания в точке $x = 2{,}2$ м, $y = 2$ м, $z = 0$

§ 8. Равновесие произвольной системы сил

8.1(8.1). На круглой наклонной площадке, ось которой ACD наклонена к вертикали под углом 20°, укреплено в точке B тело веса 400 Н Определить момент относительно оси AD, создаваемый силой тяжести тела, если радиус $CB = 3$ м горизонтален



К задаче 8 1

Ответ 410 Н·м.

8.2(8.2). Ветряной двигатель имеет четыре крыла, наклоненных под углом $\alpha = 15° = \arcsin 0{,}259$ к плоскости, перпендикулярной оси вращения; равнодействующая сил давления ветра на каждое крыло равна 1 кН, направлена по перпендикуляру к плоскости крыла и приложена в точке, отстоящей на 3 м от оси вращения. Найти вращающий момент

Ответ: 31,1 кН·м.

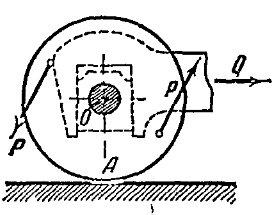
8.3(8.3). Электродвигатель, помещенный на оси O колесного ската трамвайного вагона, стремится повернуть ось против часовой стрелки, причем величина момента вращающей пары сил $(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{P})$ равна 6 кН·м, а радиус колес 60 см.

Определить силу тяги Q колесного ската, предполагая, что он стоит на горизонтальных рельсах Трением качения пренебречь

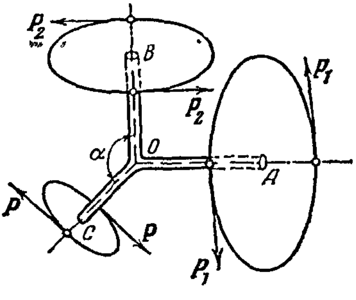
Сначала находим сумму сил трения между колесами и рельсами, взяв моменты сил относительно оси O. Затем проектируем все силы, приложенные к колесному скату, на горизонтальное направление

Ответ $Q = 10$ кН.

8.4(8.4). К окружностям трех дисков: A радиуса 15 см, B радиуса 10 см и C радиуса 5 см приложены пары сил; величины сил, составляющих пары, соответственно равны $P_1 = 10$ Н, $P_2 = 20$ Н и P. Оси OA, OB и OC лежат в одной плоскости; угол AOB прямой. Определить величину силы P и угол $BOC = \alpha$ так, чтобы система трех дисков, будучи совершенно свободной, оставалась в равновесии.



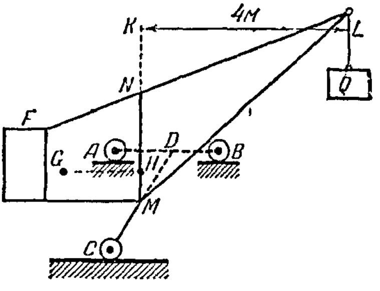
К задаче 8.3



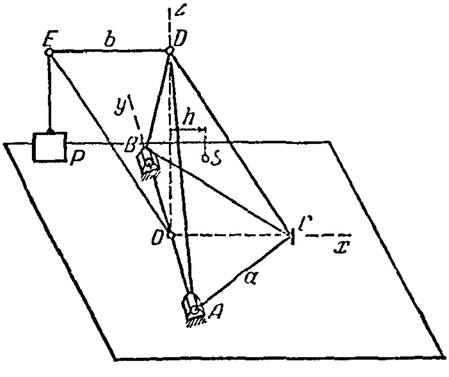
К задаче 8.4

Ответ. $P = 50$ Н, $\alpha = \operatorname{arctg}(-0{,}75) = 143°10'$

8.5(8.5). Подъемный кран установлен на трехколесной тележке ABC. Известны размеры крана: $AD = DB = 1$ м, $CD = 1{,}5$ м, $CM = 1$ м, $KL = 4$ м. Кран уравновешивается противовесом F. Вес крана с противовесом равен $P = 100$ кН и приложен в точке G, лежащей в плоскости $LMNF$ на расстоянии $GH = 0{,}5$ м от оси крана MN, поднимаемый груз Q весит 30 кН. Найти давление колес на рельсы для такого положения крана, когда плоскость его LMN параллельна AB.



К задаче 8.5

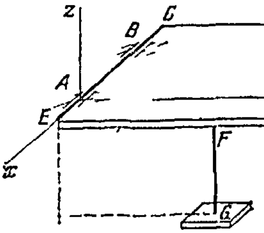


К задаче 8.6

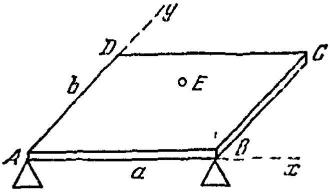
Ответ. $N_A = 8{,}33$ кН, $N_B = 78{,}33$ кН, $N_C = 43{,}33$ кН.

8.6(8.6). Временный подъемный кран состоит из пирамиды с горизонтальным основанием в виде равностороннего треугольника ABC и с вертикальной гранью в виде равнобедренного треугольника ADB, в точках O и D шарнирно закреплена вертикальная ось крана, вокруг которой может вращаться стрела OE, несущая груз P. Основание ABC прикреплено к фундаменту подшипниками A и B и вертикальным болтом C. Определить реакции опор при расположении стрелы в плоскости симметрии крана, если вес груза $P = 12$ кН, вес крана $Q = 6$ кН, причем расстояние его центра тяжести S от оси OD равно $h = 1$ м, $a = 4$ м, $b = 4$ м.

Ответ: $Z_A = Z_B = 15{,}06$ кН, $Z_C = -12{,}12$ кН, $X_A = X_B = 0$.



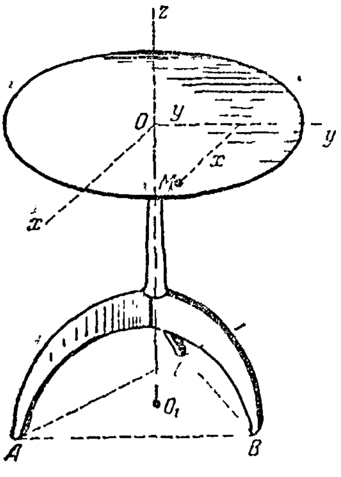
К задаче 8.7



К задаче 8.8

8.7(8.7). Крышка светового машинного люка удерживается в горизонтальном положении стойкой FG, упирающейся в крышку в точке F на расстоянии $EF = 1{,}5$ м от оси крышки. Вес крышки $P = 180$ Н, длина ее $CD = 2{,}3$ м; ширина $CE = 0{,}75$ м, а расстояния шарниров A и B от краев крышки $AE = BC = 0{,}15$ м. Найти реакции шарниров A и B и усилие S в стойке FG.

Ответ: $Z_A = -91$ Н, $Z_B = 136$ Н, $Y_A = Y_B = 0$, $S = 138$ Н.



К задаче 8.9

8.8(8.8). Однородная прямоугольная пластинка $ABCD$, опираясь на три точечные опоры, две из которых расположены в вершинах прямоугольника A и B, а третья — в некоторой точке E, удерживается в горизонтальном положении. Вес пластинки равен P. Давление на опоры в точках A и B соответственно равны $P/4$ и $P/5$. Найти давление N_E на опору в точке E и координаты этой точки, если длины сторон пластинки равны a и b.

Ответ: $N_E = \frac{11}{20}P$, $x = \frac{6}{11}a$, $y = \frac{10}{11}b$.

8.9(8.9). Стол стоит на трех ножках, концы которых A, B и C образуют равносторонний треугольник со стороной a. Вес стола равен P, причем центр тяжести его расположен на вертикали zOO_1, проходящей через центр O_1 треугольника ABC. На столе помещен груз p в точке M, координаты которой x и y; ось Oy параллельна AB. Определить давление каждой ножки на пол.

Ответ. $N_A = \frac{P+p}{3} + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}x - y\right)\frac{p}{a}$, $N_B = \frac{P+p}{3} + \left(y + \frac{\sqrt{3}}{3}x\right)\frac{p}{a}$, $N_C = \frac{P+p}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3}\frac{x}{a}p$.

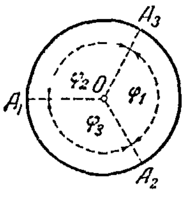
8.10(8.10). Круглый стол стоит на трех ножках A_1, A_2 и A_3, в центре O помещен груз. Какому условию должны удовлетворять центральные углы φ_1, φ_2 и φ_3 для того, чтобы давления на ножки A_1, A_2 и A_3 относились, как $1 : 2 : \sqrt{3}$?

При решении задачи берутся моменты сил относительно двух из радиусов OA_1, OA_2 и OA_3.

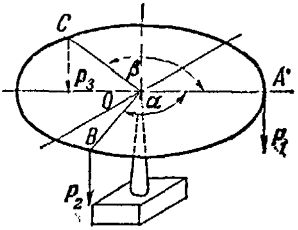
Ответ. $\varphi_1 = 150°$, $\varphi_2 = 90°$, $\varphi_3 = 120°$.

8.11(8.11). Круглая пластинка, весом которой пренебрегаем, покоится в горизонтальном положении, опираясь центром на острие O. Не нарушая равновесия, по окружности пластинки разместили грузы P_1 веса 1,5 Н, P_2 веса 1 Н и P_3 веса 2 Н. Определить углы α и β.

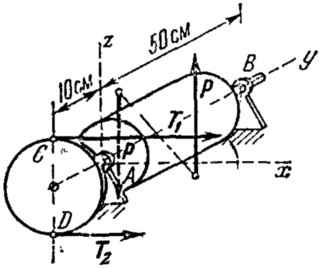
Ответ. $\alpha = 75°30'$, $\beta = 151°$.



К задаче 8.10



К задаче 8.11



К задаче 8.12

8.12(8.12). Ременный шкив CD динамо-машины имеет радиус 10 см, размеры вала AB указаны на рисунке. Натяжение верхней ведущей ветви ремня $T_1 = 100$ Н, нижней ведомой $T_2 = 50$ Н. Определить вращающий момент M и реакции подшипников A и B при равновесии системы, пренебрегая весом частей машины, (P, P) — пара, образуемая силами сопротивления.

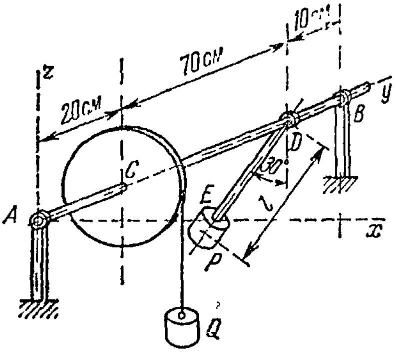
Ответ $M = 5$ Н·м, $X_A = -180$ Н, $X_B = 30$ Н, $Z_A = Z_B = 0$.

8.13(8.13). На горизонтальный вал, лежащий в подшипниках A и B, действуют с одной стороны вес тела $Q = 250$ Н, привязанного к шкиву C радиуса 20 см посредством троса, а с другой стороны вес тела $P = 1$ кН, надетого на стержень DE, неизменно скрепленный с валом AB под прямым углом. Даны расстояния $AC = 20$ см, $CD = 70$ см, $BD = 10$ см. В положении равновесия стержень DE отклонен от вертикали на угол 30°. Определить расстояние l центра тяжести тела P от оси вала AB и реакции подшипников A и B.

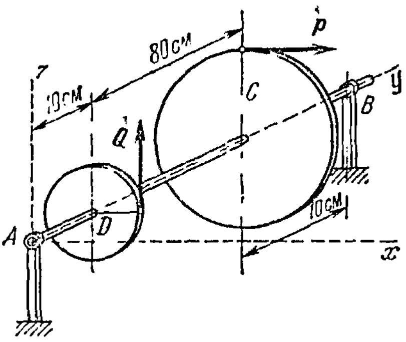
Ответ $l = 10$ см, $Z_A = 300$ Н, $Z_B = 950$ Н, $X_A = X_B = 0$

8.14(8.14). На горизонтальный вал AB насажены зубчатое колесо C радиуса 1 м и шестерня D радиуса 10 см. Другие размеры указаны на рисунке. К колесу C по направлению касательной приложена горизонтальная сила $P = 100$ Н, а к шестерне D, также по касательной, приложена вертикальная сила Q. Определить силу Q и реакции подшипников A и B в положении равновесия.

Ответ $Q = 1$ кН, $X_A = -10$ Н, $X_B = -90$ Н, $Z_A = -900$ Н, $Z_B = -100$ Н.

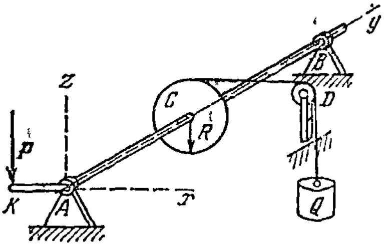


К задаче 8.13

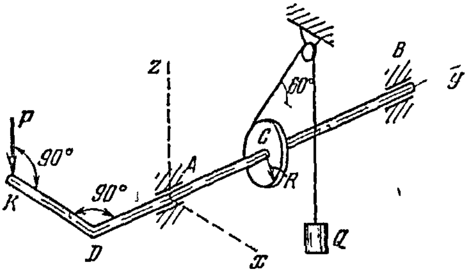


К задаче 8.14

8.15(8.15). Рабочий удерживает груз $Q = 800$ Н с помощью ворота, схематически изображенного на рисунке; радиус барабана $R = 5$ см; длина рукоятки $AK = 40$ см, $AC = CB = 50$ см. Определить давление P на рукоятку и давления оси ворота на опоры A и B при том положении ворота, когда рукоятка AK горизонтальна; сила P вертикальна.



К задаче 8.15



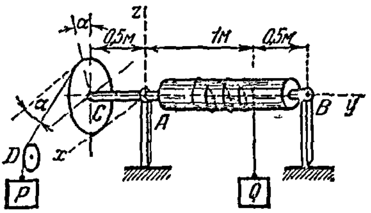
К задаче 8.16

Ответ $P = 100$ Н, $X_A = 400$ Н, $Z_A = -100$ Н, $X_B = 400$ Н, $Z_B = 0$

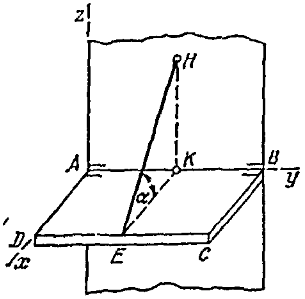
8.16(8.16). С помощью ворота, схематически изображенного на рисунке, удерживается груз $Q = 1$ кН. Радиус барабана $R = 5$ см. Длина рукоятки $KD = 40$ см, $AD = 30$ см; $AC = 40$ см, $CB = 60$ см. Веревка сходит с барабана по касательной, наклоненной к горизонту под углом 60°. Определить давление P на рукоятку и реакции опор A и B при том положении ворота, когда рукоятка KD горизонтальна.

Ответ: $P = 125$ Н, $X_A = -300$ Н, $Z_A = -357$ Н, $X_B = -200$ Н, $Z_B = -384$ Н.

8.17(8.17). На вал AB ворота намотана веревка, поддерживающая груз Q. Радиус колеса C, насаженного на вал, в шесть раз больше радиуса вала; другие размеры указаны на рисунке. Веревка, намотанная на окружность колеса и натягиваемая грузом P весом 60 Н, сходит с колеса по касательной, наклоненной к горизонту под углом $\alpha = 30°$. Определить вес груза Q, при котором ворот остается в равновесии, а также реакции подшипников A и B, пренебрегая весом вала и трением на блоке D



К задаче 8.17

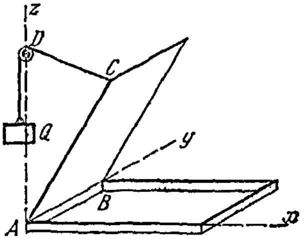


К задаче 8.18

Ответ $Q = 360$ Н, $X_A = -69{,}3$ Н, $Z_A = 160$ Н, $X_B = 17{,}3$ Н, $Z_B = 230$ Н

8.18. Прямоугольная однородная полка $ABCD$ веса G удерживается в горизонтальном положении тросом EH, составляющим с плоскостью полки угол α. Определить натяжение T троса (весом его пренебречь) и реакции петель A и B, если $AK = KB = DE = EC$ и HK перпендикулярно AB

Ответ: $T = \frac{G}{2\sin\alpha}$, $X_A = X_B = \frac{G}{4}\operatorname{ctg}\alpha$, $Z_A = Z_B = \frac{G}{4}$



К задаче 8.19

8.19(8.19). Однородная прямоугольная крышка веса $P = 400$ Н удерживается при открытой на 60° над горизонтом противовесом Q. Определить, пренебрегая трением на блоке D, вес Q и реакции шарниров A и B, если блок D укреплен на одной вертикали с A и $AD = AC$.

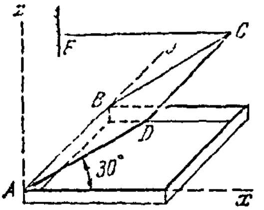
Ответ. $Q = 104$ Н, $X_A = 100$ Н, $Z_A = 173$ Н, $X_B = 0$, $Z_B = 200$ Н.

8.20(8.20). Однородная прямоугольная крышка $ABCD$ ящика может вращаться вокруг горизонтальной оси AB на петлях в точках A и B. Горизонтальная веревка CE, параллельная Ax, удерживает крышку под углом $DAx = 30°$. Определить реакции в петлях, если вес крышки 20 Н.

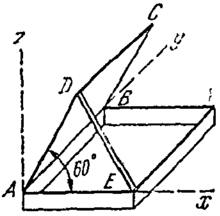
Ответ $X_A = 0$, $Z_A = 10$ Н, $X_B = 17{,}3$ Н, $Z_B = 10$ Н.

8.21(8.21). Крышка прямоугольного ящика $ABCD$ подперта с одной стороны палочкой DE. Вес крышки 120 Н; $AD = AE$; угол $DAE = 60°$. Определить реакции шарниров A и B, а также усилие S в палочке, пренебрегая ее весом.

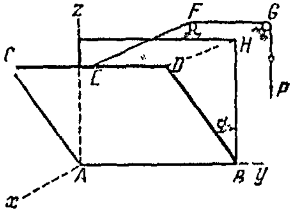
Ответ $X_A = 17{,}3$ Н, $Z_A = 30$ Н, $X_B = 0$, $Z_B = 60$ Н, $S = 31{,}5$ Н.



К задаче 8.20



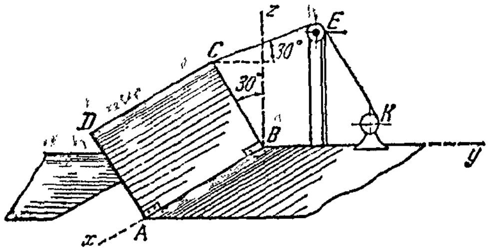
К задаче 8.21



К задаче 8.22

8.22(8.22). Фрамуга $ABDC$ веса $Q = 100$ Н открыта на угол $\alpha = 60°$. Дано $BD = BH$, $CE = ED$; веревка EF параллельна прямой DH. Определить усилие P, необходимое для удержания фрамуги в равновесии, и реакции петель A и B.

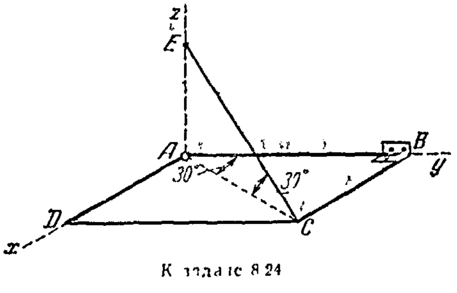
Ответ $P = 50$ Н, $X_A = X_B = 21{,}7$ Н, $Z_A = Z_B = 37{,}5$ Н.



К задаче 8.23

8.23(8.23). Разводная часть $ABCD$ моста веса 15 кН поднята цепью CE, перекинутой через блок E на лебедку K. Точка E находится в вертикальной плоскости CBy. Определить для изображенного на рисунке положения натяжение цепи CE и реакции в точках A и B. Центр тяжести разводной части совпадает с центром прямоугольника $ABCD$.

Ответ $T = 3{,}75$ кН, $Y_A = 0$, $Z_A = 7{,}5$ кН, $Y_B = -3{,}25$ кН, $Z_B = 5{,}625$ кН.



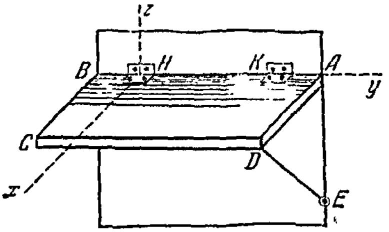
К задаче 8.24

8.24(8.24). Однородная прямоугольная рама веса 200 Н прикреплена к стене при помощи шарового шарнира A и петли B и удерживается в горизонтальном положении веревкой CE, привязанной в точке C рамы и к гвоздю E, вбитому в стену на одной вертикали с A, причем $\angle ECA = \angle BAC = 30°$. Определить натяжение веревки и опорные реакции.

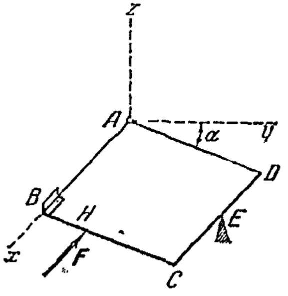
Ответ. $T = 200$ Н, $X_A = 86{,}6$ Н, $Y_A = 150$ Н, $Z_A = 100$ Н, $X_B = Z_B = 0$

8.25(8.25). Полка $ABCD$ вагона, которая может вращаться вокруг оси AB, удерживается в горизонтальном положении стержнем ED, прикрепленным при помощи шарнира E к вертикальной стене BAE Вес полки и лежащего на ней груза P равен 800 Н и приложен в точке пересечения диагоналей прямоугольника $ABCD$. Даны размеры. $AB = 150$ см, $AD = 60$ см, $AK = BH = 25$ см Длина стержня $ED = 75$ см. Определить усилие S в стержне ED, пренебрегая его весом, и реакции петель K и H

Ответ $S = 666{,}7$ Н, $X_K = -666{,}7$ Н, $Z_K = -100$ Н, $X_H = 133{,}3$ Н, $Z_H = 500$ Н



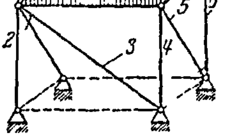
К задаче 8.25



К задаче 8.26

8.26(8.26). Квадратная однородная пластинка $ABCD$ со стороной $a = 30$ см и веса $P = 5$ Н закреплена в точке A при помощи шарового шарнира, а в точке B при помощи цилиндрического шарнира. Сторона AB горизонтальна. В точке E пластинка опирается на острие. В точке H на пластинку действует сила F параллельно стороне AB Найти реакции в точках A, B и E, если $CE = ED$, $BH = 10$ см, $F = 10$ Н и пластинка образует с горизонтальной плоскостью угол $\alpha = 30°$.

Ответ: $X_A = 10$ Н, $Y_A = 2{,}35$ Н, $Z_A = -0{,}11$ Н, $Y_B = -3{,}43$ Н, $Z_B = 3{,}23$ Н, $R_E = 2{,}17$ Н.



К задаче 8.27

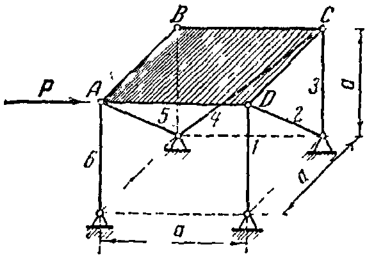
8.27(8.27). Однородная горизонтальная плита веса P, имеющая форму прямоугольного параллелепипеда, прикреплена неподвижно к земле шестью прямолинейными стержнями Определить усилия в опорных стержнях, обусловленные весом плиты, если концы стержней прикреплены к плите и неподвижным устоям шаровыми шарнирами

Ответ: $S_1 = S_3 = S_4 = S_5 = 0$, $S_2 = S_6 = -\frac{P}{2}$.

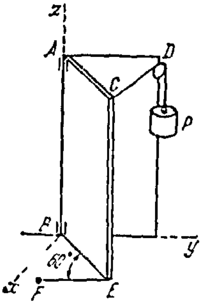
8.28(8.28). Определить усилия в шести опорных стержнях, поддерживающих квадратную плиту $ABCD$, при действии горизонтальной силы P вдоль стороны AD. Размеры указаны на рисунке

Ответ: $S_1 = P$, $S_2 = -P\sqrt{2}$, $S_3 = -P$, $S_4 = P\sqrt{2}$, $S_5 = P\sqrt{2}$, $S_6 = -P$

8.29(8.29). Прямоугольная дверь, имеющая вертикальную ось вращения AB, открыта на угол $CAD = 60°$ и удерживается в этом положении двумя веревками, из которых одна, CD, перекинута через блок и натягивается грузом $P = 320$ Н, другая, LF, привязана к точке F пола. Вес двери 640 Н; ее ширина $AC = AD = 1{,}8$ м, высота $AB = 2{,}4$ м. Пренебрегая трением на блоке, определить натяжение T веревки LF, а также реакции цилиндрического шарнира в точке A и подпятника в точке B.



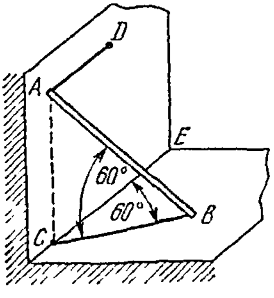
К задаче 8.28



К задаче 8.29

Ответ. $T = 320$ Н, $X_A = 69$ Н, $Y_A = -280$ Н, $X_B = 208$ Н, $Y_B = 440$ Н, $Z_B = 640$ Н

8.30(8.30). Стержень AB удерживается в наклонном положении двумя горизонтальными веревками AD и BC. При этом в точке A стержень опирается на вертикальную стену, на которой находится точка D, а в точке B — на горизонтальный пол. Точки A и C лежат на одной вертикали. Вес стержня 8 Н. Трением в точках A и B пренебрегаем. Проверить, может ли стержень оставаться в равновесии, и определить натяжения T_A и T_B веревок и реакции опорных плоскостей, если $\angle ABC = \angle BCE = 60°$



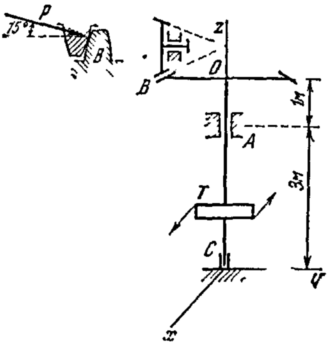
К задаче 8.30

Ответ. $T_A = 1{,}15$ Н, $T_B = 2{,}3$ Н, $R_A = 2$ Н, $R_B = 8$ Н

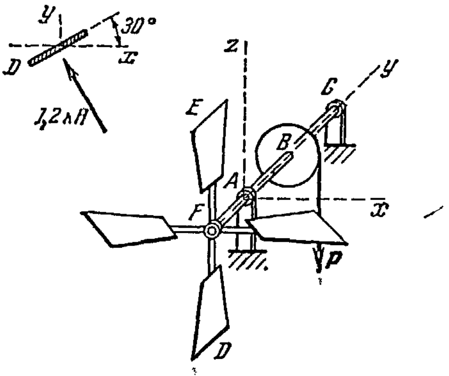
8.31(8.31). Пара сил, вращающая водяную турбину T и имеющая момент 1,2 кН·м, уравновешивается давлением на зубец B конического зубчатого колеса OB и реакциями опор. Давление на зубец перпендикулярно к радиусу $OB = 0{,}6$ м и составляет с горизонтом угол $\alpha = 15° = \operatorname{arctg} 0{,}268$. Определить реакции подпятника C и подшипника A, если вес турбины с валом и колесом равен 12 кН и направлен вдоль оси OC, а расстояния $AC = 3$ м, $AO = 1$ м.

Ответ $X_A = 2{,}667$ кН, $X_C = -0{,}667$ кН, $Y_A = -Y_C = 0{,}107$ кН, $Z_C = 12{,}54$ кН

8.32(8.32). Ветряной двигатель с горизонтальной осью AC имеет четыре симметрично расположенных крыла, плоскости которых составляют с вертикальной плоскостью, перпендикулярной оси AC, равные углы 30° На расстоянии 2 м от оси к каждому крылу приложена нормально к его плоскости равнодействующая сил давления ветра, равная 1,2 кН (крыло D в проекции на плоскость xy изображено отдельно). Ось двигателя опирается в точке A на подшипник, в точке C — на подпятник и удерживается в покое вертикальным давлением P на зубец колеса B, производимым не показанной на рисунке шестерней. Радиус колеса B равен 1,2 м; расстояния $BC = 0{,}5$ м, $AB = 1$ м, $AF = 0{,}5$ м Определить давление P и реакции опор



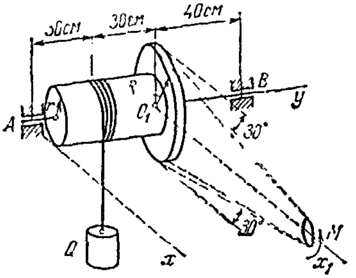
К задаче 8.31



К задаче 8.32

Ответ. $P = 4$ кН, $Z_A = 1{,}333$ кН, $Y_C = -0{,}416$ кН, $Z_C = 2{,}667$ кН, $X_1 = X_C = 0$

8.33(8.34). Груз Q равномерно поднимается мотором M посредством бесконечной цепи Определить реакции опор A и B и натяжения в цепи, если ветви цепи наклонены к горизонту под углами 30° (ось O_1x_1 параллельна оси Ax). Известно, что $r = 10$ см, $R = 20$ см, $Q = 10$ кН, натяжение ведущей части цепи вдвое больше натяжения ведомой части, т е $T_1 = 2T_2$

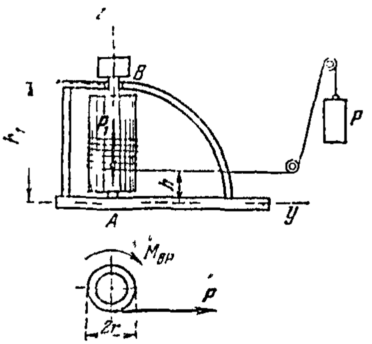


К задаче 8.33

Ответ $T_1 = 10$ кН, $T_2 = 5$ кН, $X_A = -5{,}2$ кН, $Z_A = 6$ кН, $X_B = -7{,}8$ кН, $Z_B = 1{,}5$ кН

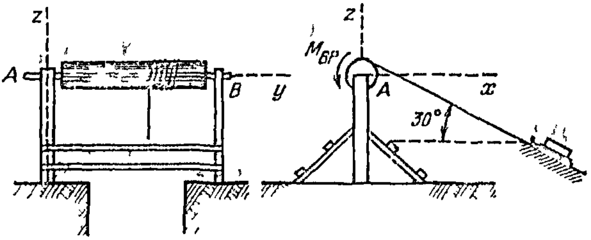
8.34(8.35). Для подъема копровой бабы веса $P = 3$ кН служит вертикальный ворот, вал которого радиуса $r = 20$ см опирается нижним концом на подпятник A, а верхним концом удерживается в подшипнике B Вал приводится во вращение мотором. Найти необходимый для равномерного подъема копровой бабы вращающий момент мотора, а также реакции в подпятнике A и подшипнике B При этом дано: $h_1 = 1$ м, $h = 30$ см и вес вращающихся частей ворота $P_1 = 1$ кН.

Ответ $M_{вр} = 0{,}6$ кН·м, $X_A = 0$, $Y_A = -2{,}1$ кН, $Z_A = 1$ кН, $X_B = 0$, $Y_B = -0{,}9$ кН



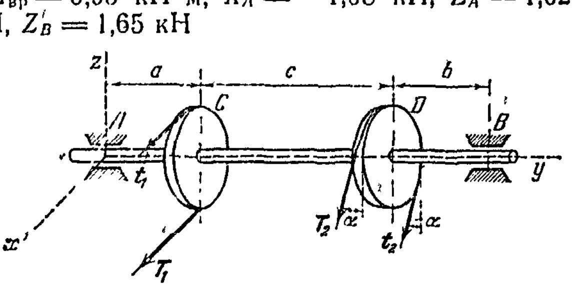
К задаче 8.34

8.35(8.36). Ворот, служащий для подъема породы из наклонного шурфа, состоит из вала радиуса 0,25 м и длины 1,5 м Вал приводится во вращение при помощи мотора (на рисунке не показан). Определить реакции опор и вращающий момент $M_{вр}$ мотора, если вес вала равен 0,8 кН, вес груза 4 кН, коэффициент трения между грузом и поверхностью шурфа равен 0,5, угол наклона шурфа к горизонту равен 30° и место схода троса с вала находится на расстоянии 50 см от подшипника B Вращение вала считать равномерным



К задаче 8.35

Ответ $M_{вр} = 0{,}93$ кН·м, $X_A = -1{,}08$ кН, $Z_A = 1{,}02$ кН, $X_B = -2{,}15$ кН, $Z_B = 1{,}65$ кН

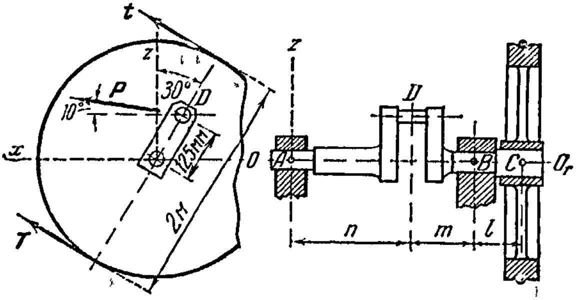


К задаче 8.36

8.36(8.37). Горизонтальный вал трансмиссии, несущий два шкива C и D ременной передачи, может вращаться в подшипниках A и B Радиусы шкивов: $r_C = 20$ см, $r_D = 25$ см; расстояния шкивов от подшипников: $a = b = 50$ см; расстояние между шкивами $c = 100$ см. Натяжения ветвей ремня, надетого на шкив C, горизонтальны и имеют величины T_1 и t_1, причем $T_1 = 2t_1 = 5$ кН, натяжения ветвей ремня, надетого на шкив D, образуют с вертикалью угол $\alpha = 30°$ и имеют величины T_2 и t_2, причем $T_2 = 2t_2$. Определить натяжения T_2 и t_2 в условиях равновесия и реакции подшипников, вызванные натяжениями ремней.

Ответ $T_2 = 4$ кН, $t_2 = 2$ кН, $X_A = -6{,}375$ кН, $Z_A = 13$ кН, $X_B = -4{,}125$ кН, $Z_B = 3{,}9$ кН.

8.37(8.38). Давление шатуна двигателя, сосредоточенное в середине D шейки коленчатого вала, равно $P = 20$ кН и направлено под углом 10° к горизонту, причем плоскость ODO_1, проходящая через оси вала OO_1 и шейки D, образует с вертикалью угол 30°.



К задаче 8.37

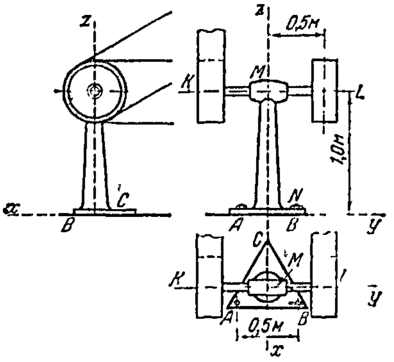
От маховика усилие передается на завод канатом, ветви которого параллельны и наклонены к горизонту под углом 30°. Действие силы P уравновешивается натяжениями T и t ветвей каната и реакциями подшипников A и B. Вес маховика 13 кН, диаметр его $d = 2$ м, сумма натяжений ветвей каната $T + t = 7{,}5$ кН, а указанные на рисунке расстояния равны точки D от оси OO_1 $r = 125$ мм, $l = 250$ мм, $m = 300$ мм, $n = 450$ мм. Определить реакции подшипников A и B и натяжения t и T.

Ответ: $X_A = -5{,}7$ кН, $Z_A = -4{,}47$ кН, $X_B = -20{,}48$ кН, $Z_B = 10{,}25$ кН, $T = 4{,}92$ кН, $t = 2{,}58$ кН.

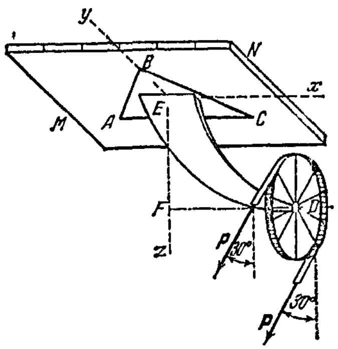
8.38(8.39). Для передачи вращения с одного вала на другой, ему параллельный, установлены два одинаковых вспомогательных шкива, заклиненных на горизонтальной оси KL. Ось может вращаться в подшипнике M, укрепленном на колонке MN. Треугольное основание этой колонки притянуто к полу двумя болтами A и B и свободно опирается точкой C. Болт A проходит через круглое отверстие в основании, болт же B — через продолговатое отверстие, имеющее направление линии AB. Ось колонки проходит через центр треугольника ABC.

Определить реакции в точках A, B и C, если расстояние оси KL от пола равно 1 м, расстояния середин шкивов от оси колонки равны 0,5 м и натяжения всех четырех ветвей ремней принимаются одинаковыми и равными 600 Н Ветви правого ремня горизонтальны, а ветви левого наклонены к горизонту под углом 30°. Вес всей установки равен 3 кН и приложен к точке, лежащей на оси колонки; даны размеры· $AB = BC = CA = 50$ см

Ответ: $X_A = 960$ Н, $Y_A = 0$, $Z_A = -2{,}39$ кН; $X_B = 1{,}28$ кН; $Z_B = -1{,}19$ кН, $Z_C = 5{,}97$ кН



К задаче 8.38



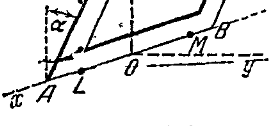
К задаче 8.39

8.39(8.40). Подвеска подшипника ременного шкива D прикреплена к гладкому горизонтальному потолку MN в точках A и C и упирается в него точкой B Эти точки лежат в вершинах равностороннего треугольника ABC со стороной 30 см Положение центра ременного шкива D определяется вертикалью $EF = 40$ см, опущенной из центра E треугольника ABC, и горизонталью $ГD = 50$ см, параллельной стороне AC. Плоскость шкива перпендикулярна прямой FD Натяжение P каждой ветви ремня равно 1200 Н и наклонено к вертикали под углом 30°. Определить реакции в опорах A, B и C, пренебрегая весом частей

Ответ $Y_A = 1{,}4$ кН, $Z_A = 1{,}85$ кН, $Z_B = 1{,}15$ кН, $Y_C = -2{,}6$ кН, $Z_C = -5{,}08$ кН.

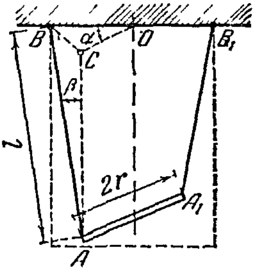
8.40(8.41). Картина в раме, имеющей форму прямоугольника $ABCD$, подвешена на вертикальной стене при помощи шнура EKF, надетого на крюк K так, что край AB горизонтален, точки E, $Г$ — середины сторон AD и BC Картина наклонена к стене под углом $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{3}{4}$ и опирается на два гвоздя L и M, вбитых в стену, причем $AL = MB$ Размеры картины: $AB = 60$ см, $AD = 75$ см; вес картины 200 Н и приложен в центре прямоугольника $ABCD$; длина шнура 85 см Определить натяжение T шнура и давления на гвозди L и M

Ответ: $T = 85$ Н, $Y_L = Y_M = -45$ Н, $Z_L = Z_M = -60$ Н.



К задаче 8.40

8.41(8.42). Бифиляр состоит из однородного стержня AA_1, подвешенного на двух нерастяжимых нитях длины l, которые укреплены в точках B и B_1. Длина стержня $AA_1 = BB_1 = 2r$, а вес P. Стержень повернут вокруг вертикальной оси на угол α. Определить момент M пары, которую нужно приложить к стержню, чтобы удержать его в равновесии, а также натяжение T нитей.

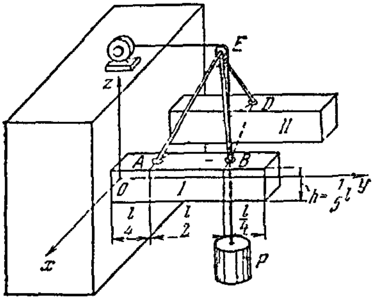


К задаче 8.41

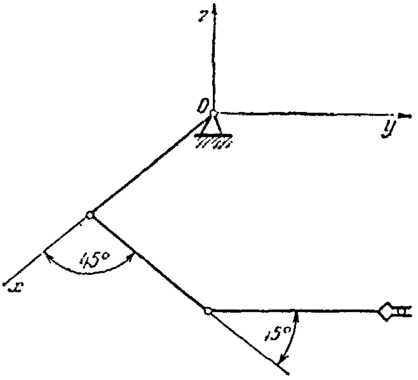
Ответ: $M = \dfrac{Pr^2 \sin\alpha}{\sqrt{l^2 - 4r^2 \sin^2(\alpha/2)}}$,

$T = \dfrac{lP}{2\sqrt{l^2 - 4r^2 \sin^2(\alpha/2)}}$.

8.42(8.44). Тренога $ABDE$, имеющая форму правильной пирамиды, укреплена шарнирно на двух консольных балках. Через блок, укрепленный в вершине E треноги, перекинут трос, равномерно поднимающий с помощью лебедки груз веса P. От блока к лебедке трос тянется параллельно консоли. Определить реакции заделки первой консоли, пренебрегая ее весом и весом треноги. Высота треноги равна $l/2$.



К задаче 8.42



К задаче 8.43

Ответ. $X_0 = -\dfrac{\sqrt{3}}{9}P$, $\quad Y_0 = P$, $\quad Z_0 = \dfrac{2}{3}P$, $\quad M_x = -\dfrac{9}{15}Pl$,

$M_y = -\dfrac{\sqrt{3}}{90}Pl$, $M_z = -\dfrac{\sqrt{3}}{36}Pl$.

8.43. Четырехзвенный механизм робота-манипулятора расположен в горизонтальной плоскости Oxy. Длины всех звеньев одинаковы и равны l, масса каждого звена m. Масса объекта манипулирования $2m$. Найти моменты сил тяжести относительно координатных осей. Звенья считать однородными стержнями.

Ответ. $M_x = -1{,}98\ mgl$, $M_y = 6{,}98\ mgl$, $M_z = 0$

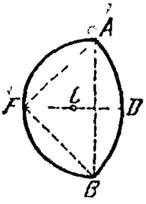
§ 9. Центр тяжести

9.1(9.1). Определить положение центра тяжести C стержневого контура $AFBD$, состоящего из дуги ADB четверти окружности радиуса $FD = R$ и из дуги полуокружности AFB, построенной на хорде AB как на диаметре. Линейные плотности стержней одинаковы.

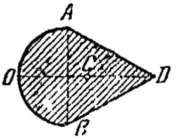
Ответ: $CF = R(\sqrt{2} - 1) + \frac{2R}{\pi}(3 - 2\sqrt{2}) = 0{,}524R$.

9.2(9.2). Определить положение центра тяжести C площади, ограниченной полуокружностью AOB радиуса R и двумя прямыми равной длины AD и DB, причем $OD = 3R$.

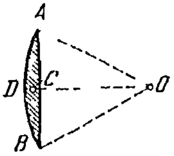
Ответ: $OC = \frac{3\pi + 16}{3\pi + 12} R = 1{,}19R$.



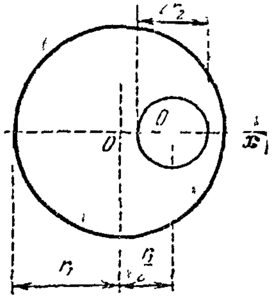
К задаче 9.1



К задаче 9.2



К задаче 9.3



К задаче 9.4

9.3(9.3). Найти центр тяжести C площади кругового сегмента ADB радиуса $AO = 30$ см, если угол $AOB = 60°$.

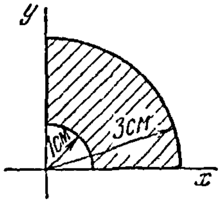
Ответ $OC = 27{,}7$ см.

9.4(9.4). Определить положение центра тяжести однородного диска с круглым отверстием, предполагая радиус диска равным r_1, радиус отверстия равным r_2 и центр этого отверстия находящимся на расстоянии $r_1/2$ от центра диска.

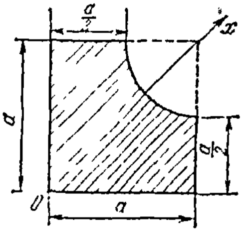
Ответ: $x_C = -\frac{r_1 r_2^2}{2(r_1^2 - r_2^2)}$.

9.5(9.5). Определить координаты центра тяжести четверти кольца, показанного на рисунке.

Ответ: $x_C = y_C = 1{,}38$ см.



К задаче 9.5



К задаче 9.6

9.6(9.6). Найти координаты центра тяжести фигуры, изображенной на рисунке.

Ответ. $x_C = 0{,}61a$.

9.7(9.7). Найти центр тяжести поперечного сечения плотины, показанного на рисунке, принимая, что удельный вес бетона равен 24 кН/м³, а земляного грунта 16 кН/м³.

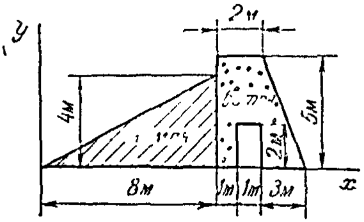
Ответ $x_C = 8{,}19$ м, $y_C = 1{,}9$ м

9.8(9.8). Найти координаты центра тяжести поперечного сечения неравнобокого уголка, полки которого имеют ширину $OA = a$, $OB = b$ и толщину $AC = BD = d$

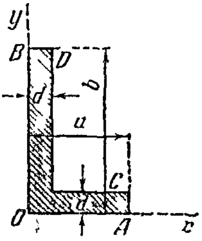
Ответ. $x = \dfrac{a^2 + bd - d^2}{2(a + b - d)}$, $y = \dfrac{b^2 + ad - d^2}{2(b + a - d)}$

9.9(9.9). Найти расстояние центра тяжести таврового сечения $ABCD$ от стороны его AC, если высота тавра $BD = h$, ширина полки $AC = a$, толщина полки равна d и толщина стенки равна b.

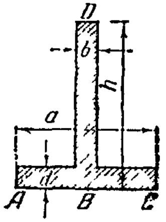
Ответ. $\dfrac{ad^2 + bh^2 - bd^2}{2(ad + bh - bd)}$



К задаче 9.7



К задаче 9.8



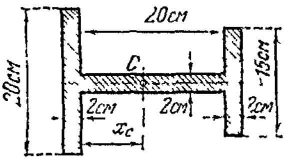
К задаче 9.9

9.10(9.10). Найти центр тяжести двутаврового профиля, размеры которого указаны на рисунке

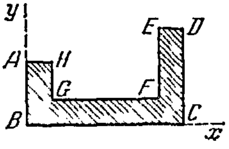
Ответ $x_C = 9$ см

9.11(9.11). Найти координаты центра тяжести однородной пластинки, изображенной на рисунке, зная, что $AH = 2$ см, $HG = 1{,}5$ см, $AB = 3$ см, $BC = 10$ см, $EF = 4$ см, $CD = 2$ см.

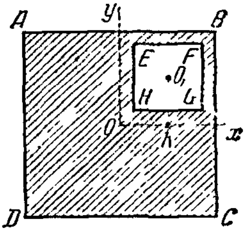
Ответ. $x = 5\frac{10}{13}$ см, $y = 1\frac{10}{13}$ см.



К задаче 9.10



К задаче 9.11



К задаче 9.12

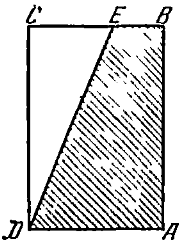
9.12(9.12). В однородной квадратной доске $ABCD$ со стороной $AB = 2$ м вырезано квадратное отверстие $EFGH$, стороны которого соответственно параллельны сторонам $ABCD$ и равны 0,7 м каждая. Определить координаты x и y центра тяжести оставшейся части доски, зная, что $OK = O_1K = 0{,}5$ м, где O и O_1 — центры квадратов, OK и O_1K соответственно параллельны сторонам квадратов

Ответ. $x = y = -0{,}07$ м.

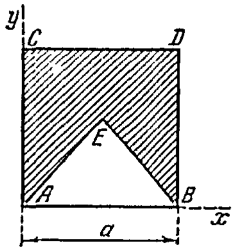
9.13(9.13). Провести через вершину D однородного прямоугольника $ABCD$ прямую DE так, чтобы при подвешивании отрезанной по этой прямой трапеции $ABED$ за вершину E сторона AD, равная a, была горизонтальна.

Ответ $BE = 0{,}366a$

9.14(9.14). Дан квадрат $ABDC$, сторона которого равна a. Найти внутри него такую точку E, чтобы она была центром тяжести площади, которая получится, если из квадрата вырезать равнобедренный треугольник AEB.



К задаче 9.13



К задаче 9.14

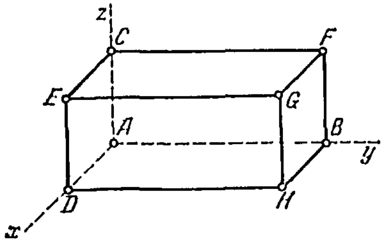
Ответ $x_E = a/2, y_E = 0{,}634a$.

9.15. Четыре человека несут однородную треугольную пластину. Двое взялись за две вершины, остальные — за стороны, примыкающие к третьей вершине. На каком расстоянии от третьей вершины они должны поместиться, для того чтобы каждый из четырех поддерживал четверть полного веса пластины?

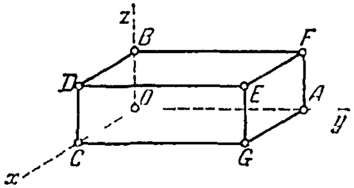
Ответ. На расстоянии, равном 1/3 длины соответствующей стороны.

9.16(9.16). Определить координаты центра тяжести системы грузов, расположенных в вершинах прямоугольного параллелепипеда, ребра которого соответственно равны $AB = 20$ см, $AC = 10$ см, $AD = 5$ см. Веса грузов в вершинах A, B, C, D, E, F, G, H соответственно равны 1 Н, 2 Н, 3 Н, 4 Н, 5 Н, 3 Н, 4 Н, 3 Н.

Ответ. $x = 3{,}2$ см, $y = 9{,}6$ см, $z = 6$ см.



К задаче 9.16



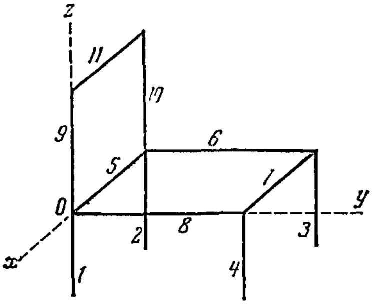
К задаче 9.17

9.17(9.17). Определить координаты центра тяжести контура прямоугольного параллелепипеда, ребра которого суть однородные бруски длиной $OA = 0{,}8$ м, $OB = 0{,}4$ м, $OC = 0{,}6$ м. Веса брусков равны соответственно $OA = 250$ Н, OB, OC и CD по 75 Н, CG — 200 Н, AF — 125 Н, AG и GE по 50 Н, BD, BF, DE и EF по 25 Н.

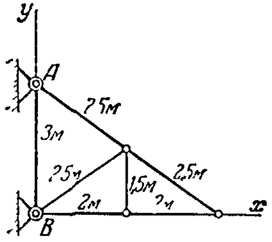
Ответ. $x = 0{,}263$ м, $y = 0{,}4$ м, $z = 0{,}105$ м.

9.18(9.18). Найти координаты центра тяжести тела, имеющего вид стула, состоящего из стержней одинаковой длины и веса. Длина стержня равна 44 см.

Ответ. $x = -22$ см, $y = 16$ см, $z = 0$.



К задаче 9.18



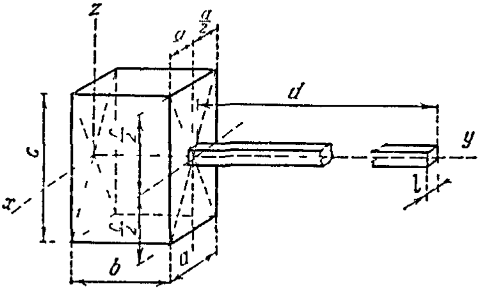
К задаче 9.19

9.19(9.19). Найти координаты центра тяжести плоской фермы, состоящей из семи стержней, длины которых указаны на рисунке, если вес 1 м для всех стержней один и тот же.

Ответ. $x = 1,47$ м, $y = 0,94$ м.

9.20(9.20). Найти координаты центра тяжести деревянного молотка, состоящего из прямоугольного параллелепипеда и ручки с квадратным сечением. Дано $a = 10$ см, $b = 8$ см, $c = 18$ см, $d = 40$ см, $l = 3$ см.

Ответ. $x = 0$, $y = 8,8$ см, $z = 0$.



К задаче 9.20

9.21(9.21). Корпус легкого крейсера весит 19000 кН. Центр тяжести корпуса находится по вертикали над килем на высоте $y_1 = 6$ м. После спуска на воду внутри корпуса установлены главные машины и котлы. Главные машины весят 4500 кН, и ордината центра тяжести их $y_2 = 3$ м. Вес котлов равен 5000 кН, и ордината центра тяжести их $y_3 = 4,6$ м. Определить ординату y_C общего центра тяжести корпуса, машин и котлов.

Ответ. $y_C = 5,28$ м.

9.22(9.22). На корабле водоизмещением в 45000 кН груз весом в 300 кН перемещен из носового отсека в кормовой на расстояние 60 м. Насколько переместился общий центр тяжести корабля и груза?

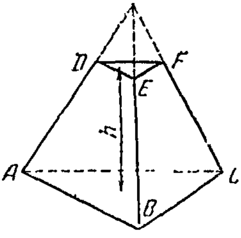
Ответ. На 0,4 м.

9.23(9.23). Для однородного тетраэдра $ABCDEF$, усеченного параллельно основанию, даны: площадь $ABC = a$, площадь $DEF = b$, расстояние между ними h. Найти расстояние z центра тяжести данного усеченного тетраэдра от основания ABC.

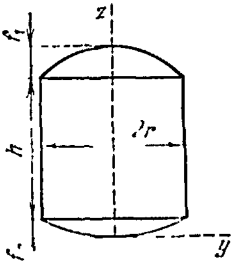
Ответ: $z = \frac{h}{4}\,\frac{a + 2\sqrt{ab} + 3b}{a + \sqrt{ab} + b}$.

9.24(9.24). Корпус якорной подводной мины имеет форму цилиндра с выпуклыми сферическими днищами. Радиус цилиндрического пояса $r = 0{,}4$ м, высота цилиндрического пояса $h = 2r$, высоты сферических сегментов соответственно равны $f_1 = 0{,}5r$ и $f_2 = 0{,}2r$. Найти центр тяжести поверхности корпуса мины.

Ответ. $x_C = y_C = 0$, $z_C = 1{,}267r = 0{,}507$ м.



К задаче 9.23



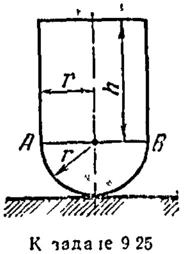
К задаче 9.24

9.25(9.26). Найти предельную высоту h цилиндра, при которой тело, состоящее из цилиндра и полушара одинаковой плотности и одинакового радиуса r, теряет устойчивость в положении равновесия, когда оно опирается поверхностью полушара на гладкую горизонтальную плоскость.

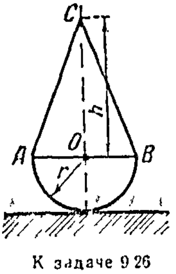
Центр тяжести всего тела должен совпадать с центром полушара. Расстояние центра тяжести однородного полушара от его основания равно $^3/_8 r$.

Ответ. $h = r/\sqrt{2}$.

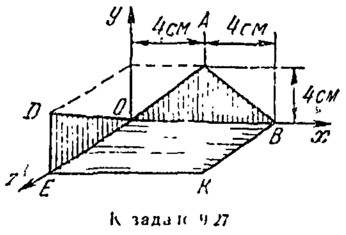
9.26(9.27). Найти предельную высоту h конуса, при которой тело, состоящее из конуса и полушара одинаковой плотности и радиуса r, теряет устойчивость в положении равновесия при условии предыдущей задачи.



К задаче 9.25



К задаче 9.26



К задаче 9.27

Ответ. $h = r\sqrt{3}$.

9.27(9.28). Тонкий однородный лист изогнут в виде двух треугольников и квадрата, как показано на рисунке: равнобедренный треугольник OAB лежит в плоскости xy, прямоугольный треугольник ODE — в плоскости yz (вершина прямого угла — точка E), квадрат $OBKE$ — в горизонтальной плоскости. Определить координаты центра тяжести изогнутого листа.

Ответ. $x_C = 3{,}33$ см, $y_C = 0{,}444$ см, $z_C = 3{,}55$ см.

ОТДЕЛ ВТОРОЙ
КИНЕМАТИКА

ГЛАВА III
КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

§ 10. Траектория и уравнения движения точки

10.1(10.1). По данному уравнению движения точки на произвольно выбранной траектории построить через равные промежутки времени шесть положений точки, определить расстояние s по траектории от начала отсчета до конечного положения точки и пройденный ею путь σ за указанный промежуток времени (s и σ — в сантиметрах, t — в секундах)

1) $s = 5 - 4t + t^2$, $0 \leqslant t \leqslant 5$

Ответ $s = 10$ см, $\sigma = 13$ см

2) $s = 1 + 2t - t^2$, $0 \leqslant t \leqslant 2{,}5$

Ответ $s = -0{,}25$ см, $\sigma = 3{,}25$ см

3) $s = 4 \sin 10t$, $\pi/20 \leqslant t \leqslant 3\pi/10$.

Ответ $s = 0$, $\sigma = 20$ см

10.2(10.2). По данным уравнениям движения точки найти уравнения ее траектории в координатной форме и указать на рисунке направление движения

1) $x = 3t - 5$, $y = 4 - 2t$.

Ответ Полупрямая $2x + 3y - 2 = 0$ с началом в точке $x = -5$, $y = 4$

2) $x = 2t$, $y = 8t^2$

Ответ Правая ветвь параболы $y = 2x^2$ с начальной точкой $x = 0$, $y = 0$

3) $x = 5 \sin 10t$, $y = 3 \cos 10t$

Ответ: Эллипс $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ с начальной точкой $x = 0$, $y = 3$

4) $x = 2 - 3 \cos 5t$, $y = 4 \sin 5t - 1$

Ответ: Эллипс $\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{16} = 1$ с начальной точкой $x = -1$, $y = -1$.

5) $x = \operatorname{ch} t = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$, $y = \operatorname{sh} t = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$.

Ответ. Верхняя часть правой ветви гиперболы $x^2 - y^2 = 1$ с начальной точкой $x = 1$, $y = 0$.

10.3(10.3). Построить траекторию точки, радиус-вектор которой изменяется согласно уравнению (r_0 и e — постоянные заданные векторы, i и j — координатные орты)

1) $r = r_0 + t\cdot e$

Ответ. Полупрямая, проходящая через начальную точку $M_0(r_0)$ параллельно вектору e.

2) $r = r_0 + \cos t\cdot e$.

Ответ. Отрезок M_0M_1 прямой линии, проходящей через точку $M(r_0)$ параллельно вектору e. Начальная точка $M_0(r_0 + e)$, вторая крайняя точка $M_1(r_0 - e)$. При $t \to \infty$ конец радиус-вектора пройдет бесчисленное число раз через каждую точку траектории.

3) $r = a\cos\frac{\pi}{1+t^2}\, i + b\sin\frac{\pi}{1+t^2}\, j$.

Ответ: Отрезок верхней части эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Точка начинает движение от левой вершины эллипса, монотонно приближаясь к его правой вершине.

10.4(10.4). По заданным уравнениям движения точки найти уравнение ее траектории, а также указать закон движения точки по траектории, отсчитывая расстояние от начального положения точки.

1) $x = 3t^2$, $y = 4t^2$

Ответ. Полупрямая $4x - 3y = 0$, $s = 5t^2$.

2) $x = 3\sin t$, $y = 3\cos t$.

Ответ: Окружность $x^2 + y^2 = 9$, $s = 3t$.

3) $x = a\cos^2 t$, $y = a\sin^2 t$

Ответ. Отрезок прямой $x + y - a = 0$, причем $0 \leqslant x \leqslant a$; $s = a\sqrt{2}\sin^2 t$.

4) $x = 5\cos 5t^2$, $y = 5\sin 5t^2$

Ответ. Окружность $x^2 + y^2 = 25$, $s = 25t^2$.

10.5(10.5). Мостовой кран движется вдоль мастерской согласно уравнению $x = t$; по крану катится в поперечном направлении тележка согласно уравнению $y = 1{,}5t$ (x и y — в метрах, t — в секундах). Цепь укорачивается со скоростью $v = 0{,}5$ м/с. Определить траекторию центра тяжести груза; в начальном положении центр тяжести груза находился в горизонтальной плоскости Oxy; ось Oz направлена вертикально вверх.

Ответ. Траектория — прямая $y = 1{,}5x$; $z = 0{,}5x$.

10.6(10.6). Движение точки, описывающей фигуру Лиссажу, задается уравнениями $x = 3\sin t$, $y = 2\cos 2t$ (t — в секундах). Найти уравнение траектории, вычертить ее и указать направление движения точки в различные моменты времени. Указать также ближайший после начала движения момент времени t_1, когда траектория пересечет ось Ox.

Ответ. Часть параболы $4x^2 + 9y = 18$, вдоль которой $|x| \leqslant 3$, $|y| \leqslant 2$, $t_1 = \pi/4$ с.

10.7(10.7). При соответствующем выборе осей координат уравнения движения электрона в постоянном магнитном поле определяются равенствами $x = a\sin kt$, $y = a\cos kt$, $z = vt$, где a, k и

ν — некоторые постоянные, зависящие от напряженности магнитного поля, массы, заряда и скорости электрона. Определить траекторию электрона и закон движения его по траектории.

Ответ. Электрон движется по винтовой линии. Начальная точка $x=0$, $y=a$, $z=0$; шаг винта $h=\frac{2\pi}{k}\nu$. Закон движения электрона по винтовой линии $s=\sqrt{a^2k^2+\nu^2}t$.

10.8(10.8). Гармонические колебания точки определяются законом $x=a\sin(kt+\varepsilon)$, где $a>0$ — амплитуда колебаний, $k>0$ — круговая частота колебаний и $\varepsilon(-\pi\leqslant\varepsilon\leqslant\pi)$ — начальная фаза.

Определить центр колебаний a_0, амплитуду, круговую частоту, период T, частоту колебаний f в герцах и начальную фазу по следующим уравнениям движения (x — в сантиметрах, t — в секундах):

Уравнения движения	Ответ					
	a_0 см	a см	k рад/с	T с	f, Гц	ε
1 $x=-7\cos 12t$	0	7	12	$\pi/6$	$6/\pi$	$-\pi/2$
2 $x=4\sin(\pi t/20)-3\cos(\pi t/20)$	0	5	$\pi/20$	40	0,025	$-\operatorname{arctg}(3/4)$
3 $x=2-4\sin 140t$	2	4	140	$\pi/70$	$70/\pi$	π
4 $x=6\sin^2 18t$	3	3	36	$\pi/18$	$18/\pi$	$-\pi/2$
5 $x=1-4\cos^2\frac{\pi}{60}t$	-1	2	$\pi/30$	60	$\frac{1}{60}$	$-\pi/2$

10.9(10.9). Груз, поднятый на упругом канате, колеблется согласно уравнению $x=a\sin(kt+3\pi/2)$, где a — в сантиметрах, k — в рад/с. Определить амплитуду и круговую частоту колебаний груза, если период колебаний равен 0,4 с и в начальный момент $x_0=-4$ см. Построить также кривую расстояний.

Ответ. $a=4$ см, $k=5\pi$ рад/с.

10.10(10.10). Определить траекторию точки, совершающей одновременно два гармонических колебания равной частоты, но разных амплитуд и фаз, если колебания происходят по двум взаимно перпендикулярным осям $x=a\sin(kt+\alpha)$, $y=b\sin(kt+\beta)$.

Ответ: Эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{2xy}{ab}\cos(\alpha-\beta)=\sin^2(\alpha-\beta)$.

10.11(10.11). Найти уравнение траектории движения точки, получающегося при сложении взаимно перпендикулярных колебаний разной частоты:

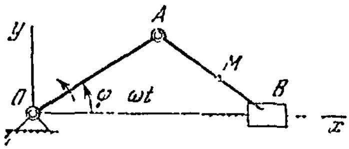
1) $x=a\sin 2\omega t$, $y=a\sin\omega t$;

2) $x=a\cos 2\omega t$, $y=a\cos\omega t$.

Ответ. 1) $x^2a^2=4y^2(a^2-y^2)$;

2) $2y^2-ax-a^2=0$, причем $|x|\leqslant a$, $|y|\leqslant a$.

10.12(10.12). Кривошип OA вращается с постоянной угловой скоростью $\omega=10$ рад/с. Длина $OA=AB=80$ см. Найти уравнения движения и траекторию средней точки M шатуна, а также уравнение движения ползуна B, если в начальный момент ползун находится в крайнем правом положении; оси координат указаны на рисунке.



К задаче 10.12

Ответ: 1) $x_M = 120\cos 10t$, $y_M = 40\sin 10t$;

2) Траекторией точки M является эллипс $\frac{x^2}{120^2} + \frac{y^2}{40^2} = 1$;

3) уравнение движения ползуна B $x = 160\cos 10t$.

10.13(10.14). Определить уравнения движения и траекторию точки обода колеса радиуса $R = 1$ м автомобиля, если автомобиль движется по прямолинейному пути с постоянной скоростью 20 м/с. Принять, что колесо катится без скольжения; за начало координат взять начальное положение точки на пути, принятом за ось Ox.

Ответ: Циклоида $x = 20t - \sin 20t$, $y = 1 - \cos 20t$.

10.14(10.15). Даны уравнения движения снаряда

$$x = v_0\cos\alpha\cdot t, \quad y = v_0\sin\alpha\cdot t - \frac{gt^2}{2},$$

где v_0 — начальная скорость снаряда, α — угол между v_0 и горизонтальной осью x, g — ускорение силы тяжести. Определить траекторию движения снаряда, высоту H, дальность L и время T полета снаряда.

Ответ: Траектория — парабола $y = \operatorname{tg}\alpha\cdot x - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2$, высота $H = \frac{v_0^2}{2g}\sin^2\alpha$, $L = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha$, $T = 2\frac{v_0}{g}\sin\alpha$.

10.15(10.16). В условиях предыдущей задачи определить, при каком угле бросания α дальность полета L будет максимальной. Найти соответствующие высоту и время полета.

Ответ: $\alpha = 45°$, $L_{\max} = \frac{v_0^2}{g}$, $H = \frac{v_0^2}{4g}$, $T = \sqrt{2}\frac{v_0}{g}$.

10.16(10.17). В условиях задачи 10.14 определить угол бросания α, при котором снаряд попадает в точку A с координатами x и y.

Ответ: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_0^2 \pm \sqrt{v_0^4 - 2v_0^2gy - g^2x^2}}{gx}$.

10.17(10.18). Определить параболу безопасности (все точки, лежащие вне этой параболы, не могут быть достигнуты снарядом при данной начальной скорости v_0 и любом угле бросания α).

Ответ: $y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2}x^2$.

10.18(10.19). Точка движется по винтовой линии

$$x = a\cos kt,\quad y = a\sin kt,\quad z = vt$$

Определить уравнения движения точки в цилиндрических координатах.

Ответ $r = a$, $\varphi = kt$, $z = vt$

10.19(10.20). Даны уравнения движения точки:

$$x = 2a\cos^2(kt/2),\quad y = a\sin kt,$$

где a и k — положительные постоянные. Определить траекторию и закон движения точки по траектории, отсчитывая расстояние от начального положения точки.

Ответ: Окружность $(x-a)^2 + y^2 = a^2$; $s = akt$

10.20(10.21). В условиях предыдущей задачи определить уравнения движения точки в полярных координатах.

Ответ: $r = 2a\cos(kt/2)$; $\varphi = kt/2$.

10.21(10.22). По заданным уравнениям движения точки в декартовых координатах

$$x = R\cos^2(kt/2),\quad y = (R/2)\sin kt,\quad z = R\sin(kt/2)$$

найти ее траекторию и уравнения движения в сферических координатах.

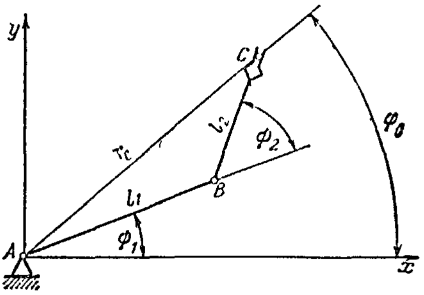
Ответ. Линия пересечения сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ и цилиндра $(x - R/4)^2 + y^2 = R^2/4$. Уравнения движения в сферических координатах $r = R$, $\varphi = kt/2$, $\theta = kt/2$.

10.22(10.23). Точка участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных затухающих колебаниях, уравнения которых имеют вид

$$x = Ae^{-ht}\cos(kt + \varepsilon),\quad y = Ae^{-ht}\sin(kt + \varepsilon),$$

где $A > 0$, $h > 0$, $k > 0$ и ε — некоторые постоянные. Определить уравнения движения в полярных координатах и найти траекторию точки.

Ответ $r = Ae^{-ht}$, $\varphi = kt + \varepsilon$, траектория — логарифмическая спираль $r = Ae^{-\frac{h}{k}(\varphi-\varepsilon)}$.



К задаче 10.23

10.23. Плоский механизм манипулятора переносит груз из одного положения в другое по траектории, определяемой полярными координатами центра схвата $r_C = r_C(t)$, $\varphi_C = \varphi_C(t)$. Найти 1) законы изменения углов φ_1 и φ_2, отрабатываемых соответствующими приводами, обеспечивающие выполнение заданной программы; 2) законы изменения этих углов, если груз перемещается по прямой, параллельной оси y, отстоящей от нее на расстоянии a по закону $y = s(t)$, где s — заданная функция времени t.

Ответ:

1) $\psi_1 = \varphi_C(t) \mp \arccos \dfrac{r_C^2(t) + l_1^2 - l_2^2}{2 l_1 r_C(t)}$,

$\psi_2 = \pm \arccos \dfrac{r_C^2(t) - l_1^2 - l_2^2}{2 l_1 l_2}$,

2) $\psi_1 = \operatorname{arctg} \dfrac{s(t)}{a} \mp \arccos \dfrac{a^2 + s^2(t) + l_1^2 - l_2^2}{2 l_1 \sqrt{a^2 + s^2(t)}}$,

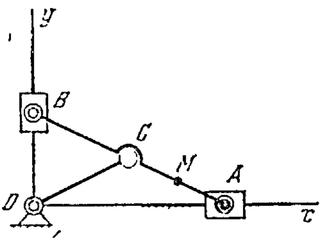
$\psi_2 = \pm \arccos \dfrac{a^2 + s^2(t) - l_1^2 - l_2^2}{2 l_1 l_2}$.

§ 11. Скорость точки

11.1(11.1). Точка совершает гармонические колебания по закону $x = a \sin kt$. Определить амплитуду a и круговую частоту k колебаний, если при $x = x_1$ скорость $v = v_1$, а при $x = x_2$ скорость $v = v_2$.

Ответ: $a = \sqrt{\dfrac{v_1^2 x_2^2 - v_2^2 x_1^2}{v_1^2 - v_2^2}}$; $k = \sqrt{\dfrac{v_1^2 - v_2^2}{x_2^2 - x_1^2}}$.

11.2(11.2). Длина линейки эллипсографа $AB = 10$ см, длина кривошипа $OC = 20$ см, $AC = CB$. Кривошип равномерно вращается вокруг оси O с угловой скоростью ω. Найти уравнения траектории и годографа скорости точки M линейки, лежащей на расстоянии $AM = 10$ см от конца A.



К задаче 11.2

Ответ. $\dfrac{x^2}{900} + \dfrac{y^2}{100} = 1$; $\dfrac{x_1^2}{900\omega^2} + \dfrac{y_1^2}{100\omega^2} = 1$.

11.3(11.3). Точка описывает фигуру Лиссажу согласно уравнениям

$$x = 2\cos t, \quad y = 4\cos 2t$$

(x, y — в сантиметрах, t — в секундах). Определить величину и направление скорости точки, когда она находится на оси Oy.

Ответ: 1) $v = 2$ см/с, $\cos(v, x) = -1$; 2) $v = 2$ см/с, $\cos(v, x) = 1$.

11.4(11.5). Кривошип OA вращается с постоянной угловой скоростью ω. Найти скорость середины M шатуна кривошипно-ползунного механизма и скорость ползуна B в зависимости от времени, если $OA = AB = a$ (см. рисунок к задаче 10.12).

Ответ: 1) $v_M = \dfrac{a}{2}\omega\sqrt{8\sin^2\omega t + 1}$; 2) $v_B = 2a\omega\sin\omega t$.

11.5(11.6). Движение точки задано уравнениями

$$x = v_0 t\cos\alpha_0, \quad y = v_0 t\sin\alpha_0 - {}^1\!/_2\, g t^2,$$

причем ось Ox горизонтальна, ось Oy направлена по вертикали вверх, v_0, g и $\alpha_0 < \pi/2$ — величины постоянные. Найти: 1) траекторию точки, 2) координаты наивысшего ее положения, 3) проекции скорости на координатные оси в тот момент, когда точка находится на оси Ox.

Ответ: 1) Парабола $y = x \operatorname{tg}\alpha_0 - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha_0}x^2$; 2) $x = \frac{v_0^2}{2g} \times \sin 2\alpha_0$, $y = \frac{v_0^2}{2g}\sin^2\alpha_0$; 3) $v_x = x_0\cos\alpha_0$, $v_y = \pm v_0\sin\alpha_0$, причем верхний знак соответствует начальному моменту времени, а нижний — моменту $t = \frac{2v_0\sin\alpha_0}{g}$.

11.6(11.7). Движение точки задано теми же уравнениями, что и в предыдущей задаче, причем $v_0 = 20$ м/с, $\alpha_0 = 60°$, $g = 9{,}81$ м/с^2. Найти, с какой скоростью v_1 должна выйти из начала координат в момент $t = 0$ вторая точка для того, чтобы, двигаясь равномерно по оси Ox, она встретилась с первой точкой, и определить расстояние x_1 до места встречи.

Ответ: $v_1 = 10$ м/с, $x_1 = 35{,}3$ м

11.7(11.8). Определить высоты h_1, h_2 и h_3 над поверхностью воды трех пунктов отвесного берега, если известно, что три пули, выпущенные одновременно в этих пунктах с горизонтальными скоростями 50, 75 и 100 м/с, одновременно упали в воду, причем расстояние точки падения первой пули от берега равно 100 м; принять во внимание только ускорение силы тяжести $g = 9{,}81$ м/с^2 Определить также продолжительность T полета пуль и их скорости v_1, v_2 и v_3 в момент падения в воду.

Ответ: $h_1 = h_2 = h_3 = 19{,}62$ м, $T = 2$ с, $v_1 = 53{,}71$ м/с, $v_2 = 77{,}52$ м/с, $v_3 = 101{,}95$ м/с.

11.8(11.9). Из орудия, ось которого образует угол 30° с горизонтом, выпущен снаряд со скоростью 500 м/с Предполагая, что снаряд имеет только ускорение силы тяжести $g = 9{,}81$ м/с^2, найти годограф скорости снаряда и скорость точки, вычерчивающей годограф.

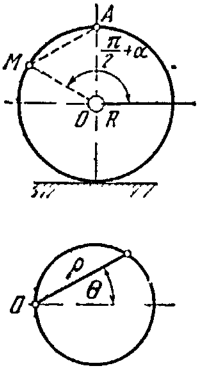
Ответ: Годограф — вертикальная прямая, отстоящая от начала координат на 432 м; $v_1 = 9{,}81$ м/с^2.

11.9(11.10). Определить уравнения движения и траекторию точки колеса электровоза радиуса $R = 1$ м, лежащей на расстоянии $a = 0{,}5$ м от оси, если колесо катится без скольжения по горизонтальному прямолинейному участку пути; скорость оси колеса $v = 10$ м/с. Ось Ox совпадает с рельсом, ось Oy — с радиусом точки при ее начальном низшем положении. Определить также скорость этой точки в те моменты времени, когда диаметр колеса, на котором она расположена, займет горизонтальное и вертикальное положения

Ответ: Укороченная циклоида $x = 10t - 0{,}5\sin 10t$, $y = 1 - 0{,}5\cos 10t$. Скорость: 1) 11 м/с; 18 м/с; 2) 5 м/с; 15 м/с.

11.10(11.11). Скорость электровоза $v_0 = 72$ км/ч; радиус колеса его $R = 1$ м, колесо катится по прямолинейному рельсу без скольжения

1) Определить величину и направление скорости v точки M на ободе колеса в тот момент, когда радиус точки M составляет с направлением скорости v_0 угол $\pi/2 + \alpha$



К задаче 11.10

2) Построить годограф скорости точки M и определить скорость v_1 точки, вычерчивающей годограф

Ответ 1) Скорость $v = 40\cos(\alpha/2)$ м/с и направлена по прямой MA;

2) Окружность $\rho = 2v_0 \cos\theta$, где $\theta = \alpha/2$, радиуса $r = v_0$ (см. рисунок); $v_1 = v_0^2/R = 400$ м/с^2

11.11(11.12). Определить уравнения движения и траекторию точки M колеса вагона радиуса $R = 0{,}5$ м, отстоящей от оси на расстоянии $a = 0{,}6$ м и лежащей в начальный момент на 0,1 м ниже рельса, если вагон движется по прямолинейному пути со скоростью $v = 10$ м/с. Найти также моменты времени, когда эта точка будет проходить свое нижнее и верхнее положения, и проекции ее скорости на оси Ox, Oy в эти моменты времени. Ось Ox совпадает с рельсом, ось Oy проходит через начальное нижнее положение точки

Ответ Удлиненная циклоида

$$x = 10t - 0{,}6\sin 20t; \quad y = 0{,}5 - 0{,}6\cos 20t;$$

при $t = \frac{\pi k}{10}$ с — нижнее положение точки, $v_x = -2$ м/с, $v_y = 0$; при $t = \frac{\pi}{20}(1 + 2k)$ с — верхнее положение точки, $v_x = 22$ м/с, $v_y = 0$, где $k = 0, 1, 2, 3 \ldots$

11.12(11.13). Точка участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных затухающих колебаниях согласно уравнениям

$$x = Ae^{-ht}\cos(kt + \varepsilon), \quad y = Ae^{-ht}\sin(kt + \varepsilon).$$

Определить проекции скорости точки на оси декартовых и полярных координат и найти модуль скорости точки

Ответ: 1) $v_x = -Ae^{-ht}[h\cos(kt + \varepsilon) + k\sin(kt + \varepsilon)]$,

$v_y = -Ae^{-ht}[h\sin(kt + \varepsilon) - k\cos(kt + \varepsilon)]$;

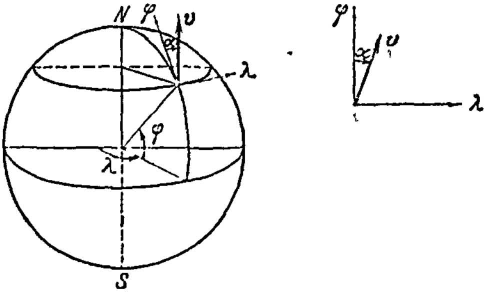
2) $v_r = -Ahe^{-ht}$, $v_\varphi = Ake^{-ht}$;

3) $v = A\sqrt{h^2 + k^2}\, e^{-ht} = \sqrt{h^2 + k^2}\, r$.

11.13(11.14). Какую кривую опишет корабль, идущий под постоянным курсовым углом α к географическому меридиану? Корабль принять за точку, движущуюся по поверхности земного шара.

Ответ: $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi_0}{2}\right)e^{(\lambda-\lambda_0)\operatorname{ctg}\alpha}$, где φ — широта, а λ — долгота текущего положения корабля (эта кривая называется локсодромией).

Указание Воспользоваться сферическими координатами r, λ и φ



К задаче 11 13

11.14(11.15). Уравнения движения точки M в цилиндрической системе координат имеют вид (см. задачу 10 8)

$$r=a,\quad \varphi=kt,\quad z=vt.$$

Найти проекции скорости точки M на оси цилиндрической системы координат, уравнения движения точки M_1, описывающей годограф скорости, и проекции скорости точки M_1.

Ответ: 1) $v_r=0$, $v_\varphi=ak$, $v_z=v$; 2) $r_1=ak$, $\varphi_1=\pi/2+kt$, $z_1=v$; 3) $v_{r_1}=0$, $v_{\varphi_1}=ak^2$, $v_{z_1}=0$.

11.15(11.16). Точка M движется по окружности согласно уравнениям

$$r=2a\cos(kt/2),\quad \varphi=kt/2$$

(r, φ — полярные координаты). Найти проекции скорости точки M на оси полярной системы координат, уравнения движения точки M_1, описывающей годограф скорости, и проекции скорости точки M_1.

Ответ: 1) $v_r=-ak\sin(kt/2)$, $v_\varphi=ak\cos(kt/2)$, 2) $r_1=ak$, $\varphi_1=\pi/2+kt$, 3) $v_{r_1}=0$, $v_{\varphi_1}=ak^2$.

11.16(11.17). Точка движется по линии пересечения сферы и цилиндра согласно уравнениям

$$r=R,\quad \varphi=kt/2,\quad \theta=kt/2$$

(r, φ, θ — сферические координаты; см задачу 10 21). Найти модуль и проекции скорости точки на оси сферической системы координат.

Ответ: $v_r=0$, $v_\varphi=(Rk/2)\cos(kt/2)$, $v_\theta=Rk/2$,

$$v=(Rk/2)\sqrt{1+\cos^2(kt/2)}.$$

11.17(11.18). Найти в полярных координатах (r, φ) уравнение кривой, которую опишет корабль, сохраняющий постоянный угол пеленга α на неподвижную точку (угол между направлением скорости и направлением на точку), если дано: α и $r_{\varphi=0}=r_0$ Корабль принять за точку, движущуюся на плоскости, и за полюс взять произвольную неподвижную точку в этой плоскости. Исследовать частные случаи $\alpha = 0$, $\pi/2$ и π

Ответ. Логарифмическая спираль $r = r_0 e^{-\varphi \operatorname{ctg} \alpha}$. При $\alpha = \pi/2$ окружность $r = r_0$; при $\alpha = 0$ или $\alpha = \pi$ прямая.

§ 12. Ускорение точки

12.1(12.1). Поезд движется со скоростью 72 км/ч; при торможении он получает замедление, равное 0,4 м/с^2. Найти, за какое время до прихода поезда на станцию и на каком от нее расстоянии должно быть начато торможение.

Ответ 50 с, 500 м

12.2(12.2). Копровая баба, ударив сваю, движется затем вместе с ней в течение 0,02 с до остановки, причем свая углубляется в землю на 6 см. Определить начальную скорость движения сваи, считая его равнозамедленным.

Ответ. 6 м/с

12.3(12.3). Водяные капли вытекают из отверстия вертикальной трубочки через 0,1 с одна после другой и падают с ускорением 9,81 м/с^2. Определить расстояние между первой и второй каплями через 1 с после момента истечения первой капли.

Ответ 0,932 м

12.4(12.5). Считая посадочную скорость самолета равной 400 км/ч, определить замедление его при посадке на пути $l = 1200$ м, считая, что замедление постоянно.

Ответ $w = 5{,}15$ м/с^2.

12.5(12.6). Копровая баба падает с высоты 2,5 м, а для ее поднятия на ту же высоту требуется втрое больше времени, чем на падение Сколько ударов она делает в минуту, если считать, что свободное падение копровой бабы совершается с ускорением 9,81 м/с^2?

Ответ 21 удар.

12.6(12.7). Ползун движется по прямолинейной направляющей с ускорением $w_x = -\pi^2 \sin \frac{\pi}{2} t$ м/с^2 Найти уравнение движения ползуна, если его начальная скорость $v_{0x} = 2\pi$ м/с, а начальное положение совпадает со средним положением ползуна, принятым за начало координат. Построить кривые расстояний, скоростей и ускорений.

Ответ: $x = 4 \sin \frac{\pi}{2} t$ м.

12.7(12.8). Поезд, имея начальную скорость 54 км/ч, прошел 600 м в первые 30 с Считая движение поезда равнопеременным, определить скорость и ускорение поезда в конце 30-й секунды, если рассматриваемое движение поезда происходит на закруглении радиуса $R = 1$ км

Ответ $v = 25$ м/с, $w = 0{,}708$ м/с^2.

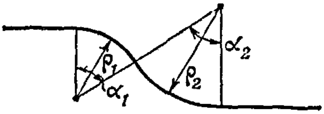
12.8(12.9). При отходе от станции скорость поезда возрастает равномерно и достигает величины 72 км/ч через 3 мин после отхода; путь расположен на закруглении радиуса 800 м. Определить касательное, нормальное и полное ускорения поезда через 2 мин после момента отхода от станции.

Ответ: $w_t = {}^1/_9$ м/с^2, $w_n = {}^2/_9$ м/с^2; $w = 0{,}25$ м/с^2.

12.9(12.10). Поезд движется равнозамедленно по дуге окружности радиуса $R = 800$ м и проходит путь $s = 800$ м, имея начальную скорость $v_0 = 54$ км/ч и конечную $v = 18$ км/ч. Определить полное ускорение поезда в начале и в конце дуги, а также время движения по этой дуге

Ответ $w_0 = 0{,}308$ м/с^2, $w_0 = 0{,}129$ м/с^2, $T = 80$ с

12.10(12.11). Закругление трамвайного пути состоит из двух дуг радиусом $\rho_1 = 300$ м и $\rho_2 = 400$ м. Центральные углы $\alpha_1 = \alpha_2 = 60°$. Построить график нормального ускорения вагона, идущего по закруглению со скоростью $v = 36$ км/м



К задаче 12 10

12.11(12.12). Точка движется по дуге окружности радиуса $R = 20$ см Закон ее движения по траектории: $s = 20 \sin \pi t$ (t — в секундах, s — в сантиметрах). Найти величину и направление скорости, касательное, нормальное и полное ускорения точки в момент $t = 5$ с. Построить также графики скорости, касательного и нормального ускорений.

Ответ. Скорость равна по величине 20π см/с и направлена в сторону, противоположную положительному направлению отсчета дуги s, $w_t = 0$, $w = w_n = 20\pi^2$ см/с^2.

12.12(12.13). Прямолинейное движение точки происходит по закону $s = \frac{g}{a^2}(at + e^{-at})$, где a и g — постоянные величины Найти начальную скорость точки, а также определить ее ускорение в функции от скорости

Ответ: $v_0 = 0$, $w = g - av$.

12.13(12.14). Движение точки задано уравнениями

$$x = 10\cos(2\pi t/5), \quad y = 10\sin(2\pi t/5)$$

(x, y — в сантиметрах, t — в секундах) Найти траекторию точки, величину и направление скорости, а также величину и направление ускорения

Ответ: Окружность радиуса 10 см; скорость $v = 4\pi$ см/с и направлена по касательной в сторону перехода от оси Ox к оси Oy поворотом на 90°; ускорение $w = 1{,}6\pi^2$ см/с^2 и направлено к центру.

12.14(12.15). Уравнения движения пальца кривошипа дизеля в период пуска имеют вид $x = 75\cos 4t^2$, $y = 75\sin 4t^2$ (x, y — в сантиметрах, t — в секундах). Найти скорость, касательное и нормальное ускорения пальца.

Ответ $v = 600t$ см/с, $w_t = 600$ см/с^2, $w_n = 4800t^2$ см/с^2.

12.15(12.16). Движение точки задано уравнениями

$$x = a(e^{kt} + e^{-kt}), \quad y = a(e^{kt} - e^{-kt}),$$

где a и k — заданные постоянные величины.

Найти уравнение траектории, скорость и ускорение точки как функции радиуса-вектора $r=\sqrt{x^2+y^2}$.

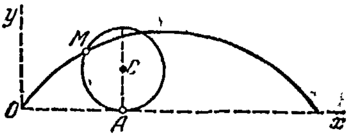
Ответ: Гипербола $x^2-y^2=4a^2$; $v=kr$; $w=k^2r$.

12.16(12.18). Найти радиус кривизны при $x=y=0$ траектории точки, описывающей фигуру Лиссажу согласно уравнениям

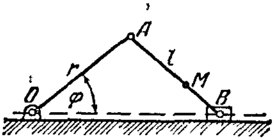
$$x=-a\sin 2\omega t,\quad y=-a\sin\omega t.$$

Ответ: $\rho=\infty$,

12.17(12.19). Найти величину и направление ускорения, а также радиус кривизны траектории точки колеса, катящегося без скольжения по горизонтальной оси Ox, если точка описывает циклоиду согласно уравнениям



К задаче 12.17



К задаче 12.18

$$x=20t-\sin 20t,\quad y=1-\cos 20t$$

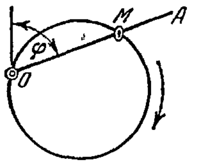
(t — в секундах, x, y — в метрах). Определить также значение радиуса кривизны ρ при $t=0$

Ответ: Ускорение $w=400$ м/с^2 и направлено по MC к центру C катящегося круга; $\rho=2MA$, $\rho_0=0$

12.18(12.20). Найти траекторию точки M шатуна кривошипно-ползунного механизма, если $r=l=60$ см, $MB=\frac{1}{3}l$, $\varphi=4\pi t$ (t — в секундах), а также определить скорость, ускорение и радиус кривизны траектории точки в момент, когда $\varphi=0$.

Ответ: Эллипс $\frac{x^2}{100^2}+\frac{y^2}{20^2}=1$, $v=80\pi$ см/с, $w=1600\pi^2$ см/с^2, $\rho=4$ см

12.19(12.21). На проволочной окружности радиуса 10 см надето колечко M; через него проходит стержень OA, который равномерно вращается вокруг точки O, лежащей на той же окружности; угловая скорость стержня такова, что он поворачивается на прямой угол в 5 с. Определить скорость v и ускорение w колечка.



К задачам 12.19 и 12.20

Ответ: $v=2\pi$ см/с, $w=0{,}4\pi^2$ см/с^2.

12.20. В условиях предыдущей задачи определить скорость и ускорение колечка M как функцию угла φ, если угловое ускорение стержня OM равно $k\cos\varphi$ ($k=\mathrm{const}$). В начальный момент при $t=0$ угол φ и его скорость равнялись нулю, радиус окружности r, $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$

Ответ: $v=2r\sqrt{2k\sin\varphi}$, $w=2kr\sqrt{1+15\sin^2\varphi}$.

12.21(12.22). Движение снаряда задано уравнениями

$$x = v_0 t \cos \alpha_0, \quad y = v_0 t \sin \alpha_0 - {}^1/_2\, gt^2,$$

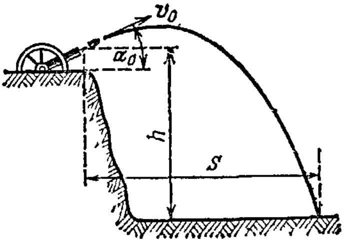
где v_0 и α_0 — постоянные величины. Найти радиус кривизны траектории при $t = 0$ и в момент падения на землю.

Ответ: $\rho = v_0^2/(g \cos \alpha_0)$.

12.22(12.23). Снаряд движется в вертикальной плоскости согласно уравнениям $x = 300t$, $y = 400t - 5t^2$ (t — в секундах, x, y — в метрах). Найти: 1) скорость и ускорение в начальный момент, 2) высоту и дальность обстрела, 3) радиус кривизны траектории в начальной и в наивысшей точках.

Ответ: $v_0 = 500$ м/с, $w_0 = 10$ м/с², $h = 8$ км, $s = 24$ км, $\rho_0 = 41{,}67$ км, $\rho = 9$ км.

12.23(12.24). Из орудия береговой артиллерии с высоты $h = 30$ м над уровнем моря произведен выстрел под углом $\alpha_0 = 45°$ к горизонту с начальной скоростью снаряда $v_0 = 1000$ м/с. Определить, на каком расстоянии от орудия снаряд попадет в цель, находящуюся на уровне моря. Сопротивлением воздуха пренебречь.



К задаче 12.23

Ответ: 102 км.

12.24(12.25). Найти касательное и нормальное ускорения точки, движение которой выражается уравнениями

$$x = \alpha t, \quad y = \beta t - gt^2/2.$$

Ответ: $w_t = -\dfrac{g(\beta - gt)}{v}$, $w_n = \dfrac{g\alpha}{v}$, где v — скорость точки.

12.25(12.26). Точка движется по винтовой линии согласно уравнениям $x = 2\cos 4t$, $y = 2\sin 4t$, $z = 2t$, причем за единицу длины взят метр. Определить радиус кривизны ρ траектории.

Ответ. $\rho = 2{}^1/_8$ м.

12.26(12.27). Движение точки задано в полярных координатах уравнениями $r = ae^{kt}$ и $\varphi = kt$, где a и k — заданные постоянные величины. Найти уравнение траектории, скорость, ускорение и радиус кривизны траектории точки как функции ее радиус-вектора r.

Ответ: $r = ae^{\varphi}$ — логарифмическая спираль; $v = kr\sqrt{2}$, $w = 2k^2 r$, $\rho = r\sqrt{2}$.

12.27(12.28). Движение точки задано уравнениями

$$x = 2t, \quad y = t^2$$

(t — в секундах, x и y — в сантиметрах). Определить величины и направления скорости и ускорения точки в момент времени $t = 1$ с.

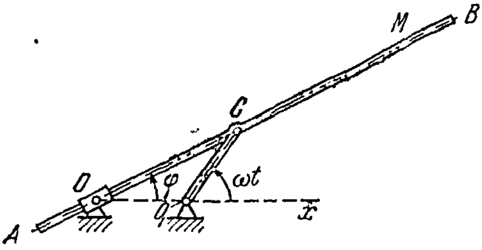
Ответ: $v = 2\sqrt{2}$ см/с, $w = 2$ см/с², $(\widehat{v, x}) = 45°$, $(\widehat{w, x}) = 90°$.

12.28(12.29). Построить траекторию движения точки, годограф скорости и определить радиус кривизны траектории в начальный момент, если точка движется согласно уравнениям

$$x = 4t, \quad y = t^3$$

(t — в секундах, x и y — в сантиметрах)

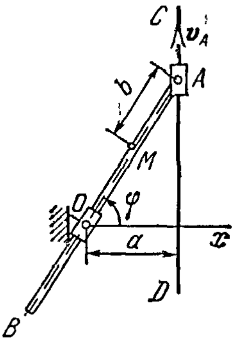
Ответ Уравнение траектории $y = \frac{x^3}{64}$ — кубическая парабола; годограф скорости — прямая, параллельная оси v_y; $\rho_0 = \infty$ (начальная точка траектории — точка перегиба).



К задаче 12.29

12.29(12.30). Кривошип O_1C длиной $a/2$ вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси O_1. В точке C с кривошипом шарнирно связана линейка AB, проходящая все время через качающуюся муфту O, находящуюся на расстоянии $a/2$ от оси вращения O_1

Приняв точку O за полюс, найти в полярных координатах уравнения движения точки M линейки, отстоящей от шарнира C на расстоянии a, ее траекторию, скорость и ускорение (в начальный момент угол $\varphi = \angle COO_1 = 0$)



К задаче 12.31

Ответ 1) $r = a(1 + \cos(\omega t/2))$, $\varphi = \omega t/2$;
2) $r = a(1 + \cos\varphi)$ — кардиоида;
3) $v = a\omega\cos(\omega t/4)$;
4) $w = \frac{a\omega^2}{4}\sqrt{5 + 4\cos\frac{\omega t}{2}}$.

12.30(12.32). В условиях задачи (12.29) определить радиус кривизны кардиоиды при $r = 2a$, $\varphi = 0$

Ответ $\rho_0 = {}^4/_3 a$

12.31(12.33). Конец A стержня AB перемещается по прямолинейной направляющей CD с постоянной скоростью v_A. Стержень AB все время проходит через качающуюся муфту O, отстоящую от направляющей CD на расстоянии a. Приняв точку O за полюс, найти в полярных координатах r, φ скорость и ускорение точки M, находящейся на линейке на расстоянии b от ползуна A.

Ответ: $v = \frac{v_A}{a}\sqrt{a^2\sin^2\varphi + r^2\cos^4\varphi}$, $w = \frac{v_A^2 b}{a^2}\cos^3\varphi\sqrt{1 + 3\sin^2\varphi}$,

где $r = \sqrt{a^2 + v_A^2 t^2} - b$, $\varphi = \operatorname{arctg}(v_A t/a)$.

12.32(12.34). Точка M движется по винтовой линии Уравнения движения ее в цилиндрической системе координат имеют вид

$$r = a, \quad \varphi = kt, \quad z = vt.$$

Найти проекции ускорения точки на оси цилиндрической системы координат, касательную и нормальную составляющие ускорения и радиус кривизны винтовой линии

Ответ 1) $w_r = -ak^2$, $w_\varphi = 0$, $w_z = 0$;

2) $w_\tau = 0$, $w_n = ak^2$;

3) $\rho = (a^2k^2 + v^2)/(ak^2)$.

12.33(12.35). Точка M движется по линии пересечения сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ и цилиндра $(x - R/2)^2 + y^2 = R^2/4$. Уравнения движения точки в сферических координатах имеют вид (см задачу 10 21)

$$r = R, \quad \varphi = kt/2, \quad \theta = kt/2$$

Найти проекции и модуль ускорения точки в сферических координатах

Ответ: $w_r = -\frac{Rk^2}{4}(1 + \cos^2\theta)$, $w_\varphi = -\frac{Rk^2}{2}\sin\theta$,

$$w_\theta = \frac{Rk^2}{4}\sin\theta\cos\theta, \qquad w = \frac{Rk^2}{4}\sqrt{4 + \sin^2\theta}.$$

12.34(12.36). Корабль движется под постоянным курсовым углом α к географическому меридиану, описывая при этом локсодромию (см. задачу 11.13). Считая, что модуль скорости v корабля не изменяется, определить проекции ускорения корабля на оси сферических координат r, λ и φ (λ — долгота, φ — широта места плавания), модуль ускорения и радиус кривизны локсодромии

Ответ: $w_r = -\frac{v^2}{R}$, $w_\lambda = -\frac{v^2}{R}\sin\alpha\cos\alpha\,\mathrm{tg}\,\varphi$,

$$w_\varphi = -\frac{v^2}{R}\sin^2\alpha\,\mathrm{tg}\,\varphi, \quad w = \frac{v^2}{R}\sqrt{1 + \sin^2\alpha\,\mathrm{tg}^2\varphi},$$

$$\rho = \frac{R}{\sqrt{1 + \sin^2\alpha\,\mathrm{tg}^2\varphi}},$$

где R — радиус Земли, $\varphi = \varphi_0 + \frac{v\sin\alpha}{R}t$.

12.35(12.37). Выразить декартовы координаты точки через тороидальные координаты $r = CM$, ψ и φ и определить коэффициенты Ляме

Ответ: 1) $x = (a + r\cos\varphi)\cos\psi$, $y = (a + r\cos\varphi)\sin\psi$, $z = r\sin\varphi$;

2) $H_r = 1$, $H_\psi = a + r\cos\varphi$, $H_\varphi = r$.

12.36(12.38). Движение точки задано в тороидальной системе координат r, ψ и φ Найти проекции скорости и ускорения точки на оси этой системы отсчета.

Ответ. 1) $v_r = r$, $v_\psi = (a + r\cos\varphi)\dot\psi$, $v_\varphi = r\dot\varphi$;

2) $w_r = r - (a + r\cos\varphi)\cos\varphi\dot\psi^2 - r\dot\varphi^2$,

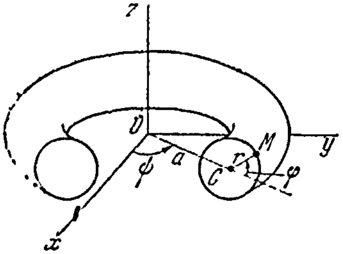
$$w_\psi = (a + r\cos\varphi)\psi + 2\cos\varphi r\dot\psi - 2r\sin\varphi\psi\varphi,$$

$$w_\varphi = r\varphi + 2r\dot\varphi + (a + r\cos\varphi)\sin\varphi\psi^2.$$

12.37(12.39). Точка движется по винтовой линии, намотанной на тор, по закону

$$r = R = \mathrm{const}, \quad \psi = \omega t, \quad \varphi = kt.$$

Определить проекции скорости и ускорения точки в тороидальной системе координат ($\omega = \mathrm{const}$, $k = \mathrm{const}$).



К задачам 12 35—12 37

Ответ. $v_r = 0$, $v_\psi = (a + R\cos\varphi)\omega$,

$$v_\varphi = Rk,$$

$$w_r = -[(a + R\cos\varphi)\cos\varphi\omega^2 + Rk^2],$$

$$w_\psi = -2R\omega k\sin\varphi,$$

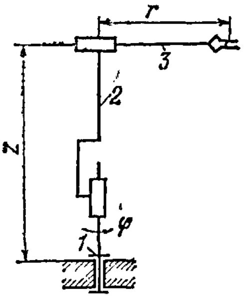
$$w_\varphi = \omega^2(a + R\cos\varphi)\sin\varphi.$$

12.38. Механизм робота-манипулятора состоит из поворотного устройства *1*, колонны для вертикального перемещения *2* и выдвигающейся руки со схватом *3* Найти скорость и ускорение центра схвата при заданных $\varphi(t)$, $z(t)$, $r(t)$.

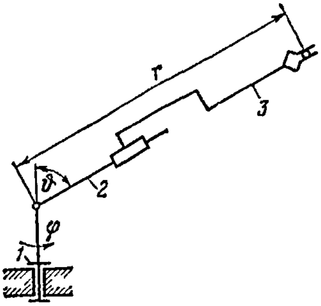
Ответ: $v = \sqrt{\dot r^2 + r^2\varphi^2 + z^2}$,

$$w = \sqrt{(\ddot r - r\dot\varphi^2)^2 + (r\ddot\varphi + 2\dot r\dot\varphi)^2 + z^2}.$$

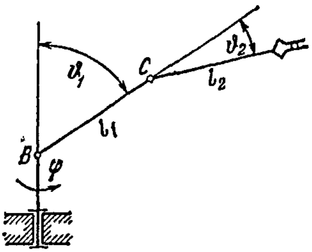
12.39. Вертикальная колонна, несущая руку робота-манипулятора, может поворачиваться на угол φ. Рука со схватом поворачивается на угол ϑ и выдвигается на расстояние r. Найти скорость и ускорение центра схвата.



К задаче 12 38



К задаче 12 39



К задаче 12 40

Ответ: $v = \sqrt{\dot r^2 + r^2\vartheta^2 + r^2\sin^2\vartheta\varphi^2}$,

$$w = [(\ddot r - r\vartheta^2 - r\dot\varphi^2\sin^2\vartheta)^2 + (r\ddot\vartheta + 2\dot r\vartheta - r\dot\varphi^2\sin\vartheta\cos\vartheta)^2 +$$

$$+ (r\varphi\sin\vartheta + 2\dot r\dot\varphi\sin\vartheta + 2r\dot\varphi\dot\vartheta\cos\vartheta)^2]^{1/2}.$$

12.40. Механизм робота-манипулятора состоит из поворотного устройства с вертикальной осью (угол поворота — φ) и двух звеньев, расположенных в вертикальной плоскости (углы поворота звеньев — ϑ_1 и ϑ_2). Найти скорость центра схвата при переносе груза

Ответ: $v = [l_1^2\vartheta_1^2 + l_2^2(\vartheta_1 + \vartheta_2)^2 + 2l_1l_2\vartheta_1(\vartheta_1 + \vartheta_2)\cos\vartheta_2 +$
$+ (l_1 \sin\vartheta_1 + l_2 \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2))^2 \dot{\varphi}^2]^{1/2}$.

ГЛАВА IV

ПРОСТЕЙШИЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 13. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси

13.1(13.1). Определить угловую скорость: 1) секундной стрелки часов, 2) минутной стрелки часов, 3) часовой стрелки часов, 4) вращения Земли вокруг своей оси, считая, что Земля делает один оборот за 24 часа, 5) паровой турбины Лаваля, делающей 15 000 об/мин.

Ответ. 1) $\omega = \pi/30$ рад/с $= 0{,}1047$ рад/с.
2) $\omega = \pi/1\,800$ рад/с $= 0{,}001745$ рад/с
3) $\omega = \pi/21\,600$ рад/с $= 0{,}0001455$ рад/с.
4) $\omega = \pi/43\,200$ рад/с $= 0{,}0000727$ рад/с.
5) $\omega = 1\,571$ рад/с

13.2(13.2). Написать уравнение вращения диска паровой турбины при пуске в ход, если известно, что угол поворота пропорционален кубу времени и при $t = 3$ с угловая скорость диска равна $\omega = 27\pi$ рад/с

Ответ $\varphi = \pi t^3$ рад

13.3(13.3). Маятник центробежного регулятора, вращающийся вокруг вертикальной оси AB, делает 120 об/мин В начальный момент угол поворота был равен $\pi/6$ рад Найти угол поворота и угловое перемещение маятника за время $t = 1/2$ с.

Ответ: $\varphi = \frac{13}{6}\pi$ рад; $\Delta\varphi = 2\pi$ рад

13.4(13.4). Тело, начиная вращаться равноускоренно из состояния покоя, делает 3600 оборотов в первые 2 минуты Определить угловое ускорение

Ответ. $\varepsilon = \pi$ рад/с^2.

13.5(13.5). Вал начинает вращаться равноускоренно из состояния покоя; в первые 5 с он совершает 12,5 оборота Какова его угловая скорость по истечении этих 5 с?

Ответ: $\omega = 10\pi$ рад/с

13.6(13.6). Маховое колесо начинает вращаться из состояния покоя равноускоренно; через 10 мин после начала движения оно имеет угловую скорость, равную 4π рад/с. Сколько оборотов сделало колесо за эти 10 мин?

Ответ· 600 оборотов.

13.7(13.7). Колесо, имеющее неподвижную ось, получило начальную угловую скорость 2π рад/с; сделав 10 оборотов, оно вследствие трения в подшипниках остановилось. Определить угловое ускорение ε колеса, считая его постоянным

Ответ $\varepsilon = 0{,}1\pi$ рад/с², вращение замедленное

13.8(13.8). С момента выключения мотора пропеллер самолета, вращавшийся с угловой скоростью, равной 40π рад/с, сделал до остановки 80 оборотов. Сколько времени прошло с момента выключения мотора до остановки, если считать вращение пропеллера равнозамедленным?

Ответ: 8 с.

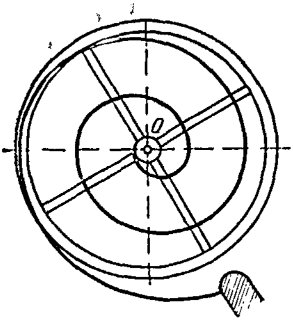
13.9(13.9). Тело совершает колебания около неподвижной оси, причем угол поворота выражается уравнением

$$\varphi = 20^\circ \sin \psi,$$

где угол ψ выражен в угловых градусах зависимостью $\psi = (2t)^\circ$, причем t обозначает секунды. Определить угловую скорость тела в момент $t = 0$, ближайшие моменты t_1 и t_2, в которые изменяется направление вращения, и период колебания T.

Ответ: $\omega = \frac{1}{810}\pi^2$ рад/с, $t_1 = 45$ с, $t_2 = 135$ с, $T = 180$ с.

13.10(13.10). Часовой балансир совершает крутильные гармонические колебания с периодом $T = 1/2$ с. Наибольший угол отклонения точки обода балансира от положения равновесия $\alpha = \pi/2$ рад. Найти угловую скорость и угловое ускорение баланса через 2 с после момента, когда балансир проходит положение равновесия



К задаче 13.10

Ответ: $\omega = 2\pi^2$ рад/с, $\varepsilon = 0$

13.11(13.11). Маятник колеблется в вертикальной плоскости около неподвижной горизонтальной оси O. Выйдя в начальный момент из положения равновесия, он достигает наибольшего отклонения $\alpha = \pi/16$ рад через 2/3 с.

1) Написать закон колебаний маятника, считая, что он совершает гармонические колебания

2) В каком положении маятник будет иметь наибольшую угловую скорость и чему она равна?

Ответ: 1) $\varphi = \frac{\pi}{16} \sin \frac{3}{4}\pi t$ рад.

2) В отвесном положении; $\omega_{max} = \frac{3}{64}\pi^2$ рад/с².

13.12(13.12). Определить скорость v и ускорение w точки, находящейся на поверхности Земли в Ленинграде, принимая во внимание только вращение Земли вокруг своей оси, широта Ленинграда 60°, радиус Земли 6370 км

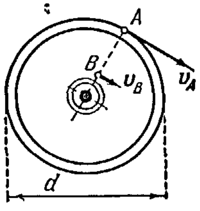
Ответ $v = 232$ м/с, $w = 0{,}0169$ м/с²,

13.13(13.13). Маховое колесо радиуса 0,5 м вращается равномерно вокруг своей оси; скорость точек, лежащих на его ободе, равна 2 м/с: Сколько оборотов в минуту делает колесо?

Ответ. $n = 38{,}2$ об/мин.

13.14(13.14). Точка A шкива, лежащая на его ободе, движется со скоростью 50 см/с, а некоторая точка B, взятая на одном радиусе с точкой A, движется со скоростью 10 см/с; расстояние $AB = 20$ см. Определить угловую скорость ω и диаметр шкива.

Ответ: $\omega = 2$ рад/с, $d = 50$ см.



К задаче 13.14

13.15(13.15). Маховое колесо радиуса $R = 2$ м вращается равноускоренно из состояния покоя, через $t = 10$ с точки, лежащие на ободе, обладают линейной скоростью $v = 100$ м/с. Найти скорость, нормальное и касательное ускорения точек обода колеса для момента $t = 15$ с.

Ответ $v = 150$ м/с, $w_n = 11250$ м/с^2, $w_\tau = 10$ м/с^2

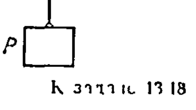
13.16(13.16). Найти горизонтальную скорость v, которую нужно сообщить телу, находящемуся на экваторе, для того чтобы оно, двигаясь равномерно вокруг Земли по экватору в особых направляющих, имело ускорение свободного падения Определить также время T, по истечении которого тело вернется в первоначальное положение Радиус Земли $R = 637\cdot10^6$ см, а ускорение силы тяжести на экваторе $g = 978$ см/с^2

Ответ $v = 7{,}9$ км/с, $T = 1{,}4$ ч.

13.17(13.17). Угол наклона полного ускорения точки обода махового колеса к радиусу равен 60°. Касательное ускорение ее в данный момент $w_\tau = 10\sqrt{3}$ м/с^2. Найти нормальное ускорение точки, отстоящей от оси вращения на расстоянии $r = 0{,}5$ м Радиус махового колеса $R = 1$ м.

Ответ: $w_n = 5$ м/с^2.

13.18(13.18). Вал радиуса $R = 10$ см приводится во вращение гирей P, привешенной к нему на нити Движение гири выражается уравнением $x = 100t^2$, где x — расстояние гири от места схода нити с поверхности вала, выраженное в сантиметрах, t — время в секундах Определить угловую скорость ω и угловое ускорение ε вала, а также полное ускорение w точки на поверхности вала в момент t



К задаче 13.18

Ответ: $\omega = 20t$ рад/с, $\varepsilon = 20$ рад/с^2, $w = 200\sqrt{1 + 400t^4}$ см/с^2.

13.19(13.19). Решить предыдущую задачу в общем виде, выразив ускорение точек обода колеса через пройденное гирей расстояние x, радиус колеса R и ускорение гири $\ddot{x} = w_0 = \text{const}$.

Ответ: $w = w_0\sqrt{1 + 4x^2/R^2}$.

13.20(13.20). Стрелка гальванометра длины 3 см колеблется вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = \varphi_0 \sin kt$. Определить ускорение конца стрелки в ее среднем и крайних положениях, а также моменты времени, при которых угловая скорость ω и угловое ускорение ε обращаются в нуль, если период колебаний равен 0,4 с, а угловая амплитуда $\varphi_0 = \pi/30$

Ответ 1) В среднем положении стрелки $w = 8{,}1$ см/с²

2) В крайних положениях стрелки $w = 77{,}5$ см/с²

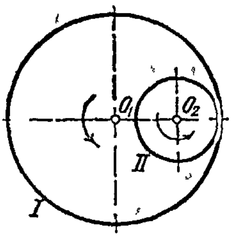
3) $\omega = 0$ при $t = (0{,}1 + 0{,}2n)$ с $(n = 0, 1, 2, \ )$

4) $\varepsilon = 0$ при $t = 0{,}2n$ с $(n = 0, 1, 2, \ )$

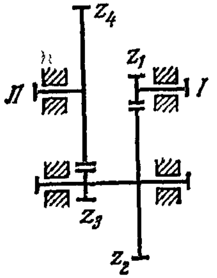
§ 14. Преобразование простейших движений твердого тела

14.1(14.1) Угловая скорость зубчатого колеса *I* диаметра $D_1 = 360$ мм равна $10\pi/3$ рад/с Чему должен равняться диаметр зубчатого колеса *II*, находящегося с колесом *I* во внутреннем зацеплении, угловая скорость которого в три раза больше угловой скорости колеса *I*?

Ответ $D_2 = 120$ мм



К задаче 14.1



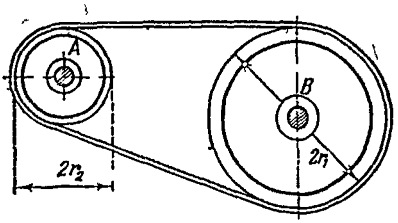
К задаче 14.2

14.2(14.2) Редуктор скорости, служащий для замедления вращения и передающий вращение вала *I* валу *II*, состоит из четырех шестерен с соответствующим числом зубцов $z_1 = 10$, $z_2 = 60$, $z_3 = 12$, $z_4 = 70$ Определить передаточное отношение механизма

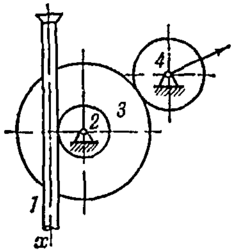
Ответ $i_{I\,II} = \omega_I/\omega_{II} = 35$

14.3(14.3) Станок со шкивом *A* приводится в движение из состояния покоя бесконечным ремнем от шкива *B* электромотора, радиусы шкивов $r_1 = 75$ см, $r_2 = 30$ см, после пуска в ход электромотора его угловое ускорение равно $0{,}4\pi$ рад/с² Пренебрегая скольжением ремня по шкивам, определить через сколько времени угловая скорость станка будет равна 10π рад/с

Ответ 10 с



К задаче 14.3

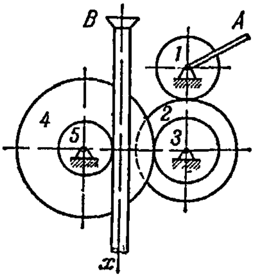


К задаче 14.4

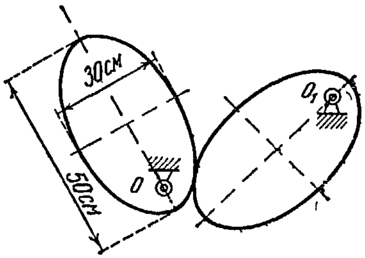
14.4(14.4) В механизме стрелочного индикатора движение от рейки мерительного штифта *1* передается шестерне *2*, на оси которой укреплено зубчатое колесо *3*, сцепляющееся с шестерней *4*, несущей стрелку. Определить угловую скорость стрелки, если движение штифта задано уравнением $x = a\sin kt$ и радиусы зубчатых колес соответственно равны r_2, r_3 и r_4.

Ответ: $\omega_4 = \frac{r_3}{r_2 r_4} ak\cos kt$.

14.5(14.5). В механизме домкрата при вращении рукоятки *A* начинают вращаться шестерни *1*, *2*, *3*, *4* и *5*, которые приводят в движение зубчатую рейку *B* домкрата. Определить скорость последней, если рукоятка *A* вращается с угловой скоростью, равной π рад/с. Числа зубцов шестерен: $z_1 = 6$, $z_2 = 24$, $z_3 = 8$, $z_4 = 32$; радиус пятой шестерни $r_5 = 4$ см.



К задаче 14.5

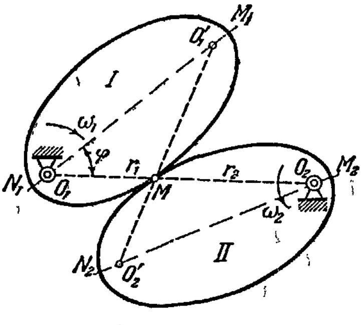


К задаче 14.6

Ответ: $v_B = 7{,}8$ мм/с.

14.6(14.6). Для получения периодически изменяющихся угловых скоростей сцеплены два одинаковых эллиптических зубчатых колеса, из которых одно вращается равномерно вокруг оси *O*, с угловой скоростью $\omega = 9\pi$ рад/с, а другое приводится первым во вращательное движение вокруг оси O_1. Оси *O* и O_1 параллельны и проходят через фокусы эллипсов. Расстояние OO_1 равно 50 см, полуоси эллипсов 25 и 15 см. Определить наименьшую и наибольшую угловые скорости колеса O_1.

Ответ: $\omega_{\min} = \pi$ рад/с, $\omega_{\max} = 81\pi$ рад/с.



К задаче 14.7

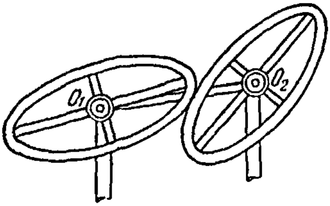
14.7(14.7). Вывести закон передачи вращения пары эллиптических зубчатых колес с полуосями *a* и *b*. Угловая скорость колеса *I* $\omega_1 = \text{const}$. Расстояние между осями $O_1O_2 = 2a$, φ — угол, образованный прямой, соединяющей оси вращения, и большой осью эллиптического колеса *I*. Оси проходят через фокусы эллипсов.

Ответ: $\omega_2 = \frac{a^2 - c^2}{a^2 - 2ac\cos\varphi + c^2}\omega_1$, где *c* — линейный эксцентриситет эллипсов, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

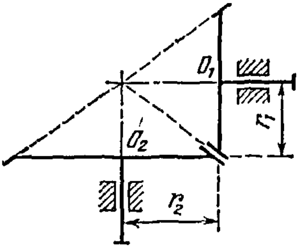
14.8(14.8). Найти наибольшую и наименьшую угловые скорости овального колеса O_2, сцепленного с колесом O_1, угловая скорость которого равна 8π рад/с. Оси вращения колес находятся в центрах овалов. Расстояние между осями равно 50 см. Полуоси овалов равны 40 и 10 см.

Ответ: $\omega_{\min} = 2\pi$ рад/с, $\omega_{\max} = 32\pi$ рад/с.

14.9(14.9). Определить, через какой промежуток времени зубчатое коническое колесо O_1 радиуса $r_1 = 10$ см будет иметь угловую скорость, равную 144π рад/с, если оно приводится во вращение из состояния покоя таким же колесом O_2 радиуса $r_2 = 15$ см, вращающимся равноускоренно с угловым ускорением 4π рад/с^2.



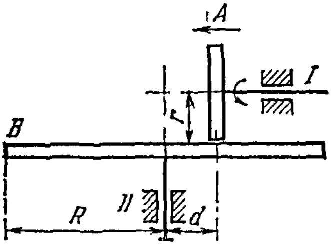
К задаче 14.8



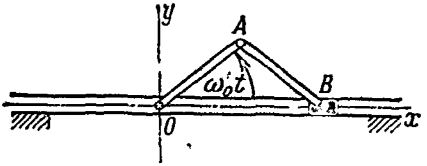
К задаче 14.9

Ответ: $t = 24$ с.

14.10(14.10). Ведущий вал I фрикционной передачи вращается с угловой скоростью $\omega = 20\pi$ рад/с и на ходу передвигается (направление указано стрелкой) так, что расстояние d меняется по закону $d = (10 - 0{,}5t)$ см (t — в секундах).



К задаче 14.10



К задаче 14.11

Определить: 1) угловое ускорение вала II как функцию расстояния d,

2) ускорение точки на ободе колеса B в момент, когда $d = r$; даны радиусы фрикционных колес: $r = 5$ см, $R = 15$ см.

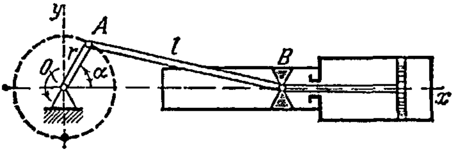
Ответ: 1) $\varepsilon = \frac{50\pi}{d^2}$ рад/с^2, 2) $w = 30\pi\sqrt{40\,000\pi^2 + 1}$ см/с^2.

14.11(14.11). Найти закон движения, скорость и ускорение ползуна B кривошипно-ползунного механизма OAB, если длины шатуна и кривошипа одинаковы: $AB = OA = r$, а вращение кривошипа OA вокруг вала O равномерно: $\omega = \omega_0$. Ось x направлена по направляющей ползуна. Начало отсчета расстояний — в центре O кривошипа.

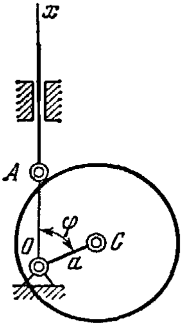
Ответ: $x = 2r\cos\omega_0 t$, $v_x = -2r\omega_0\sin\omega_0 t$, $w_x = -\omega_0^2 x$.

14.12(14.12). Определить закон движения, скорость и ускорение ползуна B кривошипно-ползунного механизма, если кривошип OA вращается с постоянной угловой скоростью ω_0 Длина кривошипа $OA = r$, длина шатуна $AB = l$.

Ось Ox направлена по направляющей ползуна. Начало отсчета — в центре O кривошипа. Отношение $r/l = \lambda$ следует считать весьма малым ($\lambda \ll 1$); $\alpha = \omega_0 t$



К задаче 14.12



К задаче 14.13

$$\text{Ответ: } x = r\left(\cos\omega_0 t + \frac{\lambda}{4}\cos 2\omega_0 t\right) + l - \frac{\lambda}{4}r,$$

$$v_x = -r\omega_0\left(\sin\omega_0 t + \frac{\lambda}{2}\sin 2\omega_0 t\right),$$

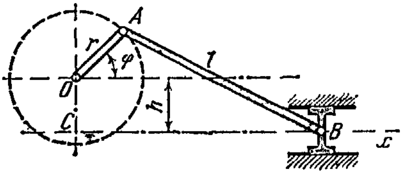
$$w_x = -r\omega_0^2(\cos\omega_0 t + \lambda\cos 2\omega_0 t).$$

14.13(14.13). Найти закон движения стержня, если диаметр эксцентрика $d = 2r$, а ось вращения O находится от оси диска C на расстоянии $OC = a$, ось Ox направлена по стержню, начало отсчета — на оси вращения, $a/r = \lambda$.

Ответ: $x = a\cos\varphi + r\sqrt{1 - \lambda^2\sin^2\varphi}$.

14.14(14.14). Написать уравнение движения поршня нецентрального кривошипно-ползунного механизма Расстояние от оси вращения кривошипа до направляющей линейки h, длина кривошипа r, длина шатуна l; ось Cx направлена по направляющей ползуна. Начало отсчета расстояний — в крайнем правом положении ползуна; $l/r = \lambda$, $h/r = k$, $\varphi = \omega_0 t$.

Ответ: $x = r\left[\sqrt{(\lambda+1)^2 - k^2} - \sqrt{\lambda^2 - (\sin\varphi + k)^2} - \cos\varphi\right]$.



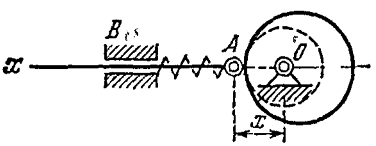
К задаче 14.14

14.15(14.15). Кулак, равномерно вращаясь вокруг оси O, создает равномерное возвратно-поступательное движение стержня AB Время одного полного оборота кулака 8 с, уравнения движения стержня в течение этого времени имеют вид (x — в сантиметрах, t — в секундах)

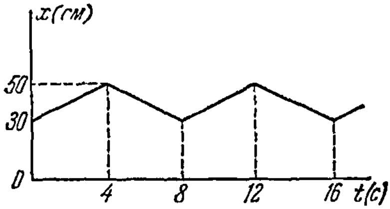
$$x=\begin{cases}30+5t, & 0\leqslant t\leqslant 4,\\ 70-5t, & 4\leqslant t\leqslant 8\end{cases}$$

Определить уравнения контура кулака и построить график движения стержня

Ответ: $r=\begin{cases}30+\dfrac{20}{\pi}\varphi, & 0\leqslant\varphi\leqslant\pi,\\ 70-\dfrac{20}{\pi}\varphi, & \pi\leqslant\varphi\leqslant 2\pi.\end{cases}$



К задаче 14 15

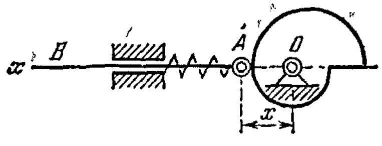


К ответу задачи 14 15

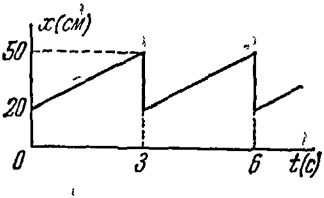
14.16(14.16). Найти закон движения и построить график возвратно-поступательного движения стержня AB, если задано уравнение профиля кулака

$$r=\left(20+\frac{15}{\pi}\varphi\right)\text{ см},\quad 0<\varphi<2\pi.$$

Кулак равномерно вращается с угловой скоростью, равной $\frac{2}{3}\pi$ рад/с.



К задаче 14 16



К ответу задачи 14 16

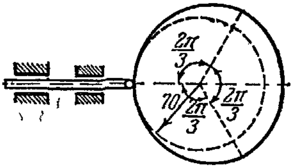
Ответ. $x=20+10t$ за время одного оборота кулака (3 с), после чего движение периодически повторяется

14.17(14.17). Написать уравнение контура кулака, у которого полный ход стержня $h=20$ см соответствовал бы одной трети оборота, причем перемещения стержня должны быть в это время пропорциональны углу поворота В течение следующей трети оборота стержень должен оставаться неподвижным, и, наконец, на протяжении последней трети он должен совершать обратный ход при тех же условиях, что и на первой трети Наименьшее расстояние конца стержня от центра кулака равно 70 см.

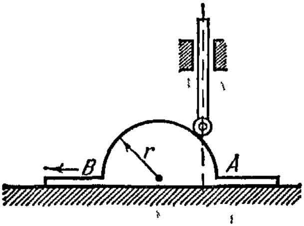
Ответ. Контур кулака, соответствующий первой трети оборота, представляет архимедову спираль

$$r=\left(\frac{30}{\pi}\varphi+70\right)\text{ см}$$

Второй трети оборота соответствует окружность радиуса $r=90$ см.



К задаче 14.17



К задаче 14.18

Для последней трети оборота контур кулака представляет собой также архимедову спираль

$$r=\left(90-\frac{30}{\pi}\varphi\right)\text{ см}$$

14.18(14.18) Найти, на какую длину опускается стержень, опирающийся своим концом о круговой контур радиуса $r=30$ см кулака, движущегося возвратно поступательно со скоростью $v=5$ см/с. Время опускания стержня $t=3$ с. В начальный момент стержень находится в наивысшем положении.

Ответ. $h=4{,}020$ см.

14.19(14.19) Найти ускорение кругового поступательного движущегося кулака, если при его равноускоренном движении без начальной скорости стержень опустился за 4 с из наивысшего положения на $h=4$ см. Радиус кругового контура кулака $r=10$ см. (См. рисунок к задаче 14.18.)

Ответ. $w=1$ см/с^2.

ГЛАВА V

ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 15. Уравнения движения плоской фигуры

15.1(15.1) Линейка эллипсографа приводится в движение кривошипом OC, вращающимся с постоянной угловой скоростью ω_0 вокруг оси O. Приняв ползун B за полюс, написать уравнения плоского движения линейки эллипсографа, если $OC=BC=AC=r$. В начальный момент линейка AB была расположена горизонтально.

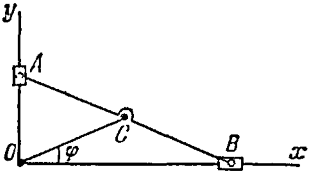
Ответ. $x_B=2r\cos\omega_0 t$, $y_B=0$, $\varphi_B=-\omega_0 t$.

15.2(15.2) Колесо радиуса R катится без скольжения по горизонтальной прямой. Скорость центра C колеса постоянная и равна v.

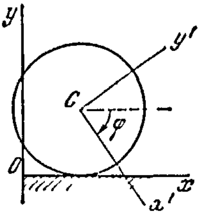
Определить уравнения движения колеса, если в начальный момент ось y', жестко связанная с колесом, была вертикальна, а неподвижная ось y проходила в это время через центр C колеса. За полюс принять точку C.

Ответ: $x_C = vt$, $y_C = R$, $\varphi = \frac{v}{R}t$.

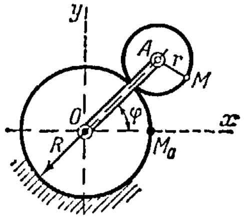
15.3 (15.3). Шестеренка радиуса r, катящаяся по неподвижной шестеренке радиуса R, приводится в движение кривошипом OA, вращающимся равноускоренно с угловым ускорением ε_0 вокруг оси O неподвижной шестеренки. Составить уравнения движения подвижной шестеренки, приняв за полюс ее центр A, если при $t = 0$ угловая скорость кривошипа $\omega_0 = 0$ и начальный угол поворота $\varphi_0 = 0$.



К задаче 15.1



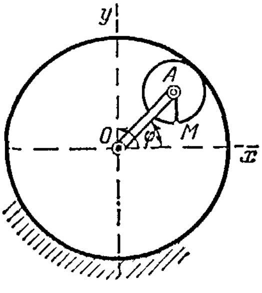
К задаче 15.2



К задаче 15.3

Ответ: $x_A = (R + r)\cos\frac{\varepsilon_0 t^2}{2}$, $y_A = (R + r)\sin\frac{\varepsilon_0 t^2}{2}$, $\varphi_1 = \left(\frac{R}{r} + 1\right)\frac{\varepsilon_0 t^2}{2}$, где φ_1 — угол поворота подвижной шестеренки.

15.4 (15.4). Шестеренка радиуса r, катящаяся внутри неподвижной шестеренки радиуса R, приводится в движение кривошипом OA, вращающимся равномерно вокруг оси O неподвижной шестеренки с угловой скоростью ω_0. При $t = 0$ угол $\varphi_0 = 0$. Составить уравнения движения подвижной шестеренки, приняв ее центр A за полюс.



К задаче 15.4

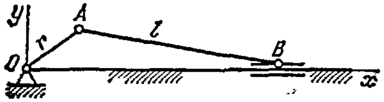
Ответ: $x_A = (R - r)\cos\omega_0 t$,
$y_A = (R - r)\sin\omega_0 t$, $\varphi_1 = -(R/r - 1)\,\omega_0 t$,

где φ_1 — угол поворота подвижной шестеренки, знак минус показывает, что шестеренка вращается в сторону, противоположную кривошипу.

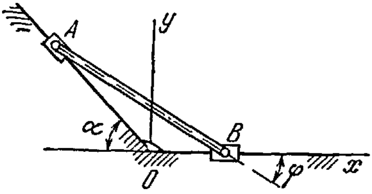
15.5 (15.5). Найти уравнения движения шатуна, если кривошип вращается равномерно; за полюс взять точку A на оси пальца кривошипа; r — длина кривошипа, l — длина шатуна, ω_0 — угловая скорость кривошипа. При $t = 0$ угол $\alpha = 0$.

Ответ: $x = r\cos\omega_0 t$, $y = r\sin\omega_0 t$, $\varphi = -\arcsin\left(\frac{r}{l}\sin\omega_0 t\right)$.

15.6(15.7). Муфты A и B, скользящие вдоль прямолинейных направляющих, соединены стержнем AB длины l. Муфта A движется с постоянной скоростью v_A. Написать уравнения движения стержня



К задаче 15.5

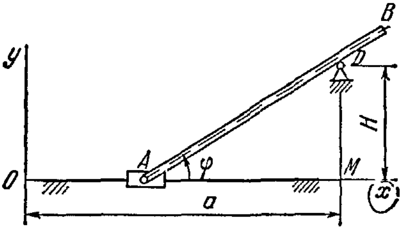


К задаче 15.6

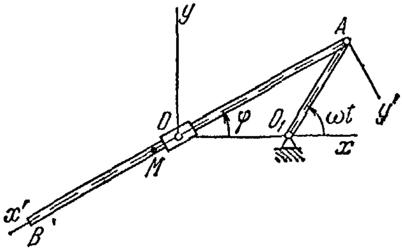
AB, предполагая, что муфта A начала двигаться от точки O. За полюс принять точку A. Угол BOA равен $\pi - \alpha$.

Ответ: $x_A = -v_A t \cos\alpha$, $y_A = v_A t \sin\alpha$, $\varphi = \arcsin\left(\frac{v_A t}{l}\sin\alpha\right)$.

15.7(15.8). Конец A стержня AB скользит по прямолинейной направляющей с постоянной скоростью v, причем стержень при движении опирается на штифт D. Написать уравнения движения стержня и его конца B. Длина стержня равна l, превышение штифта D над прямолинейной направляющей равно H. В начале движения конец стержня A совпадал с точкой O — началом неподвижной системы координат; $OM = a$. За полюс принять точку A.



К задаче 15.7



К задаче 15.8

Ответ: $x_A = vt$, $y_A = 0$, $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{H}{a - vt}$,

$$x_B = vt + l\frac{a - vt}{\sqrt{H^2 + (a - vt)^2}}, \quad y_B = \frac{Hl}{\sqrt{H^2 + (a - vt)^2}}.$$

15.8(15.9). Кривошип O_1A длины $a/2$ вращается с постоянной угловой скоростью ω. С кривошипом в точке A шарнирно соединен стержень AB, проходящий все время через качающуюся муфту O, причем $OO_1 = a/2$. Найти уравнения движения стержня AB и траекторию (в полярных и декартовых координатах) точки M, находящейся на стержне на расстоянии a от шарнира A. За полюс принять точку A.

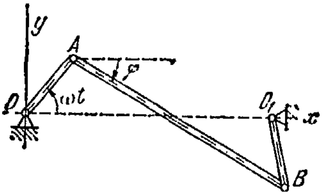
Ответ: 1) $x_A = \frac{a}{2}(1 + \cos\omega t)$, $y_A = \frac{a}{2}\sin\omega t$, $\varphi = \frac{\omega t}{2}$,

2) Кардиоида: $\rho = a(\cos\varphi - 1)$, $x^2 + y^2 = a\left(x - \sqrt{x^2 + y^2}\right)$.

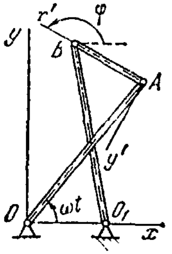
15.9(15.11). Кривошип OA антипараллелограмма $OABO_1$, поставленного на большое звено OO_1, равномерно вращается с угловой скоростью ω. Приняв за полюс точку A, составить уравнения движения звена AB, если $OA = O_1B = a$ и $OO_1 = AB = b$ $(a < b)$; в начальный момент кривошип OA был направлен по OO_1.

Ответ: $x_A = a\cos\omega t$, $y_A = a\sin\omega t$, $\varphi = 2\operatorname{arctg}\dfrac{a\sin\omega t}{b - a\cos\omega t}$

15.10(15.12). Кривошип OA антипараллелограмма $OABO_1$, поставленного на малое звено OO_1, равномерно вращается с угловой скоростью ω. Приняв за полюс точку A, составить уравнения движения звена AB, если $OA = O_1B = a$ и $OO_1 = AB = b$ $(a > b)$; в начальный момент кривошип OA был направлен по OO_1



К задаче 15.9



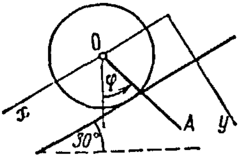
К задаче 15.10

Ответ: $x_A = a\cos\omega t$, $y_A = a\sin\omega t$; $\varphi = 2\operatorname{arcctg}\dfrac{\cos\omega t - b/a}{\sin\omega t}$.

§ 16. Скорости точек твердого тела в плоском движении. Мгновенный центр скоростей

16.1(16.1). *Направив ось перпендикулярно скорости любой из* точек плоской фигуры, показать, что проекции на эту ось скоростей всех лежащих на ней точек равны нулю

16.2. Колесо катится по наклонной плоскости, образующей угол 30° с горизонтом. Центр O колеса движется по закону $x_O = 10t^2$ см, где x — ось, направленная параллельно наклонной плоскости. К центру O колеса подвешен стержень $OA = 36$ см, качающийся вокруг горизонтальной оси O, перпендикулярной плоскости рисунка, по закону $\varphi = \frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{6}t$ рад. Найти скорость конца A стержня AO в момент времени $t = 1$ с.



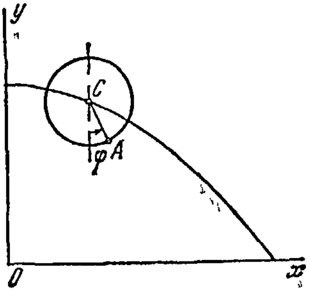
К задаче 16.2

Ответ: скорость равна 2,8 см/с и направлена параллельно наклонной плоскости вниз

16.3(16.4). При движении диска радиуса $r = 20$ см в вертикальной плоскости xy его центр C движется согласно уравнениям

$x_C = 10t$ м, $y_C = (100 - 4{,}9t^2)$ м. При этом диск вращается вокруг горизонтальной оси C, перпендикулярной плоскости диска, с постоянной угловой скоростью $\omega = \pi/2$ рад/с Определить в момент времени $t = 0$ скорость точки A, лежащей на ободе диска. Положение точки A на диске определяется углом $\varphi = \omega t$, отсчитываемым от вертикали против хода часовой стрелки.

Ответ: Скорость направлена по горизонтали вправо и равна по модулю 10,31 м/с.



К задаче 16 3

16.4(16.5). Сохранив условие предыдущей задачи, определить скорость точки A в момент времени $t = 1$ с.

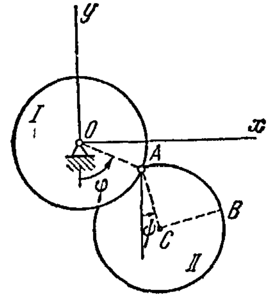
Ответ $v_{A_x} = 10$ м/с, $v_{A_y} = -9{,}49$ м/с, $v_A = 13{,}8$ м/с.

16.5(16.6). Два одинаковых диска радиуса r каждый соединены цилиндрическим шарниром A. Диск I вращается вокруг неподвижной горизонтальной оси O по закону $\varphi = \varphi(t)$. Диск II вращается вокруг горизонтальной оси A согласно уравнению $\psi = \psi(t)$. Оси O и A перпендикулярны плоскости рисунка. Углы φ и ψ отсчитываются от вертикали против хода часовой стрелки. Найти скорость центра C диска II.

Ответ: $v_{C_x} = r(\varphi\cos\varphi + \dot\psi\cos\psi)$,

$v_{C_y} = r(\varphi\sin\varphi + \dot\psi\sin\psi)$,

$v_C = r\sqrt{\varphi^2 + \psi^2 + 2\varphi\psi\cos(\varphi - \psi)}$.



К задаче 16 5

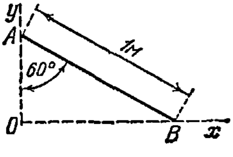
16.6(16.7). Сохранив условие предыдущей задачи, найти скорость точки B диска II, если $\angle ACB = \pi/2$

Ответ:

$v_{B_x} = r[\varphi\cos\varphi + \sqrt{2}\dot\psi\cos(45° + \psi)]$,

$v_{B_y} = r[\varphi\sin\varphi + \sqrt{2}\psi\sin(45° + \psi)]$,

$v_B = r\sqrt{\varphi^2 + 2\psi^2 + 2\sqrt{2}\varphi\psi\cos[45° - (\varphi - \psi)]}$.



К задаче 16 7

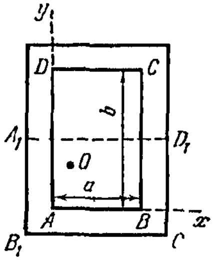
16.7(16.8). Стержень AB длины 1 м движется, опираясь все время своими концами на две взаимно перпендикулярные прямые Ox и Oy. Найти координаты x и y мгновенного центра скоростей в тот момент, когда угол $OAB = 60°$.

Ответ. $x = 0{,}866$ м, $y = 0{,}5$ м.

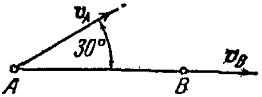
16.8(16.10). Доска складного стола, имеющая форму прямоугольника со сторонами a и b, поворотом вокруг оси шипа O переводится из положения $ABCD$ в положение $A_1B_1C_1D_1$ и, будучи разложена, образует прямоугольник со сторонами b и $2a$. Найти положение оси шипа O относительно сторон AB и AD.

Ответ: $x_O = \frac{a}{4}$, $y_O = \frac{b}{2} - \frac{a}{4}$.

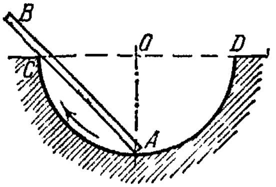
16.9(16.11). Прямая AB движется в плоскости рисунка. В некоторый момент времени скорость v_A точки A составляет с прямой AB угол 30° и равна 180 см/с, направление скорости точки B в этот момент совпадает с направлением прямой AB. Определить скорость v_B точки B.



К задаче 16.8



К задаче 16.9



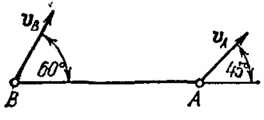
К задаче 16.10

Ответ: $v_B = 156$ см/с.

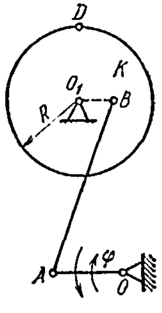
16.10(16.12). Прямая AB движется в плоскости рисунка, причем конец ее A все время находится на полуокружности CAD, а сама прямая все время проходит через неподвижную точку C диаметра CD. Определить скорость v_C точки прямой, совпадающей с точкой C, в тот момент, когда радиус OA перпендикулярен CD, если известно, что скорость точки A в этот момент 4 м/с.

Ответ: $v_C = 2{,}83$ м/с.

16.11. Стержень AB длины 0,5 м движется в плоскости рисунка. Скорость v_A ($v_A = 2$ м/с) образует угол 45° с осью x, совмещенной со стержнем. Скорость v_B точки B образует угол 60° с осью x. Найти модуль скорости точки B и угловую скорость стержня.



К задаче 16.11



К задаче 16.12

Ответ. $v_B = 2{,}82$ м/с, $\omega = 2{,}06$ рад/с.

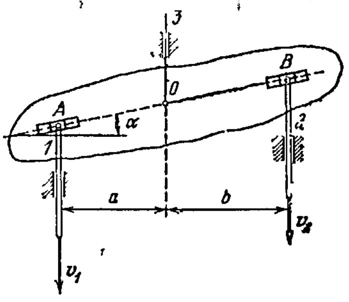
16.12. Точильный станок приводится в движение педалью $OA = 24$ см, которая колеблется около оси O по закону $\varphi = \frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{2}t$ рад (угол φ отсчитывается от горизонтали). Точильный камень K вращается вокруг оси O_1 с помощью стержня AB. Оси O и O_1 перпендикулярны плоскости рисунка. Найти скорость точки D, лежащей на ободе точильного камня K радиуса $R = 2BO_1$, при $t = 0$, если в этот момент OA и O_1B расположены горизонтально

Ответ: $v_D = 39{,}44$ см/с.

16.13. На рисунке изображен суммирующий механизм В него входят стержни *1* и *2*, движущиеся вдоль вертикальных направляющих Эти стержни соединены с коромыслом AB цилиндрическими шарнирами, скользящими в пазах коромысла Стержни движутся со скоростями v_1 и v_2 Показать, что скорость стержня 3, соединенного с центром O коромысла AB и скользящего в вертикальных направляющих, равна по модулю

$$v = \frac{b}{a+b}v_1 + \frac{a}{a+b}v_2,$$

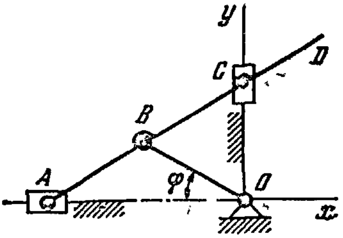
где a и b — размеры, указанные на рисунке. Найти также угловую скорость коромысла AB.



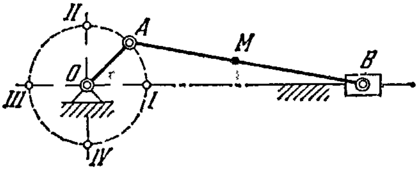
К задаче 16 13

Ответ: $\omega = \frac{v_1 - v_2}{a+b}\cos^2\alpha$ при $v_1 > v_2$

16.14(16.14). Стержень OB вращается вокруг оси O с постоянной угловой скоростью $\omega = 2$ с$^{-1}$ и приводит в движение стержень AD, точки A и C которого движутся по осям: A — по горизонтальной Ox, C — по вертикальной Oy. Определить скорость точки D стержня при $\varphi = 45°$ и найти уравнение траектории этой точки, если $AB = OB = BC = CD = 12$ см



К задаче 16 14



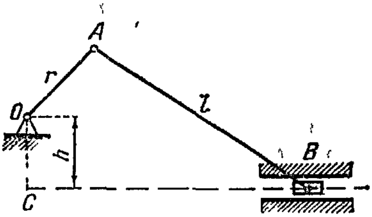
К задаче 16 15

Ответ: $v_D = 53{,}66$ см/с, $\left(\frac{x}{12}\right)^2 + \left(\frac{y}{36}\right)^2 = 1$.

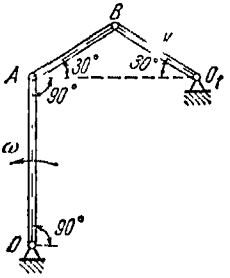
16.15(16.15). В кривошипном механизме длина кривошипа $OA = 40$ см, длина шатуна $AB = 2$ м; кривошип вращается равномерно с угловой скоростью, равной 6π рад/с. Найти угловую скорость ω шатуна и скорость средней его точки M при четырех положениях кривошипа, для которых угол AOB соответственно равен 0, $\pi/2$, π, $3\pi/2$.

Ответ: I. $\omega = -\frac{6}{5}\pi$ рад/с, $v_M = 377$ см/с. II. $\omega = 0$, $v_M = 754$ см/с. III. $\omega = \frac{6}{5}\pi$ рад/с, $v_M = 377$ см/с, IV. $\omega = 0$, $v_M = 754$ см/с. Знак минус в выражении ω указывает, что шатун вращается в сторону, противоположную кривошипу

16.16(16.16). Найти скорость ползуна B нецентрального кривошипного механизма при двух горизонтальных и двух вертикальных



К задаче 16.16



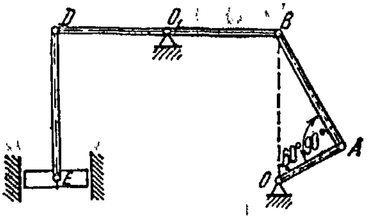
К задаче 16.17

положениях кривошипа, вращающегося вокруг вала O с угловой скоростью $\omega = 1{,}5$ рад/с, если $OA = 40$ см, $AB = 200$ см, $OC = 20$ см

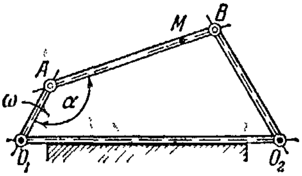
Ответ $v_1 = v_3 = 6{,}03$ см/с, $v_2 = v_4 = 60$ см/с.

16.17(16.17). Определить скорость точки K четырехзвенного механизма $OABO_1$ в положении, указанном на рисунке, если звено OA длины 20 см имеет в данный момент угловую скорость 2 рад/с. Точка K расположена в середине стержня BO_1.

Ответ 20 см/с



К задаче 16.18



К задаче 16.19

16.18(16.18). Определить скорость поршня E приводного механизма насоса в положении, указанном на рисунке, если $OA = 20$ см, $O_1B = O_1D$. Кривошип OA вращается равномерно с угловой скоростью 2 рад/с

Ответ: 46,2 см/с.

16.19(16.19). Стержни O_1A и O_2B, соединенные со стержнем AB посредством шарниров A и B, могут вращаться вокруг неподвижных точек O_1 и O_2, оставаясь в одной плоскости, и образуя шарнирный четырехзвенник. Дано: длина стержня $O_1A = a$ и его угловая скорость ω. Определить построением ту точку M стержня AB, скорость которой направлена вдоль этого стержня, а также найти величину скорости v точки M в тот момент, когда угол O_1AB имеет данную величину α.

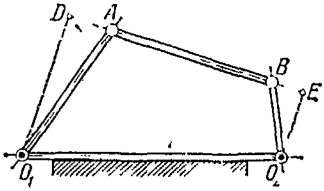
Ответ: $v_M = a\omega \sin\alpha$.

16.20(16.20). Угловая скорость стержня O_1A шарнирного четырехзвенника равна ω_1.

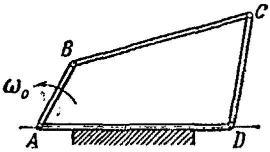
Выразить угловую скорость ω_2 стержня O_2B через ω_1 и кратчайшие расстояния O_1D и O_2E от осей вращения стержней O_1A и O_2B до шатуна AB.

Ответ: $\omega_2 = \omega_1 \dfrac{O_1D}{O_2E}$.

16.21(16.21). В шарнирном четырехзвеннике $ABCD$ ведущий кривошип AB вращается с постоянной угловой скоростью $\omega_0 = 6\pi$ рад/с. Определить мгновенные угловые скорости кривошипа CD и стержня BC в тот момент, когда кривошип AB и стержень BC образуют одну прямую, если $BC = 3AB$.



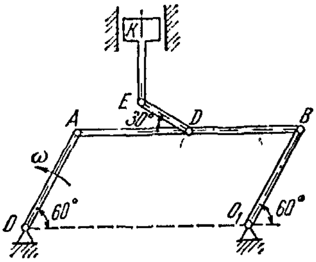
К задаче 16.20



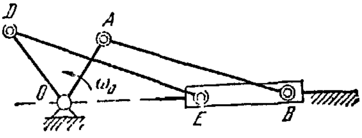
К задаче 16.21

Ответ. $\omega_{BC} = 2\pi$ рад/с, $\omega_{CD} = 0$.

16.22(16.22). К середине D стержня AB шарнирного параллелограмма $OABO_1$ присоединен с помощью шарнира D стержень DE, приводящий в возвратно-поступательное движение ползун K. Определить скорость ползуна K и угловую скорость стержня DE в положении, указанном на рисунке, если $OA = O_1B = 2DE = 20$ см, а угловая скорость звена OA равна в данный момент 1 рад/с.



К задаче 16.22



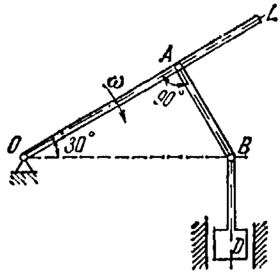
К задаче 16.23

Ответ: $v_K = 40$ см/с, $\omega_{DE} = 3{,}46$ рад/с.

16.23(16.23). Ползуны B и E сдвоенного кривошипно-ползунного механизма соединены стержнем BE. Ведущий кривошип OA и ведомый кривошип OD качаются вокруг общей неподвижной оси O, перпендикулярной плоскости рисунка.

Определить мгновенные угловые скорости ведомого кривошипа OD и шатуна DE в тот момент, когда ведущий кривошип OA, имеющий мгновенную угловую скорость $\omega_0 = 12$ рад/с, перпендикулярен направляющей ползунов. Даны размеры $OA = 10$ см, $OD = 12$ см, $AB = 26$ см, $EB = 12$ см, $DE = 12\sqrt{3}$ см.

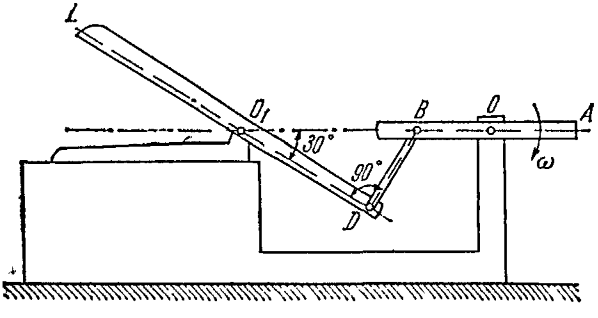
Ответ: $\omega_{OD} = 10\sqrt{3}$ рад/с, $\omega_{DE} = \frac{10}{3}\sqrt{3}$ рад/с.



К задаче 16.24

16.24(16.24). Поршень D гидравлического пресса приводится в движение посредством шарнирно-рычажного механизма $OABD$. В положении, указанном на рисунке, рычаг OL имеет угловую скорость $\omega = 2$ рад/с. Определить скорость поршня D и угловую скорость звена AB, если $OA = 15$ см.

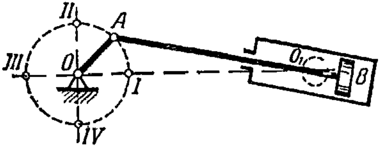
Ответ: $v_D = 34{,}6$ см/с, $\omega_{AB} = 2$ рад/с.



К задаче 16.25

16.25(16.25). Подвижное лезвие L ножниц для резки металла приводится в движение шарнирно-рычажным механизмом $AOBD$. Определить скорость шарнира D и угловую скорость звена BD, если в положении, указанном на рисунке, угловая скорость рычага AB равна 2 рад/с, $OB = 5$ см, $O_1D = 10$ см.

Ответ: $v_D = 8{,}65$ см/с, $\omega_{BD} = 0{,}87$ рад/с.



К задаче 16.26

16.26(16.27). В машине с качающимся цилиндром длина кривошипа $OA = 12$ см, расстояние между осью вала и осью цапф цилиндра $OO_1 = 60$ см, длина шатуна $AB = 60$ см. Определить скорость поршня при четырех положениях кривошипа, указанных на рисунке, если угловая скорость кривошипа $\omega = 5$ рад/с $=$ const.

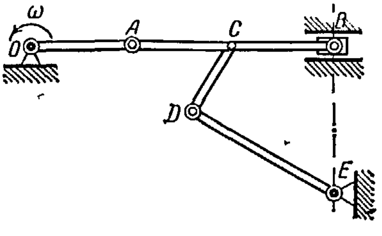
Ответ: $v_{\text{I}} = 15$ см/с, $v_{\text{III}} = 10$ см/с, $v_{\text{II}} = v_{\text{IV}} = 58{,}88$ см/с.

16.27(16.28). В машине с качающимся цилиндром длина кривошипа $OA = 15$ см, угловая скорость кривошипа $\omega_0 = 15$ рад/с $=$ $=$ const. Найти скорость поршня и угловую скорость цилиндра в момент, когда кривошип перпендикулярен шатуну. (См. рисунок к задаче 16.26.)

Ответ: $v = 225$ см/с, $\omega = 0$.

16.28(16.29). Кривошипный механизм связан шарнирно в середине C шатуна со стержнем CD, а последний — со стержнем DE, который может вращаться вокруг оси E.

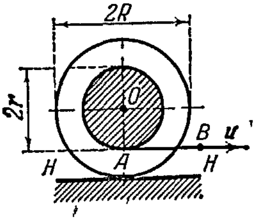
Определить угловую скорость стержня DE в указанном на рисунке положении кривошипного механизма, если точки B и E расположены на одной вертикали; угловая скорость ω кривошипа OA равна 8 рад/с, $OA = 25$ см, $DE = 100$ см, $\angle CDE =$ $= 90°$ и $\angle BED = 30°$.



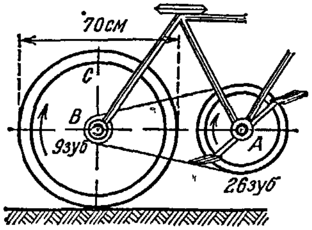
К задаче 16.28

Ответ: $\omega_{DE} = 0{,}5$ рад/с.

16.29(16.30). Катушка радиуса R катится по горизонтальной плоскости HH без скольжения. На средней цилиндрической части катушки радиуса r намотана нить, конец которой B обладает при этом движении скоростью u по горизонтальному направлению. Определить скорость v перемещения оси катушки.



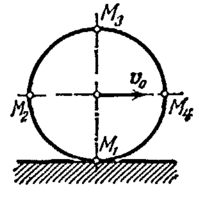
К задаче 16.29



К задаче 16.30

Ответ: $v = u\dfrac{R}{R-r}$.

16.30(16.31). Цепная передача в велосипеде состоит из цепи, охватывающей зубчатое колесо A с 26 зубцами и шестерню B с 9 зубцами. Шестерня B неизменно соединена с задним колесом C, диаметр которого равен 70 см. Определить скорость велосипеда, когда колесо A делает в секунду один оборот, а колесо C катится при этом без скольжения по прямолинейному пути.



К задаче 16.31

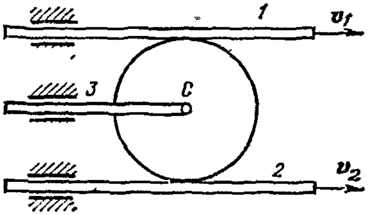
Ответ. 22,87 км/ч.

16.31(16.32). Колесо радиуса $R = 0{,}5$ м катится без скольжения по прямолинейному участку пути; скорость центра его постоянна и равна $v_0 = 10$ м/с. Найти скорости концов M_1, M_2, M_3 и M_4

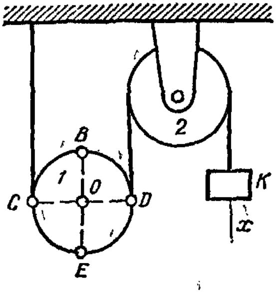
вертикального и горизонтального диаметров колеса. Определить его угловую скорость.

Ответ. $v_1 = 0$, $v_2 = 14{,}14$ м/с, $v_3 = 20$ м/с, $v_4 = 14{,}14$ м/с, $\omega = 20$ рад/с.

16.32. На рисунке изображен суммирующий механизм. Две параллельные рейки *1* и *2* движутся в одну сторону с постоянными скоростями v_1 и v_2. Между рейками зажат диск радиуса r, катящийся по рейкам без скольжения. Показать, что скорость средней рейки *3*, присоединенной к оси C диска, равна полусумме скоростей реек *1* и *2*. Найти также угловую скорость диска.



К задаче 16.32

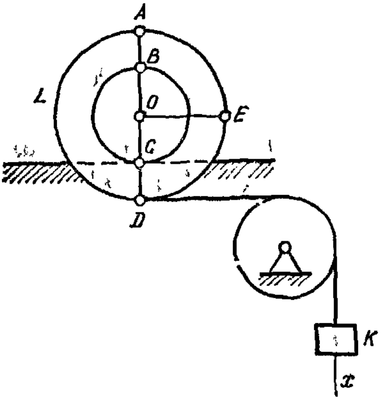


К задаче 16.33

Ответ: $\omega = \dfrac{v_1 - v_2}{2r}$.

16.33. Подвижный блок *1* и неподвижный блок *2* соединены нерастяжимой нитью. Груз K, прикрепленный к концу этой нити, опускается по вертикали вниз по закону $x = 2t^2$ м. Определить скорости точек C, D, B и E, лежащих на ободе подвижного блока, в момент $t = 1$ с в положении, указанном на рисунке, если радиус подвижного блока *1* равен 0,2 м, а $CD \perp BE$. Найти также угловую скорость блока *1*.

Ответ: $v_C = 0$, $v_O = 2$ м/с, $v_B = v_F = 2\sqrt{2}$ м/с, $\omega = 10$ рад/с.



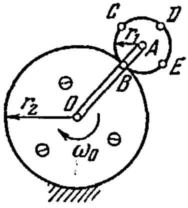
К задаче 16.34

16.34. Груз K, связанный посредством нерастяжимой нити с катушкой L, опускается вертикально вниз по закону $x = t^2$ м. При этом катушка L катится без скольжения по неподвижному горизонтальному рельсу. Определить скорости точек C, A, B, O и E катушки в момент $t = 1$ с в положении, указанном на рисунке, а также угловую скорость катушки, если $AD \perp OE$, а $OD = 2OC = 0{,}2$ м.

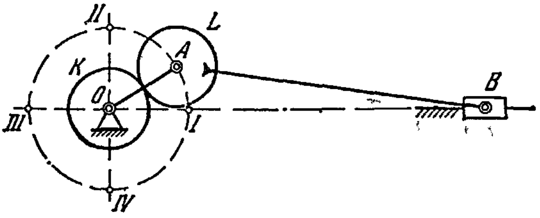
Ответ: $v_C = 0$, $v_A = 6$ м/с, $v_B = 4$ м/с, $v_O = 2$ м/с, $v_L = 4{,}46$ м/с, $\omega = 20$ рад/с.

16.35(16.34). Кривошип OA, вращаясь с угловой скоростью $\omega_0 = 2{,}5$ рад/с вокруг оси O неподвижного колеса радиуса $r_2 = 15$ см, приводит в движение насаженную на его конец A шестеренку радиуса $r_1 = 5$ см. Определить величину и направление скоростей точек A, B, C, D и E подвижной шестеренки, если $CE \perp BD$.

Ответ: $v_A = 50$ см/с, $v_B = 0$, $v_D = 100$ см/с, $v_C = v_E = 70{,}7$ см/с.



К задаче 16.35



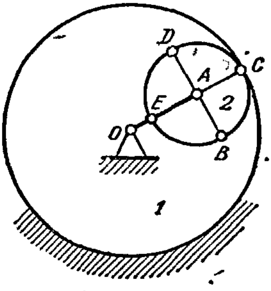
К задаче 16.36

16.36(16.35). На ось O насажены зубчатое колесо K диаметра 20 см и кривошип OA длиной 20 см, не связанные между собой. С шатуном AB наглухо скреплено зубчатое колесо L диаметра 20 см, длина шатуна $AB = 1$ м. Колесо K вращается равномерно с угловой скоростью равной 2π рад/с, и, захватывая зубья колеса L, приводит в движение шатун AB и кривошип OA. Определить угловую скорость ω_1 кривошипа OA в четырех его положениях: двух горизонтальных и двух вертикальных.

Ответ: I. $\omega_1 = \frac{10}{11}\pi$ рад/с, III. $\omega_1 = \frac{10}{9}\pi$ рад/с, II. $\omega_1 = \pi$ рад/с, IV. $\omega_1 = \pi$ рад/с.

16.37. Кривошип $OA = 20$ см вращается вокруг неподвижной оси O, перпендикулярной плоскости рисунка, с угловой скоростью 2 рад/с. На его конец A насажена шестеренка 2 радиуса 10 см, находящаяся во внутреннем зацеплении с неподвижным колесом 1, соосным с кривошипом OA. Определить скорости точек B, C, D и E, лежащих на ободе шестеренки 2, если $BD \perp OC$.

Ответ: $v_C = 0$, $v_B = v_D = 40\sqrt{2}$ см/с, $v_E = 80$ см/с.

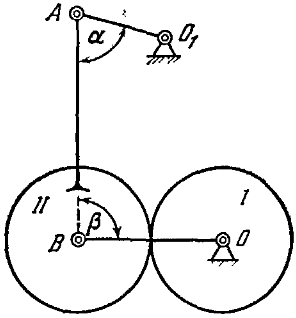


К задаче 16.37

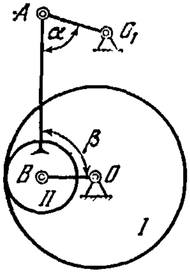
16.38(16.36). Механизм Уатта состоит из коромысла O_1A, которое, качаясь на оси O_1, передает при помощи шатуна AB движение кривошипу OB, свободно насаженному на ось O. На той же оси O сидит колесо I; шатун AB оканчивается колесом II, наглухо связанным с шатуном. Определить угловые скорости кривошипа OB и колеса I в момент, когда $\alpha = 60°$, $\beta = 90°$, если $r_1 = r_2 = 30\sqrt{3}$ см, $O_1A = 75$ см, $AB = 150$ см и угловая скорость коромысла $\omega_0 = 6$ рад/с.

Ответ: $\omega_{OB} = 3{,}75$ рад/с, $\omega_1 = 6$ рад/с.

16.39(16.37). Планетарный механизм состоит из кривошипа O_1A, приводящего в движение шатун AB, коромысла OB и колеса I радиуса $r_1 = 25$ см; шатун AB оканчивается шестеренкой II радиуса $r_2 = 10$ см, наглухо с ним связанной. Определить угловую скорость кривошипа O_1A и колеса I в момент, когда $\alpha = 45°$, $\beta = 90°$, если $O_1A = 30\sqrt{2}$ см, $AB = 150$ см, угловая скорость коромысла OB $\omega = 8$ рад/с.



К задаче 16.38



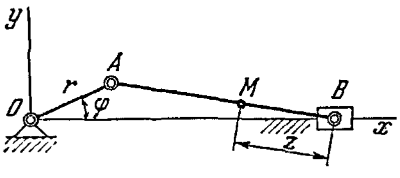
К задаче 16.39

Ответ $\omega_{O1A} = 4$ рад/с, $\omega_I = 5{,}12$ рад/с.

16.40(16.38). В машине с качающимся цилиндром длина кривошипа $OA = r$ и расстояние $OO_1 = a$. Кривошип вращается с постоянной угловой скоростью ω_0 Определить угловую скорость ω_1 шатуна AB в зависимости от угла поворота кривошипа φ. Определить наибольшее и наименьшее значения ω_1, а также значение угла φ, при котором $\omega_1 = 0$ (См. рисунок к задаче 16 26)

Ответ: $\omega_1 = \dfrac{\omega_0 r\,(a\cos\varphi - r)}{a^2 + r^2 - 2ar\cos\varphi}$; $\omega_{1\,max} = \dfrac{\omega_0 r}{a - r}$ при $\varphi = 0$; $\omega_{1\,min} = -\dfrac{\omega_0 r}{a + r}$ при $\varphi = \pi$, $\omega_1 = 0$ при $\varphi = \arccos\dfrac{r}{a}$

16.41(16.39). Найти приближенное выражение для проекции на координатные оси скорости любой точки M шатуна AB кривошипного механизма при равномерном вращении вала с угловой скоростью ω, предполагая, что длина кривошипа r мала по сравнению с длиной шатуна l. Положение точки M определяется ее расстоянием $MB = z$.



К задаче 16 41

Примечание В формулу, получаемую при решении задачи, входит $\sqrt{1 - \left(\frac{r}{l}\sin\varphi\right)^2}$, где $\varphi = \omega t$ обозначает угол BOA Это выражение разлагаем в ряд и удерживаем только два первых члена

Ответ. $v_x = -\omega\left[r\sin\varphi + \dfrac{(l - z)\,r^2}{2l^2}\sin 2\varphi\right]$, $v_y = \dfrac{zr}{l}\,\omega\cos\varphi$.

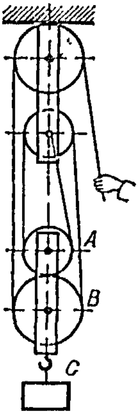
§ 17. Неподвижная и подвижная центроиды

17.1(17.1). Найти центроиды при движении стержня AB, указанном в задаче 16.7.

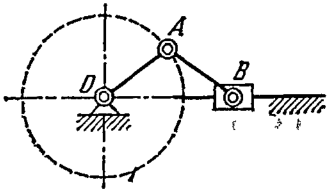
Ответ. Подвижная центроида — окружность радиуса 0,5 м с центром в середине AB; неподвижная центроида — окружность радиуса 1 м, с центром в точке O.

17.2(17.2). Определить подвижные и неподвижные центроиды блоков A и B полиспаста, радиусы которых соответственно равны r_A и r_B, предполагая, что обойма C движется поступательно.

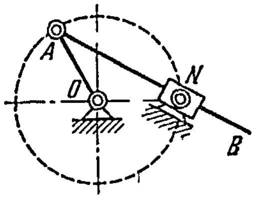
Ответ: Подвижные центроиды: блока A — окружность радиуса r_A, блока B — окружность радиуса $\frac{1}{3} r_B$, неподвижные центроиды вертикальные касательные к подвижным центроидам с правой стороны их.



К задаче 17.2



К задаче 17.3



К задаче 17.4

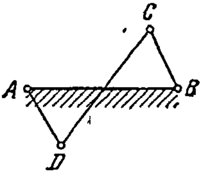
17.3(17.3). Найти геометрически неподвижную и подвижную центроиды шатуна AB, длина которого равна длине кривошипа:

$$AB = OA = r.$$

Ответ: Неподвижная центроида — окружность радиуса $2r$ с центром в точке O, а подвижная — окружность радиуса r с центром в точке A пальца кривошипа.

17.4(17.5). Стержень AB движется таким образом, что одна из его точек A описывает окружность радиуса r с центром в точке O, а самый стержень проходит постоянно через данную точку N, лежащую на той же окружности. Найти его центроиды.

Ответ: Неподвижная центроида — окружность радиуса r с центром в точке O; подвижная центроида — окружность радиуса $2r$ с центром в точке A.



К задаче 17.5

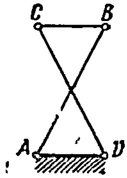
17.5(17.6). Найти неподвижную и подвижную центроиды звена CD антипараллелограмма, поставленного на большее звено AB, если $AB = CD = b$, $AD = BC = a$ и $a < b$.

Ответ. Неподвижная центроида — гипербола с фокусами в точках A и B, а подвижная центроида — такая же гипербола с фокусами в точках C и D Действительные полуоси гипербол равны $a/2$.

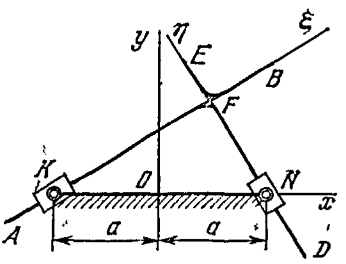
17.6(17.7). Найти неподвижную и подвижную центроиды звена BC антипараллелограмма, поставленного на меньшее звено AD, если $AB = CD = b$, $AD = CB = a$ и $a < b$

Ответ Неподвижная центроида — эллипс с фокусами в точках A и D и с полуосями $b/2$ и $\frac{1}{2}\sqrt{b^2 - a^2}$ Подвижная центроида — такой же эллипс, но с фокусами в точках B и C

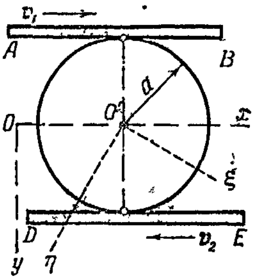
17.7(17.8). Два стержня AB и DE, наглухо соединенные под прямым углом в точке F, движутся таким образом, что стержень AB всегда проходит через неподвижную точку K, а другой стержень DE — через неподвижную точку N; расстояние $KN = 2a$.



К задаче 17 6



К задаче 17 7



К задаче 17 8

Найти уравнения центроид в этом движении; оси координат указаны на рисунке

Ответ: $x_C^2 + y_C^2 = a^2$, $\xi_C^2 + \eta_C^2 = 4a^2$.

17.8(17.9). Две параллельные рейки AB и DE движутся в противоположные стороны с постоянными скоростями v_1 и v_2. Между рейками находится диск радиуса a, который вследствие движения реек и трения катится по ним без скольжения

Найти 1) уравнения центроид диска, а также определить 2) скорость $v_{O'}$ центра O' диска и 3) угловую скорость ω диска; оси координат указаны на рисунке

Ответ. 1) $y_C = a\dfrac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2}$, $\xi_C^2 + \eta_C^2 = a^2\left(\dfrac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2}\right)^2$;

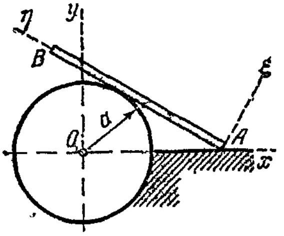
2) скорость центра диска направлена в сторону большей из данных скоростей; величина $v_{O'}$ равна полуразности величин данных скоростей;

3) $\omega = \dfrac{v_1 + v_2}{2a}$.

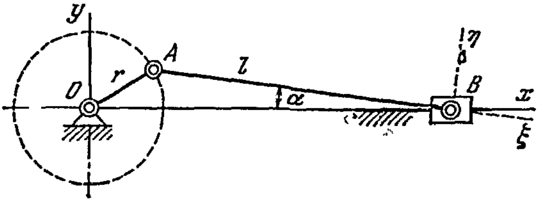
17.9(17.10). Найти уравнения неподвижной и подвижной центроид стержня AB, который, опираясь на окружность радиуса a, концом A скользит вдоль прямой Ox, проходящей через центр этой окружности; оси координат указаны на рисунке.

Ответ: $x_C^2(x_C^2-a^2)-a^2y_C^2=0,\ \eta_C^2=a\xi_C.$

17.10(17.12). Найти приближенные уравнения неподвижной и подвижной центроид шатуна AB кривошипного механизма, предполагая, что длина шатуна $AB=l$ настолько велика по сравнению



К задаче 17.9

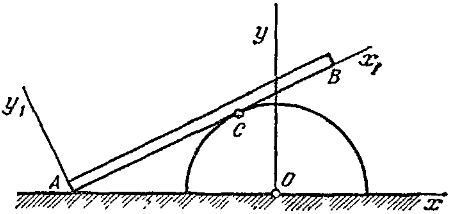


К задаче 17.10

с длиной кривошипа $OA=r$, что для угла $ABO=\alpha$ можно принять $\sin\alpha=\alpha$ и $\cos\alpha=1$; оси координат указаны на рисунке.

Ответ: $(x_C-l)^2(x_C^2+y_C^2)=r^2x_C^2,\ l^2\xi_C^2(l^2+\eta_C^2)=r^2\eta_C^4.$

17.11. Стержень AB скользит точкой A по горизонтальной прямой и промежуточной точкой C касается круга радиуса r. Определить уравнение неподвижной и подвижной центроид стержня.



К задаче 17.11

Ответ. Неподвижная центроида имеет уравнение $y^2r^2=x^4-x^2r^2$ в системе координат xOy с началом в центре круга.

Подвижная центроида — парабола $x_1^2=ry_1$ в системе координат x_1Ay_1.

§ 18. Ускорения точек твердого тела в плоском движении. Мгновенный центр ускорений

18.1. Колесо катится по наклонной плоскости, образующей угол 30° с горизонтом (см. рисунок к задаче 16.2). Центр O колеса движется по закону $x_O=10t^2$ см, где x — ось, направленная параллельно наклонной плоскости. К центру O колеса подвешен стержень $OA=36$ см, качающийся вокруг горизонтальной оси O, перпендикулярной плоскости рисунка, по закону $\varphi=\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{6}t$ рад. Найти ускорение конца A стержня OA в момент времени $t=1$ с.

Ответ: $w_{Ax}=25{,}2$ см/с², $w_{Ay}=-8{,}25$ см/с², $w_A=26{,}4$ см/с².

18.2(18.3). При движении диска радиуса $r=20$ см в вертикальной плоскости xy его центр C движется согласно уравнениям $x_C=10t$ м, $y_C=(100-4{,}9t^2)$ м. При этом диск вращается вокруг горизонтальной оси C, перпендикулярной плоскости диска, с постоянной угловой скоростью $\omega = \pi/2$ рад/с (см. рисунок к задаче 16.3). Определить в момент времени $t = 0$ ускорение точки A, лежащей на ободе диска. Положение точки A на диске определяется углом $\varphi = \omega t$, отсчитываемым от вертикали против хода часовой стрелки.

Ответ. Ускорение направлено по вертикали вниз и равно по модулю 9,31 м/с^2.

18.3(18.4). Сохранив условие предыдущей задачи, определить ускорение точки A в момент времени $t = 1$ с.

Ответ. $w_{Ax} = -0{,}49$ м/с^2, $w_{Ay} = -9{,}8$ м/с^2, $w_A = 9{,}81$ м/с^2.

18.4(18.5). Два одинаковых диска радиуса r каждый соединены цилиндрическим шарниром A. Диск I вращается вокруг неподвижной горизонтальной оси O по закону $\varphi = \varphi(t)$. Диск II вращается вокруг горизонтальной оси A согласно уравнению $\psi = \psi(t)$. Оси O и A перпендикулярны плоскости рисунка. Углы φ и ψ отсчитываются от вертикали против хода часовой стрелки (см. рисунок к задаче 16.5).

Найти ускорение центра C диска II.

Ответ. $w_C = \sqrt{w_{Cx}^2 + w_{Cy}^2}$, где $w_{Cx} = r(\ddot\varphi\cos\varphi - \dot\varphi^2\sin\varphi + \ddot\psi\cos\psi - \dot\psi^2\sin\psi)$, $w_{Cy} = r(\ddot\varphi\sin\varphi + \dot\varphi^2\cos\varphi + \ddot\psi\sin\psi + \dot\psi^2\cos\psi)$.

18.5(18.6). Сохранив условие предыдущей задачи, найти ускорение точки B диска II, если $\angle ACB = \pi/2$.

Ответ. $w_B = \sqrt{w_{Bx}^2 + w_{By}^2}$, где $w_{Bx} = r\left[\ddot\varphi\cos\varphi - \dot\varphi^2\sin\varphi + \sqrt{2}\,\ddot\psi\cos(45^\circ + \psi) - \sqrt{2}\dot\psi^2\sin(45^\circ + \psi)\right]$, $w_{By} = r\left[\ddot\varphi\sin\varphi + \dot\varphi^2\cos\varphi + \sqrt{2}\ddot\psi\sin(15^\circ + \psi) + \sqrt{2}\dot\psi^2\cos(45^\circ + \psi)\right]$.

18.6(18.7). Линейка эллипсографа скользит концом B по оси Ox, концом A — по оси Oy, $AB = 20$ см (см. рисунок к задаче 15.1).

Определить скорость и ускорение точки A в момент, когда угол φ наклона линейки к оси Ox равен 30°, а проекции скорости и ускорения точки B на ось x равны $v_{Bx} = -20$ см/с, $w_{Bx} = -10$ см/с^2.

Ответ. $v_{Ay} = 31{,}64$ см/с, $w_{Ay} = -142{,}68$ см/с^2.

18.7(18.8). Муфты A и B, скользящие вдоль прямолинейных образующих, соединены стержнем AB длины l. Муфта A движется с постоянной скоростью v_A (см. рисунок к задаче 15.6). Определить ускорение муфты B и угловое ускорение стержня AB в положении, при котором стержень AB образует с прямой OB заданный угол φ.

Ответ. $w_B = \frac{v_A^2}{l}\frac{\sin^2\alpha}{\cos\varphi}$, $\varepsilon_{AB} = \frac{v_A^2}{l^2}\frac{\sin^2\alpha}{\cos^3\varphi}\sin\varphi$.

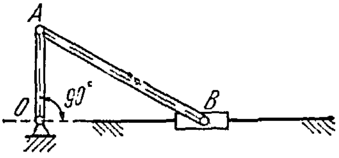
18.8(18.9). Найти ускорение ползуна B и мгновенный центр ускорений K шатуна AB кривошипно-ползунного механизма, изображенного на рисунке к задаче 16.11, при двух горизонтальных и одном вертикальном положениях кривошипа OA, вращающегося с постоянной угловой скоростью $\omega_0 = 15$ рад/с вокруг вала O. Длина кривошипа $OA = 40$ см, длина шатуна $AB = 200$ см.

Ответ. Мгновенный центр ускорений K при $\varphi = 0°$ и $\varphi = 180°$ лежит на оси направляющей ползуна.

1) $\varphi = 0$, $w_B = 108$ м/с^2, $BK = 12$ м
2) $\varphi = 90°$, $w_B = 18{,}37$ м/с^2, $BK = 40$ см, $AK = 196$ см
3) $\varphi = 180°$, $w_B = 72$ м/с^2, $BK = 8$ м.

18.9(18.10). Длина шатуна AB кривошипно-ползунного механизма в два раза больше длины кривошипа OA. Определить положение точки шатуна AB, ускорение которой направлено вдоль шатуна, в момент, когда кривошип перпендикулярен направляющей ползуна, кривошип OA вращается равномерно.

Ответ. На расстоянии четверти длины шатуна, измеренном от ползуна B.



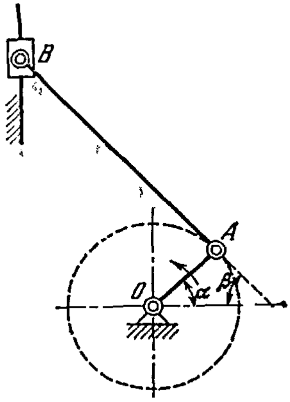
К задаче 18.9

18.10(18.11). Поршень D гидравлического пресса приводится в движение посредством шарнирно-рычажного механизма $OABD$. В положении, указанном на рисунке 16.24, рычаг OL имеет угловую скорость $\omega = 2$ рад/с и угловое ускорение $\varepsilon = 4$ рад/с^2, $OA = 15$ см. Определить ускорение поршня D и угловое ускорение звена AB.

Ответ. $w_D = 29{,}4$ см/с^2, $\varepsilon_{AB} = 5{,}2$ рад/с^2.

18.11(18.12). Кривошип OA длины 20 см вращается равномерно с угловой скоростью $\omega_0 = 10$ рад/с и приводит в движение шатун AB длины 100 см; ползун B движется по вертикали. Найти угловую скорость и угловое ускорение шатуна, а также ускорение ползуна B в момент, когда кривошип и шатун взаимно перпендикулярны и образуют с горизонтальной осью углы $\alpha = 45°$ и $\beta = 45°$.

Ответ. $\omega = 2$ рад/с, $\varepsilon = 16$ рад/с^2, $w_B = 565{,}6$ см/с^2.



К задаче 18.11

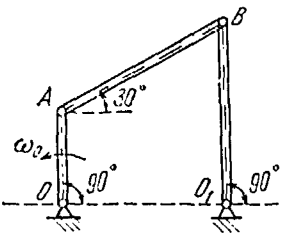
18.12(18.13). Определить угловую скорость и угловое ускорение шатуна нецентрального кривошипного механизма, а также скорость и ускорение ползуна B при 1) горизонтальном правом и 2) вертикальном верхнем положении кривошипа OA, если последний вращается вокруг конца O с постоянной угловой скоростью ω_0, причем даны: $OA = r$, $AB = l$, расстояние оси O кривошипа от линии движения ползуна $OC = h$ (см. рисунок к задаче 16.16).

Ответ: 1) $\omega = \dfrac{r\omega_0}{\sqrt{l^2 - h^2}}$, $\varepsilon = \dfrac{hr^2\omega_0^2}{(l^2 - h^2)^{3/2}}$, $v_B = \dfrac{hr\omega_0}{\sqrt{l^2 - h^2}}$,

$$w_B = r\omega_0^2\left[1 + \frac{rl^2}{(l^2 - h^2)^{3/2}}\right].$$

2) $\omega = 0,\ \varepsilon = \dfrac{r\omega_0^2}{\sqrt{l^2 - (r+h)^2}},\ v_B = r\omega_0,\ w_B = \dfrac{r(r+h)\,\omega_0^2}{\sqrt{l^2 - (r+h)^2}}$.

18.13(18.14). Стержень OA шарнирного четырехзвенника $OABO_1$ вращается с постоянной угловой скоростью ω_0. Определить угловую скорость, угловое ускорение стержня AB, а также ускорение шарнира B в положении, указанном на рисунке, если $AB = 2OA = 2a$.



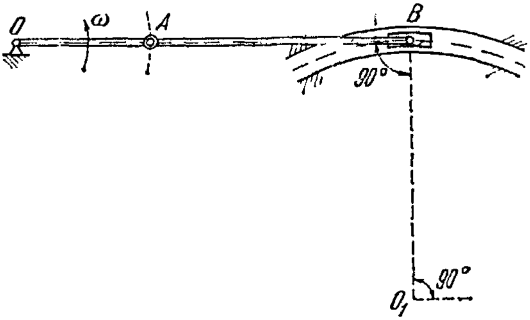
К задаче 18.13

Ответ: $\omega = 0,\ \varepsilon = \dfrac{\sqrt{3}}{6}\omega_0^2,\ w_B = \dfrac{\sqrt{3}}{3}a\omega_0^2$.

18.14(18.15). Подвижное лезвие L ножниц для резки металла приводится в движение шарнирно-рычажным механизмом $AOBD$. В положении, указанном на рисунке к задаче 16.25, угловая скорость рычага AB равна 2 рад/с, его угловое ускорение равно 4 рад/с², $OB = 5$ см, $O_1D = 10$ см. Найти ускорение шарнира D и угловое ускорение звена BD.

Ответ: $w_D = 32{,}4$ см/с², $\varepsilon_{BD} = 2{,}56$ рад/с².

18.15(18.17). Ползун B кривошипно-ползунного механизма OAB движется по дуговой направляющей. Определить касательное и нормальное ускорения ползуна B в положении, указанном на рисунке, если $OA = 10$ см, $AB = 20$ см. Кривошип OA вращается, имея в данный момент угловую скорость $\omega = 1$ рад/с, угловое ускорение $\varepsilon = 0$.



К задаче 18.15

Ответ: $w_{B\tau} = 15$ см/с², $w_{Bn} = 0$.

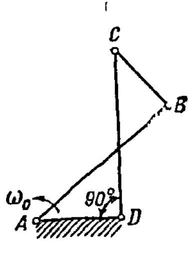
18.16(18.18). Определить угловое ускорение шатуна AB механизма, рассмотренного в предыдущей задаче, если в положении, указанном на рисунке, угловое ускорение кривошипа OA равно 2 рад/с².

Ответ: 1 рад/с².

18.17. Точильный станок приводится в движение педалью $OA = 21$ см, которая колеблется около оси O по закону $\varphi = \dfrac{\pi}{6}\sin\dfrac{\pi}{2}t$ рад (угол φ отсчитывается от горизонтали). Точильный камень K вращается вокруг оси O_1 с помощью стержня AB. Оси O и O_1 перпендикулярны плоскости рисунка (см. рисунок к задаче 16.12). Найти в момент времени $t = 0$ ускорение точки B точильного камня K, если $O_1B = 12$ см. В этот момент OA и O_1B расположены горизонтально, причем $\angle OAB = 60°$.

Ответ: $w_B = 12{,}9$ см/с².

18.18(18.19). Антипараллелограмм состоит из двух кривошипов AB и CD одинаковой длины 40 см и шарнирно соединенного с ними стержня BC длины 20 см Расстояние между неподвижными осями A и D равно 20 см. Кривошип AB вращается с постоянной угловой скоростью ω_0. Определить угловую скорость и угловое ускорение стержня BC в момент, когда угол ADC равен 90°.



К задаче 18 18

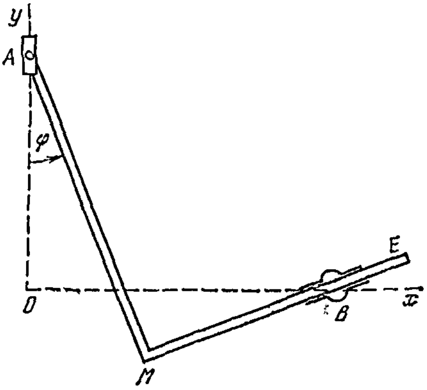
Ответ: $\omega_{BC}=\frac{8}{3}\omega_0$, вращение замедленное; $\varepsilon_{BC}=\frac{20}{9}\omega_0^2$

18.19(18.20). В машине с качающимся цилиндром, лежащим на цапфах O_1, длина кривошипа $OA=12$ см, длина шатуна $AB=60$ см; расстояние между осью вала и осью цапф цилиндра $OO_1=60$ см. Определить ускорение поршня B и радиус кривизны его траектории при двух положениях цилиндра: 1) когда кривошип и шатун взаимно перпендикулярны и 2) когда кривошип занимает положение III; угловая скорость кривошипа $\omega_0=\text{const}=5$ рад/с. (См. рисунок к задаче 16 26)

Ответ 1) $w=6{,}12$ см/с², $\rho=589$ см;

2) $w=258{,}3$ см/с², $\rho=0{,}39$ см.

18.20. Жесткий прямой угол AME движется так, что точка A остается все время на неподвижной прямой Oy, тогда как другая сторона ME проходит через вращающийся шарнир B. Расстояние $AM=OB=a$ Скорость v_A точки A постоянна Определить ускорение точки M как функцию угла φ.



К задаче 18 20

Ответ: $w_M=\frac{v_A^2\sqrt{2}}{a}(1+\sin\varphi)^{3/2}$. Вектор ускорения направлен внутрь угла и составляет со стороной MA угол $\alpha=45°-\varphi/2$

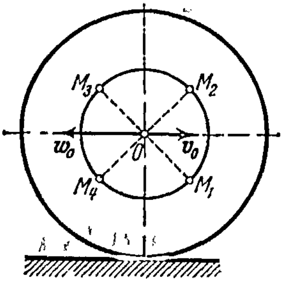
18.21(18.21). Центр колеса, катящегося без скольжения по прямолинейному рельсу, движется равномерно со скоростью v. Определить ускорение любой точки, лежащей на ободе колеса, если его радиус равен r

Ответ. Ускорение направлено к центру колеса и равно v^2/r.

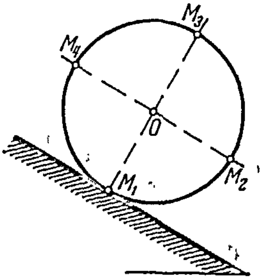
18.22(18.22). Вагон трамвая движется по прямолинейному горизонтальному участку пути с замедлением $w_0=2$ м/с², имея в данный момент скорость $v_0=1$ м/с Колеса катятся по рельсам без скольжения. Найти ускорения концов двух диаметров ротора, образующих с вертикалью углы по 45°, если радиус колеса $R=0{,}5$ м, а ротора $r=0{,}25$ м.

Ответ: $w_1 = 2{,}449$ м/с², $w_2 = 3{,}414$ м/с², $w_3 = 2{,}449$ м/с², $w_4 = 0{,}586$ м/с²

18.23(18.23). Колесо катится без скольжения в вертикальной плоскости по наклонному прямолинейному пути. Найти ускорение концов двух взаимно перпендикулярных диаметров колеса, из которых один параллелен рельсу, если в рассматриваемый момент времени скорость центра колеса $v_0 = 1$ м/с, ускорение центра колеса $w_0 = 3$ м/с², радиус колеса $R = 0{,}5$ м.



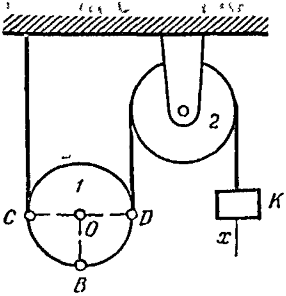
К задаче 18.22



К задаче 18.23

Ответ. $w_1 = 2$ м/с², $w_2 = 3{,}16$ м/с², $w_3 = 6{,}32$ м/с², $w_4 = 5{,}83$ м/с².

18.24(18.24). Колесо радиуса $R = 0{,}5$ м катится без скольжения по прямолинейному рельсу, в данный момент центр O колеса имеет скорость $v_0 = 0{,}5$ м/с и замедление $w_0 = 0{,}5$ м/с². Найти: 1) мгновенный центр ускорения колеса, 2) ускорение w_C точки колеса, совпадающей с мгновенным центром C скоростей, а также 3) ускорение точки M и 4) радиус кривизны ее траектории, если $OM = MC = 0{,}5R$.



К задаче 18.25

Ответ 1) $r = 0{,}3536$ м, $\theta = -\pi/4$; 2) $w_C = 0{,}5$ м/с²; 3) $w_M = 0{,}3536$ м/с²; 4) $\rho = 0{,}25$ м

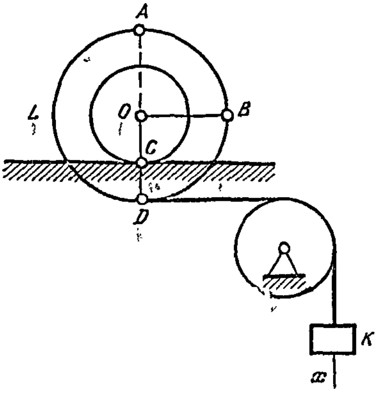
18.25. Подвижный блок *1* и неподвижный блок *2* соединены нерастяжимой нитью. Груз K, прикрепленный к концу этой нити, опускается вертикально вниз по закону $x = 2t^2$ м. Определить ускорение точек C, B и D, лежащих на ободе подвижного блока *1*, в момент $t = 0{,}5$ с в положении, указанном на рисунке, если $OB \perp CD$, а радиус подвижного блока *1* равен 0,2 м.

Ответ $w_C = 5$ м/с², $w_B = 7{,}29$ м/с², $w_D = 6{,}4$ м/с²

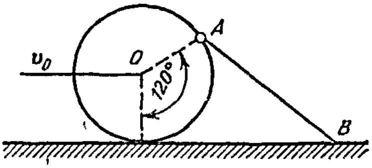
18.26. Груз K, связанный посредством нерастяжимой нити с катушкой L, опускается вертикально вниз по закону $x = t^2$ м. При этом катушка L катится без скольжения по неподвижному горизонтальному рельсу. Определить ускорения точек A, B и D, лежащих на ободе катушки, ее угловую скорость и угловое ускорение в момент времени $t = 0{,}5$ с в положении, указанном на рисунке; $AD \perp OB$, $OD = 2\ OC = 0{,}2$ м.

Ответ. $w_A = 20{,}9$ м/с², $w_B = 22{,}4$ м/с², $w_D = 20{,}1$ м/с², $\omega = 10$ рад/с, $\varepsilon = 20$ рад/с².

18.27. Колесо радиуса R катится без скольжения по плоскости. Центр O колеса движется с постоянной скоростью v_O. В точке A с ним шарнирно соединен стержень AB длины $l = 3R$. Другой конец стержня скользит по плоскости В положении, указанном на рисунке, определить угловую скорость и угловое ускорение стержня AB, а также линейные скорость и ускорение его точки B.



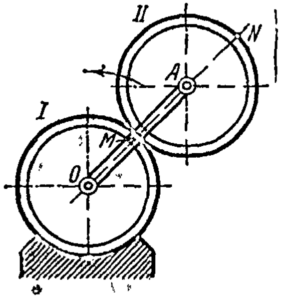
К задаче 18 26



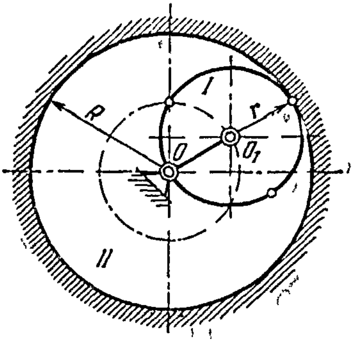
К задаче 18 27

Ответ: $\omega_{AB} = \dfrac{v_O}{3R}$, $\varepsilon_{AB} = \dfrac{2\sqrt{3}}{27}\dfrac{v_O^2}{R^2}$, $v_B = 2v_O$, $w_B = \dfrac{5\sqrt{3}}{9}\dfrac{v_O^2}{R}$.

18.28(18.25). Шестеренка радиуса $R = 12$ см приводится в движение кривошипом OA, вращающимся вокруг оси O неподвижной шестеренки с тем же радиусом; кривошип вращается с угловым ускорением $\varepsilon_0 = 8$ рад/с², имея в данный момент угловую скорость $\omega = 2$ рад/с. Определить 1) ускорение той точки подвижной шестеренки, которая в данный момент совпадает с мгновенным центром скоростей, 2) ускорение диаметрально противоположной точки N и 3) положение мгновенного центра ускорений K.



К задаче 18 28



К задаче 18 29

Ответ. 1) $w_M = 96$ см/с², 2) $w_N = 480$ см/с², 3) $MK = 4{,}24$ см, $\angle AMK = 45°$

18.29(18.26). Найти положение мгновенного центра ускорений и скорость v_K точки фигуры, совпадающей с ним в данный момент, а также ускорение w_C точки фигуры, с которой в данный момент совпадает мгновенный центр скоростей, если шестеренка *I* радиуса r катится внутри неподвижного колеса *II* радиуса $R = 2r$ и кривошип OO_1, приводящий в движение бегающую шестеренку, имеет постоянную угловую скорость ω_0

Ответ Мгновенный центр ускорений совпадает с центром O неподвижной шестеренки: $v_K = 2r\omega_0$, $w_C = 2r\omega_0$.

18.30(18.27). Найти ускорения концов B, C, D, E двух диаметров шестеренки радиуса $r_1 = 5$ см, катящейся снаружи неподвижной шестеренки радиуса $r_2 = 15$ см. Подвижная шестеренка приводится в движение при помощи кривошипа OA, вращающегося с постоянной угловой скоростью $\omega_0 = 3$ рад/с вокруг оси O неподвижной шестеренки; один из диаметров совпадает с линией OA, другой — ей перпендикулярен (См. рисунок к задаче 16.35.)

Ответ. $w_B = 540$ см/с², $w_C = w_E = 742$ см/с², $w_D = 900$ см/с².

18.31. Показать, что в момент, когда угловая скорость $\omega = 0$, проекции ускорений концов отрезка, совершающего плоское движение, на направление отрезка равны между собой

18.32(18.28). Показать, что в момент, когда угловое ускорение $\varepsilon = 0$, проекции ускорений концов отрезка, совершающего плоское движение, на направление, перпендикулярное отрезку, равны между собой

18.33(18.29). Ускорения концов стержня AB длины 10 см, совершающего плоское движение, направлены вдоль стержня навстречу друг другу, причем $w_A = 10$ см/с², $w_B = 20$ см/с². Определить угловую скорость и угловое ускорение стержня.

Ответ: $\omega = \sqrt{3}$ рад/с, $\varepsilon = 0$

18.34(18.30). Ускорения концов однородного стержня AB длины 12 см, совершающего плоское движение, перпендикулярны AB и направлены в одну сторону, причем $w_A = 24$ см/с², $w_B = 12$ см/с². Определить угловую скорость, угловое ускорение стержня, а также ускорение его центра тяжести C.

Ответ. $\omega = 0$, $\varepsilon = 1$ рад/с², ускорение точки C перпендикулярно AB, направлено в сторону ускорений точек A и B и равно 18 см/с².

18.35. Стержень AB длины 0,2 м совершает плоскопараллельное движение Ускорения его концов A и B перпендикулярны AB, направлены в противоположные стороны и по модулю равны 2 м/с². Найти угловую скорость, угловое ускорение стержня и ускорение его середины C

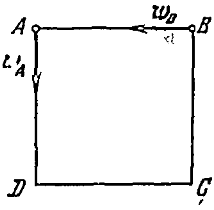
Ответ. $\omega = 0$, $\varepsilon = 20$ рад/с², $w_C = 0$

18.36(18.32). Ускорения вершин A и B треугольника ABC, совершающего плоское движение, векторно равны. $w_B = w_A = a$ Определить угловую скорость и угловое ускорение треугольника, а также ускорение вершины C.

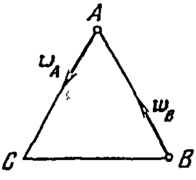
Ответ $\omega = 0$; $\varepsilon = 0$, $w_C = a$

18.37(18.33). Квадрат $ABCD$ со стороною a совершает плоское движение в плоскости рисунка Найти положение мгновенного центра ускорений и ускорения вершин его C и D, если известно, что в данный момент ускорения двух вершин A и B одинаковы по величине и равны 10 см/с² Направление ускорений точек A и B совпадает со сторонами квадрата, как указано на рисунке

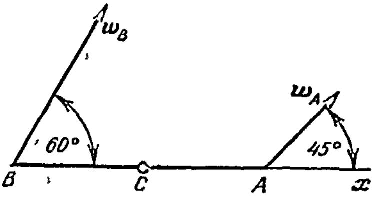
Ответ: $w_C = w_D = 10$ см/с² и направлены по сторонам квадрата. Мгновенный центр ускорений находится в точке пересечения диагоналей квадрата.



К задаче 18.37



К задаче 18.38



К задаче 18.39

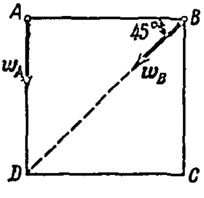
18.38(18.34). Равносторонний треугольник ABC движется в плоскости рисунка. Ускорение вершин A и B в данный момент времени равны 16 см/с² и направлены по сторонам треугольника (см. рисунок). Определить ускорение третьей вершины C треугольника

Ответ w_C направлено от C к B. $w_C = 16$ см/с².

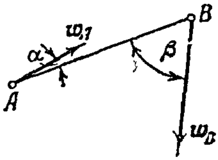
18.39. Стержень AB длины 0,2 м движется в плоскости рисунка. Ускорение точки A w_A ($w_A = 2$ м/с²) образует угол 45° с осью x, совмещенной со стержнем Ускорение точки B w_B ($w_B = 4{,}42$ м/с²) расположено под углом 60° к оси x. Найти угловую скорость, угловое ускорение стержня и ускорение его середины C.

Ответ. $\omega = 2$ рад/с, $\varepsilon = 12{,}05$ рад/с², $w_C = 3{,}18$ м/с².

18.40(18.35). Квадрат $ABCD$ со стороною $a = 2$ см совершает плоское движение. В данный момент ускорения вершин его A и B соответственно равны по модулю $w_A = 2$ см/с², $w_B = 4\sqrt{2}$ см/с² и направлены, как указано на рисунке. Найти мгновенную угловую скорость и мгновенное угловое ускорение квадрата, а также ускорение точки C.



К задаче 18.40



К задаче 18.41

Ответ: $\omega = \sqrt{2}$ рад/с, $\varepsilon = 1$ рад/с², w_C ($w_C = 6$ см/с²) направлено от C к D.

18.41(18.36). Найти модуль ускорения середины стержня AB, если известны модули ускорений его концов: $w_A = 10$ см/с², $w_B = 20$ см/с² и углы, образованные ускорениями с прямой AB: $\alpha = 10°$ и $\beta = 70°$

Ответ: $w = \frac{1}{2}\sqrt{w_A^2 + w_B^2 - 2w_A w_B \cos(\beta - \alpha)} = 8{,}66$ см/с².

ГЛАВА VI

ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА, ИМЕЮЩЕГО НЕПОДВИЖНУЮ ТОЧКУ. ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ОРИЕНТАЦИЯ

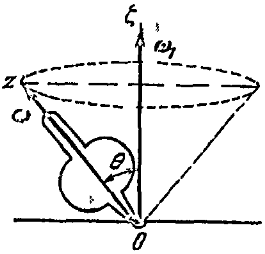
§ 19. Движение твердого тела, имеющего одну неподвижную точку

19.1(19.1) Ось z волчка равномерно описывает вокруг вертикали $O\zeta$ круговой конус с углом раствора 2θ. Угловая скорость вращения оси волчка вокруг оси ζ равна ω_1, а постоянная угловая скорость собственного вращения волчка равна ω. Определить величину и направление абсолютной угловой скорости Ω волчка.

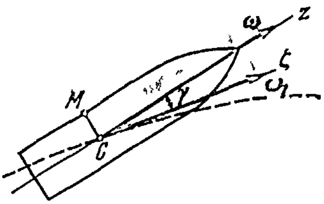
Ответ: $\Omega = \sqrt{\omega^2 + \omega_1^2 + 2\omega\omega_1 \cos\theta}$,

$$\cos(\Omega, z) = \frac{\omega + \omega_1 \cos\theta}{\sqrt{\omega^2 + \omega_1^2 + 2\omega\omega_1 \cos\theta}}.$$

19.2(19.2) Артиллерийский снаряд, двигаясь в атмосфере, вращается вокруг оси z с угловой скоростью ω. Одновременно ось снаряда z вращается с угловой скоростью ω_1 вокруг оси ζ, направленной по касательной к траектории центра тяжести C снаряда. Определить скорость точки M снаряда в его вращательном движении, если $CM = r$ и отрезок CM перпендикулярен оси z, угол между осями z и ζ равен γ.

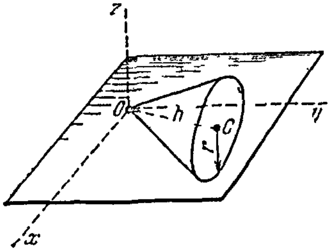


К задаче 19.1



К задаче 19.2

Ответ: $v_M = (\omega + \omega_1 \cos\gamma) r$.

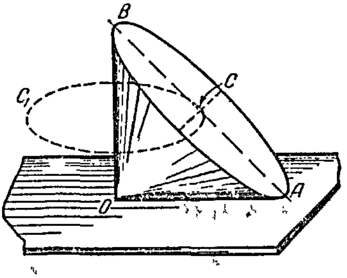


К задаче 19.3

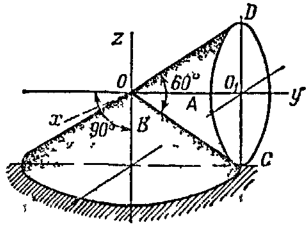
19.3(19.3) Конус, высота которого $h = 4$ см и радиус основания $r = 3$ см, катится по плоскости без скольжения, имея неподвижную вершину в точке O. Определить угловую скорость конуса, координаты точки, вычерчивающей годограф угловой скорости, и угловое ускорение конуса, если скорость центра основания конуса $v_C = 48$ см/с $=$ const.

Ответ: $\omega = 20$ рад/с, $x_1 = 20 \cos 15t$, $y_1 = 20 \sin 15t$, $z_1 = 0$, $\varepsilon = 300$ рад/с^2.

19.4(19.4). Конус, вершина O которого неподвижна, катится по плоскости без скольжения. Высота конуса $CO = 18$ см, а угол при вершине $AOB = 90°$. Точка C, центр основания конуса, движется равномерно и возвращается в первоначальное положение через 1 с. Определить скорость конца B диаметра AB, угловое ускорение конуса и ускорение точек A и B.



К задаче 19.4



К задаче 19.5

Ответ. $v_B = 36\pi\sqrt{2}$ см/с $= 160$ см/с, ε ($\varepsilon = 39{,}5$ рад/с^2) направлено перпендикулярно OA и OB; w_A ($w_A = 1000$ см/с^2) направлено параллельно OB; w_B ($w_B = 1000\sqrt{2}$ см/с^2) лежит в плоскости AOB и направлено под углом 45° к OB.

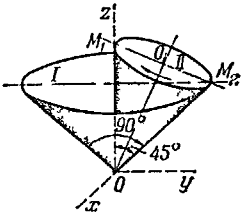
19.5(19.5). Конус A обегает 120 раз в минуту неподвижный конус B. Высота конуса $OO_1 = 10$ см. Определить переносную угловую скорость ω_e конуса вокруг оси z, относительную угловую скорость ω_r конуса вокруг оси OO_1, абсолютную угловую скорость ω_a и абсолютное угловое ускорение ε_a конуса.

Ответ. $\omega_e = 4\pi$ рад/с, $\omega_r = 6{,}92\pi$ рад/с, ω_a ($\omega_a = 8\pi$ рад/с) направлена по оси OC, ε_a ($\varepsilon_a = 27{,}68\pi^2$ рад/с^2) направлено параллельно оси x.

19.6(19.6). Сохранив условия предыдущей задачи, определить скорости и ускорения точек C и D подвижного конуса.

Ответ. $v_C = 0$; v_D ($v_D = 80\pi$ см/с) направлена параллельно оси x, w_C ($w_C = 320\pi^2$ см/с^2) направлено перпендикулярно OC в плоскости Oyz, проекции ускорения точки D: $w_{D_y} = -480\pi^2$ см/с^2, $w_{D_z} = -160\sqrt{3}\pi^2$ см/с^2.

19.7(19.7). Конус II с углом при вершине $\alpha_2 = 45°$ катится без скольжения по внутренней стороне неподвижного конуса I с углом при вершине $\alpha_1 = 90°$. Высота подвижного конуса $OO_1 = 100$ см. Точка O_1, центр основания подвижного конуса, описывает окружность в 0,5 с. Определить переносную (вокруг оси z), относительную (вокруг оси OO_1) и абсолютную угловые скорости конуса II, а также его абсолютное угловое ускорение.

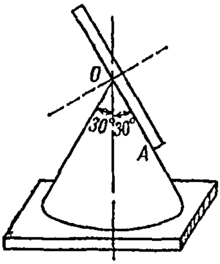


К задаче 19.7

Ответ. ω_e ($\omega_e = 4\pi$ рад/с) направлена по оси z, ω_r ($\omega_r = 7{,}39\pi$ рад/с) направлена по оси O_1O, ω_a ($\omega_a = 4\pi$ рад/с) направлена по оси OM_2; ε_a ($\varepsilon_a = 11{,}3\pi^2$ рад/с^2) направлено по оси x.

19.8(19.8). Сохранив условия предыдущей задачи, определить скорости и ускорения точек O_1, M_1, M_2 подвижного конуса.

Ответ v_0 ($v_0 = 153{,}2\pi$ см/с) направлена параллельно отрицательной оси Ox, v_1 ($v_1 = 306{,}4\pi$ см/с) направлена параллельно отрицательной оси Ox, $v_2 = 0$, w_0 ($w_0 = 612{,}8\pi^2$ см/с^2) направлено от O_1 по перпендикуляру к Oz, проекции ускорения точки M_1 $w_{1y} = -362\pi^2$ см/с^2, $w_{1z} = -865\pi^2$ см/с^2, w_2 ($w_2 = 1225\pi^2$ см/с^2) лежит в плоскости OO_1M_2 и направлено перпендикулярно OM_2



К задаче 19.9

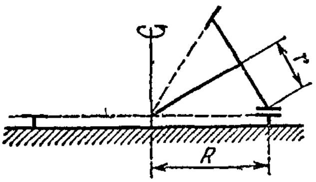
19.9(19.9). Диск OA радиуса $R = 4\sqrt{3}$ см, вращаясь вокруг неподвижной точки O, обкатывает неподвижный конус с углом при вершине, равным 60° Найти угловую скорость вращения диска вокруг его оси симметрии, если ускорение w_A точки A диска по модулю постоянно и равно 48 см/с^2.

Ответ $\omega = 2$ рад/с.

19.10(19.10). Тело движется вокруг неподвижной точки. В некоторый момент угловая скорость его изображается вектором, проекции которого на координатные оси равны $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$. Найти в этот момент скорость v точки тела, определяемой координатами $\sqrt{12}$, $\sqrt{20}$, $\sqrt{28}$.

Ответ $v = 0$

19.11(19.11). Коническое зубчатое колесо, ось которого пересекается с геометрической осью плоской опорной шестерни в центре последней, обегает пять раз в минуту опорную шестерню Определить угловую скорость ω_r вращения колеса вокруг его оси и угловую скорость ω вращения вокруг мгновенной оси, если радиус опорной шестерни вдвое больше радиуса колеса $R = 2r$.



К задаче 19.11

Ответ. $\omega_r = 1{,}047$ рад/с,
$\omega = 0{,}907$ рад/с

19.12(19.12). Угловая скорость тела $\omega = 7$ рад/с, мгновенная ось его составляет в данный момент с неподвижными координатными осями острые углы α, β и γ Найти величину скорости v и проекции ее v_x, v_y, v_z на координатные оси для точки тела, координаты которой, выраженные в метрах, в данный момент равны 0, 2, 0, а также расстояние d этой точки от мгновенной оси, если $\cos\alpha = 2/7$, $\cos\gamma = 6/7$

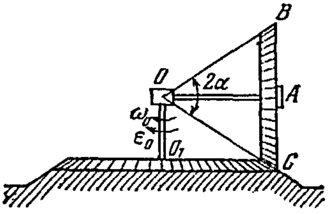
Ответ. $v_x = -12$ м/с, $v_y = 0$, $v_z = 4$ м/с, $v = 12{,}65$ м/с, $d = 1{,}82$ м.

19.13(19.13). Найти уравнения мгновенной оси и величину угловой скорости ω тела, если известно, что проекции скорости точки M_1 (0, 0, 2) на координатные оси, связанные с телом, равны $v_{x1} = 1$ м/с, $v_{y1} = 2$ м/с, $v_{z1} = 0$, а направление скорости точки

M_2 (0, 1, 2) определяется косинусами углов, образованных с осями координат: —2/3, +2/3, —1/3

Ответ: $x + 2y = 0$, $3x + z = 0$, $\omega = 3{,}2$ рад/с

19.14(19.14). Коническое зубчатое колесо, свободно насаженное на кривошип OA, обкатывается по неподвижному коническому зубчатому основанию Определить угловую скорость ω и угловое ускорение ε катящегося колеса, если модули угловой скорости и углового ускорения (их направления указаны на рисунке) кривошипа OA, вращающегося вокруг неподвижной оси O_1O, соответственно равны ω_0 и ε_0



К задаче 19 14

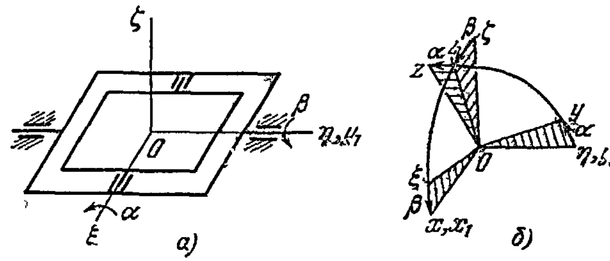
Ответ: $\omega = \dfrac{\omega_0}{\sin\alpha} e_1$, $\varepsilon = \dfrac{\varepsilon_0}{\sin\alpha} e_1 + \omega_0 \operatorname{ctg}\alpha e_2$, где e_1 — единичный вектор, направленный от точки O к точке C, а e_2 — единичный вектор, перпендикулярный плоскости OAC и направленный на читателя.

19.15(19.15). В условиях предыдущей задачи определить ускорения точек C и B, если радиус основания равен R.

Ответ: $w_C = \dfrac{R\omega_0^2}{\sin\alpha} e_3$, $w_B = 2R\varepsilon_0 e_2 + \dfrac{R\omega_0^2}{\sin\alpha}(e_4 - 2e_3)$, где e_3 и e_4 — лежащие в плоскости рисунка единичные векторы, перпендикулярные прямым OC и OB соответственно (оба орта направлены вверх).

§ 20. Пространственная ориентация; кинематические формулы Эйлера и их модификация; аксоиды

20.1(20.1). Искусственная горизонтальная площадка на качающемся корабле создается с помощью карданова подвеса. Ось y_1 вращения внешнего кольца параллельна продольной оси корабля;



К задаче 20 1

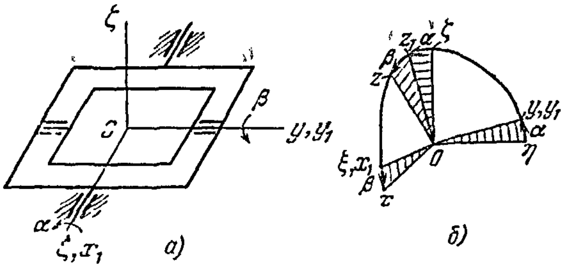
угол поворота внешнего кольца обозначается через β (угол бортовой качки) Угол поворота внутренней рамки обозначается через α. Для ориентации колец вводят три системы координат: система $\xi\eta\zeta$ связана с кораблем (ось ξ направлена к правому борту, ось η — к носу корабля, ось ζ — перпендикулярна палубе); система $x_1y_1z_1$ связана с внешним кольцом (ось y_1 совпадает с осью η); система

xyz связана с внутренним кольцом (ось x совпадает с x_1). Положительные направления отсчёта углов видны из рисунков; при $\alpha = \beta = 0$ все системы отсчета совпадают. Определить ориентацию (соответствующие направляющие косинусы) внутреннего кольца подвеса относительно корабля.

Ответ:

	ξ	η	ζ
x	$\cos\beta$	0	$-\sin\beta$
y	$\sin\alpha\sin\beta$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha\cos\beta$
z	$\cos\alpha\sin\beta$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha\cos\beta$

20.2(20.2). Во втором способе установки карданова подвеса, описанного в предыдущей задаче, ось вращения внешнего кольца параллельна поперечной оси корабля. При этом способе подвеса ось ξ, связанная с кораблем, совпадает с осью x_1 вращения внешнего кольца, а ось y вращения внутреннего кольца совпадает с осью y_1, жестко связанной с внешним кольцом. Угол поворота внешнего кольца обозначается теперь α (угол килевой качки), а угол поворота внутреннего кольца — через β. Определить ориентацию внутреннего кольца подвеса относительно корабля.



а) б)

К задаче 20.2

Ответ:

	ξ	η	ζ
x	$\cos\beta$	$\sin\alpha\sin\beta$	$-\cos\alpha\sin\beta$
y	0	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$
z	$\sin\beta$	$-\sin\alpha\cos\beta$	$\cos\alpha\cos\beta$

20.3(20.3). Положение твердого тела, имеющего одну неподвижную точку O, определяется тремя углами Эйлера: углом прецессии ψ, углом нутации θ и углом собственного вращения φ (см. рисунок). Определить направляющие косинусы подвижной системы отсчета $Oxyz$.

Ответ.

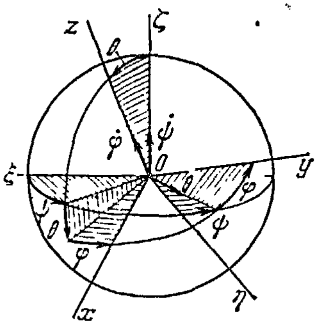
	ξ	η	ζ
x	$\cos\psi\cos\theta\cos\varphi-\sin\psi\sin\varphi$	$\sin\psi\cos\theta\cos\varphi+\cos\psi\sin\varphi$	$-\sin\theta\cos\varphi$
y	$-\cos\psi\cos\theta\sin\psi-\sin\psi\cos\varphi$	$-\sin\psi\cos\theta\sin\varphi+\cos\psi\cos\varphi$	$\sin\theta\sin\varphi$
z	$\cos\psi\sin\theta$	$\sin\psi\sin\theta$	$\cos\theta$

20.4(20.4). Зная скорости изменения углов Эйлера, определить угловую скорость тела и ее проекции на оси неподвижной $O\xi\eta\zeta$ и подвижной $Oxyz$ систем отсчета.

Ответ: $\omega=\sqrt{\psi^2+\theta^2+\varphi^2+2\psi\varphi\cos\theta}$,

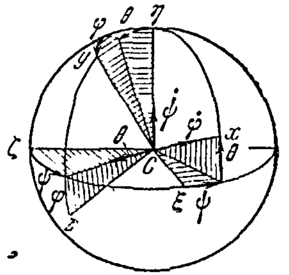
$$\omega_\xi=\varphi\sin\theta\cos\psi-\theta\sin\psi,$$
$$\omega_\eta=\varphi\sin\theta\sin\psi+\theta\cos\psi,$$

$\omega_\zeta=\dot\varphi\cos\theta+\psi$, $\omega_x=-\psi\sin\theta\cos\varphi+$ $+\theta\sin\varphi$, $\omega_y=\psi\sin\theta\sin\varphi+\theta\cos\varphi$, $\omega_z=\psi\cos\theta+\varphi$.



К задачам 20.3 и 20.4

20.5(20.5). Для определения вращательного движения самолета с ним связывают ортогональную систему координат $Cxyz$, причем ось x направляется по оси самолета от хвоста к кабине летчика, ось y располагается в плоскости симметрии самолета, а ось z — по размаху крыла вправо для летчика (C — центр тяжести самолета) Угловые перемещения самолета относительной осей $C\xi\eta\zeta$ (горизонтальная ось ξ направляется по курсу самолета, ось η — вертикально вверх, а горизонтальная ось ζ — перпендикулярно осям ξ и η) определяются, как показано на рисунке, тремя самолетными углами углом рыскания ψ, углом тангажа θ и углом крена φ. Определить ориентацию самолета (системы отсчета $Cxyz$) относительно трехгранника $C\xi\eta\zeta$



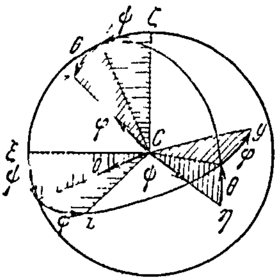
К задачам 20.5 и 20.6

Ответ

	ξ	η	ζ
x	$\cos\psi\cos\theta$	$\sin\theta$	$-\sin\psi\cos\theta$
y	$\sin\psi\sin\varphi-\cos\psi\sin\theta\cos\varphi$	$\cos\theta\cos\varphi$	$\cos\psi\sin\varphi+\sin\psi\sin\theta\cos\varphi$
z	$\sin\psi\cos\varphi+\cos\psi\sin\theta\sin\varphi$	$-\cos\theta\sin\varphi$	$\cos\psi\cos\varphi-\sin\psi\sin\theta\sin\varphi$

20.6(20.6). Зная скорости изменения самолетных углов, определить проекции угловой скорости самолета на оси систем координат $Cxyz$ и $C\xi\eta\zeta$ (см рисунок к предыдущей задаче).

Ответ: $\omega_x = \dot{\psi}\sin\theta + \dot{\varphi}$, $\omega_y = \dot{\psi}\cos\theta\cos\varphi + \theta\sin\varphi$, $\omega_z = -\psi\cos\theta\sin\varphi + \theta\cos\varphi$, $\omega_\xi = \varphi\cos\psi\cos\theta + \theta\sin\psi$, $\omega_\eta = \dot{\varphi}\sin\theta + \dot{\psi}$, $\omega_\zeta = -\varphi\sin\psi\cos\theta + \theta\cos\psi$



К задачам 20.7 и 20.8

20.7(20.7). Для исследования качки корабля и его устойчивости на курсе вводят три корабельных угла ψ — дифферент, θ — крен и φ — угол рыскания, система отсчета $Cxyz$ жестко связана с кораблем, C — центр тяжести корабля, ось x направлена от кормы к носу, ось y — к левому борту, ось z — перпендикулярно палубе, система координат $C\xi\eta\zeta$, ориентируется относительно курса корабля ось ζ вертикальна, горизонтальная ось ξ направлена по курсу, горизонтальная ось η — влево от курса (на рисунке изображены системы осей, введенных А Н Крыловым).

Определить ориентацию корабля (координатных осей $Cxyz$) относительно трехгранника $C\xi\eta\xi$

Ответ

	ξ	η	ζ
x	$\cos\psi\cos\varphi + \sin\psi\sin\theta\sin\varphi$	$\cos\theta\sin\varphi$	$-\sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\sin\theta\sin\varphi$
y	$-\cos\psi\sin\varphi + \sin\psi\sin\theta\sin\varphi$	$\cos\theta\cos\varphi$	$\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\sin\theta\cos\varphi$
z	$\sin\psi\cos\theta$	$-\sin\theta$	$\cos\psi\cos\theta$

20.8(20.8). Зная скорости изменения корабельных углов, определить проекции угловой скорости корабля на оси систем отсчета $Cxyz$ и $C\xi\eta\zeta$ (см рисунок к предыдущей задаче).

Ответ: $\omega_x = \psi\cos\theta\sin\varphi + \theta\cos\varphi$, $\omega_\xi = \theta\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\psi\cos\theta$,

$\omega_y = \dot{\psi}\cos\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi$, $\omega_\eta = \psi - \varphi\sin\theta$,

$\omega_z = -\psi\sin\theta + \varphi$, $\omega_\xi = -\dot{\theta}\sin\psi + \varphi\cos\psi\cos\theta$.

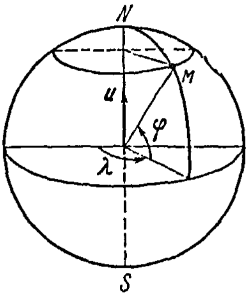
20.9(20.9). Точка M (центр тяжести самолета, корабля) движется вдоль поверхности Земли, принимаемой за шар радиуса R *); восточная составляющая скорости точки равна v_E, а северная — v_N. Определить скорость изменения широты φ и долготы λ текущего положения точки M

Ответ: $\dot{\varphi} = \frac{v_N}{R}$, $\lambda = \frac{v_E}{R\cos\varphi}$; при положительных v_E и v_N составляющая $\dot{\varphi}$ направлена на запад, а составляющая $\dot{\lambda}$ — по оси SN вращения Земли от Южного полюса к Северному.

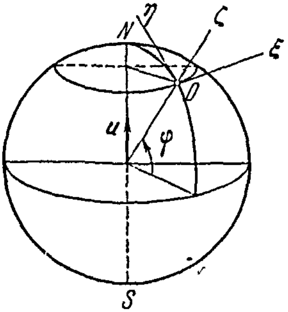
---

*) Здесь и в дальнейшем сжатием Земли пренебрегаем.

20.10(20.10). Для изучения движения вблизи земной поверхности тел (самолетов, ракет, кораблей) и приборов, установленных на них, вводят подвижной координатный трехгранник — трехгранник Дарбу. При географической ориентации трехгранника Дарбу $O\xi\eta\zeta$ горизонтальная ось ξ направляется на восток, горизонтальная



К задаче 20.9



К задаче 20.10

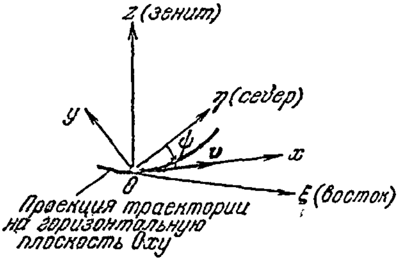
ось η — на север, ось ζ — вертикально вверх. Определить проекции на оси ξ, η, ζ угловой скорости трехгранника $O\xi\eta\zeta$, если проекции скорости его начала (точки O) относительно Земли равны $v_\xi = v_E$, $v_\eta = v_N$, $v_\zeta = 0$; угловая скорость вращения Земли равна U, радиус Земли R.

Ответ: $\omega_\xi = -\varphi = -v_N/R$,

$$\omega_\eta = (U + \dot\lambda)\cos\varphi = \left(U + \frac{v_F}{R\cos\varphi}\right)\cos\varphi,$$

$$\omega_\zeta = (U + \dot\lambda)\sin\varphi = \left(U + \frac{v_E}{R\cos\varphi}\right)\sin\varphi.$$

20.11(20.11). Трехгранник Дарбу $Oxyz$ на поверхности Земли ориентирован не географически, как это было сделано в предыдущей задаче, а по траектории основания трехгранника относительно Земли: ось x направляется горизонтально по скорости v вершины O (центр тяжести самолета, корабля) трехгранника относительно Земли, ось y направляется горизонтально влево от оси x, а ось z — вертикально вверх. Определить проекции угловой скорости трехгранника $Oxyz$, если скорость точки O равна v, а ее курс определяется углом ψ (угол между направлением на север и относительной скоростью точки O).



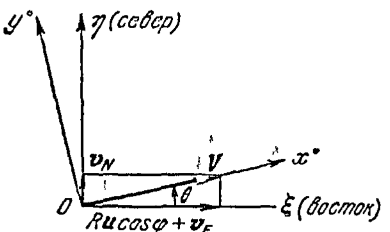
К задаче 20.11

Ответ: $\omega_x = U\cos\varphi\cos\psi$; $\omega_y = U\cos\varphi\sin\psi + v/R$;

$$\omega_z = (U + \lambda)\sin\varphi + \psi = U\sin\varphi + v/\rho.$$

Здесь R, U, φ и λ имеют значения, введенные в задачах 20.9 и 20.10, а ρ — радиус геодезической кривизны траектории ($\rho > 0$ при $\psi < 0$, и $\rho < 0$ при $\psi > 0$).

20.12(20.12). Трехгранник Дарбу $Ox^0y^0z^0$ на поверхности Земли ориентирован следующим образом: ось x^0 направляется по абсолютной скорости V точки O (предполагается, что она движется по поверхности Земли), горизонтальная ось y^0 направляется влево от оси x^0, ось z^0 вертикальна. Определить проекции угловой скорости трехгранника $Ox^0y^0z^0$, если составляющие скорости точки O относительно Земли равны v_E и v_N.

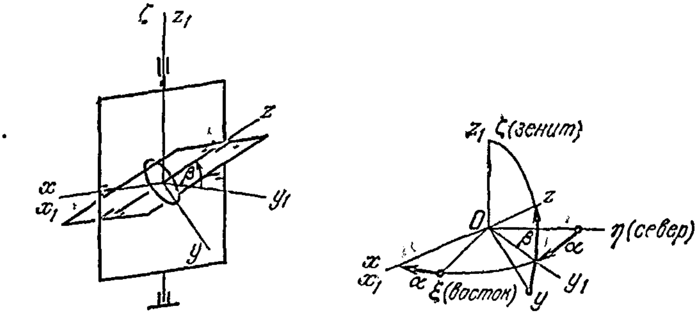


К задаче 20.12

Ответ: $\omega_{x^0} = 0$, $\omega_{y^0} = \frac{V}{R}$, $\omega_{z^0} = (U+\lambda)\sin\varphi + \theta$, где R, U, φ и λ имеют значения, введенные в задачах 20.9 и 20.10,

$$V = \sqrt{(v_E + RU\cos\varphi)^2 + v_N^2} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{v_N}{v_E + RU\cos\varphi}.$$

20.13(20.13). Гироскоп направления установлен в кардановом подвесе. Система координат $x_1y_1z_1$ связана с внешней рамкой (ось вращения ее вертикальна), система xyz скреплена с внутренней



К задаче 20.13

рамкой (ось x вращения ее горизонтальна). Ось z внутренней рамки является одновременно осью собственного вращения гироскопа.

Определить 1) ориентацию оси z вращения гироскопа относительно географически ориентированных осей $\xi\eta\zeta$ (см. задачу 20.10), если поворот внешней рамки (оси y_1) отсчитывается по часовой стрелке от плоскости меридиана (плоскость $\eta\zeta$) и определяется углом α, а подъем оси z над горизонтом определяется углом β;

2) проекции на оси x, y, z угловой скорости вращения трехгранника xyz, предполагая, что точка O подвеса гироскопа неподвижна относительно Земли.

Ответ: 1)

	ξ	μ	ζ
z	$\sin\alpha\cos\beta$	$\cos\alpha\cos\beta$	$\sin\beta$

2) $\omega_x=\dot\beta-U\cos\varphi\sin\alpha,$

$\omega_y=\alpha\cos\beta+U(\cos\varphi\cos\alpha\sin\beta-\sin\varphi\cos\beta),$

$\omega_z=\dot\alpha\sin\beta+U(\cos\varphi\cos\alpha\cos\beta+\sin\varphi\sin\beta),$

где U — угловая скорость вращения Земли, φ — широта места.

20.14(20.14). В условиях предыдущей задачи определить проекции угловой скорости вращения трехгранника xyz, если северная и восточная составляющие скорости точки подвеса соответственно равны v_N и v_E.

Ответ: $\omega_x=\beta-\left(U+\frac{v_E}{R\cos\varphi}\right)\cos\varphi\sin\alpha-\frac{v_N}{R}\cos\alpha,$

$$\omega_y=\alpha\cos\beta+\left(U+\frac{v_E}{R\cos\varphi}\right)(\cos\varphi\cos\alpha\sin\beta-\sin\varphi\cos\beta)-\frac{v_N}{R}\sin\alpha\sin\beta,$$

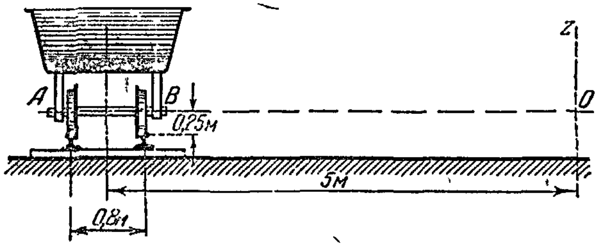
$$\omega_z=\dot\alpha\sin\beta+\left(U+\frac{v_E}{R\cos\varphi}\right)(\cos\varphi\cos\alpha\cos\beta+\sin\varphi\sin\beta),$$

где R — радиус Земли

20.15(20.15). Движение тела вокруг неподвижной точки задано углами Эйлера: $\varphi=4t$, $\psi=\frac{\pi}{2}-2t$, $\theta=\frac{\pi}{3}$ Определить координаты точки, вычерчивающей годограф угловой скорости, угловую скорость и угловое ускорение тела относительно неподвижных осей x, y, z.

Ответ: $x=\omega_x=2\sqrt{3}\cos 2t$, $y=\omega_y=-2\sqrt{3}\sin 2t$,

$z=\omega_z=0$, $\omega=2\sqrt{3}$ рад/с, $\varepsilon=4\sqrt{3}$ рад/с^2.



К задаче 20.16

20.16(20.16). Найти подвижный и неподвижный аксоиды внешнего колеса вагона, катящегося по горизонтальному пути, средний радиус кривизны которого равен 5 м, радиус колеса вагона 0,25 м, ширина колеи 0,80 м

Примечание Колесо вращается вместе с вагоном вокруг вертикальной оси Oz, проходящей через центр закругления пути, и относительно вагона вокруг оси AB, т. е. вращается вокруг неподвижной точки O

Ответ Неподвижный аксоид — конус, ось которого совпадает с осью Oz, с углом при вершине $\alpha = 2 \operatorname{arctg} 21{,}6 = 174^\circ 42'$. Подвижный аксоид — конус с осью AB и углом при вершине $\beta = 2 \operatorname{arctg} 0{,}0463 = 5^\circ 18'$.

20.17(20.17). Движение тела вокруг неподвижной точки задано при помощи углов Эйлера следующими уравнениями: $\varphi = nt$, $\psi = \pi/2 + ant$, $\theta = \pi/3$ Определить проекции угловой скорости и углового ускорения тела на неподвижные оси, если a и n — постоянные величины. Указать также то значение параметра a, при котором неподвижным аксоидом тела будет плоскость Oxy

Ответ: $\omega_x = \frac{n\sqrt{3}}{2} \cos ant$, $\omega_y = \frac{n\sqrt{3}}{2} \sin ant$, $\omega_z = n\left(a + \frac{1}{2}\right)$,

$\varepsilon_x = -\frac{an^2\sqrt{3}}{2} \sin ant$, $\varepsilon_y = \frac{an^2\sqrt{3}}{2} \cos ant$, $\varepsilon_z = 0$, $a = -\frac{1}{2}$.

20.18(20.18). Углы Эйлера, определяющие положение тела, изменяются по закону (регулярная прецессия) $\psi = \psi_0 + n_1 t$ $\theta = \theta_0$, $\varphi = \varphi_0 + n_2 t$, где ψ_0, θ_0, φ_0 — начальные значения углов, а n_1 и n_2 — постоянные числа, равные соответствующим угловым скоростям. Определить угловую скорость ω тела, неподвижный и подвижный аксоиды

Ответ: $\omega = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + 2n_1 n_2 \cos \theta_0}$; неподвижный аксоид — круговой конус $\xi^2 + \eta^2 - \frac{n_2^2 \sin^2 \theta_0}{(n_2 \cos \theta_0 + n_1)^2} \zeta^2 = 0$ с осью ζ и углом раствора $2 \arcsin \frac{n_2 \sin \theta_0}{\omega}$; подвижный аксоид — круговой конус $x^2 + y^2 - \frac{n_1^2 \sin \theta_0}{(n_1 \cos \theta_0 + n_2)^2} z^2 = 0$ с осью z и углом раствора $2 \arcsin \frac{n_1 \sin \theta_0}{\omega}$.

ГЛАВА VII

СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

§ 21. Уравнения движений точки

21.1(21.1). Определить уравнение прямолинейного движения точки, складывающегося из двух гармонических колебаний:

$$x_1 = 2 \cos (\pi t + \pi/2), \quad x_2 = 3 \cos (\pi t + \pi).$$

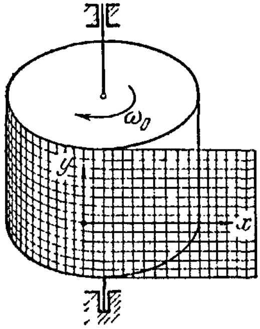
Ответ $x = \sqrt{13} \cos (\pi t + \alpha)$, где $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{2}{3} = 33^\circ 40'$.

21.2(21.2). Барабан записывающего устройства вращается равномерно со скоростью ω_0 Радиус барабана r. Самописец соединен с деталью, движущейся по вертикали по закону

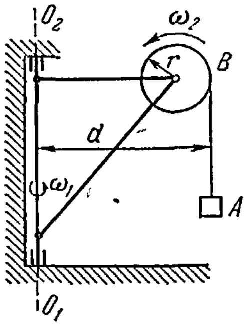
$$y = a\sin\omega_1 t$$

Найти уравнение кривой, которую запишет перо на бумажной ленте.

Ответ: $y = a\sin\frac{\omega_1 x}{\omega_0 r}$.



К задаче 21.2



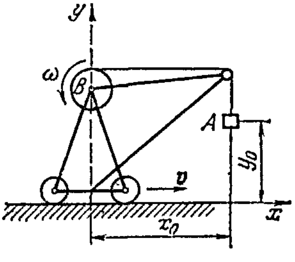
К задаче 21.3

21.3(21.3). При вращении поворотного крана вокруг оси O_1O_2 с постоянной угловой скоростью ω_1 груз A поднимается вверх посредством каната, навернутого на барабан B. Барабан B радиуса r вращается с постоянной угловой скоростью ω_2. Определить абсолютную траекторию груза, если вылет крана равен d.

Ответ: Винтовая линия, уравнение которой

$$x = d\cos\frac{\omega_1}{\omega_2}\cdot\frac{z}{r}, \quad y = d\sin\frac{\omega_1}{\omega_2}\cdot\frac{z}{r},$$

ось x проходит через ось O_1O_2 и начальное положение груза, ось z направлена вверх по оси вращения крана.



К задаче 21.4

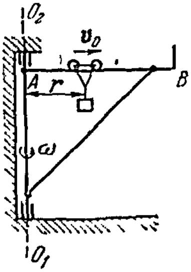
21.4(21.4). При совмещении работы механизмов подъема груза и перемещения крана груз A перемещается в горизонтальном и вертикальном направлениях. Барабан B радиуса $r = 0{,}5$ м, на который навит канат, поддерживающий груз A, вращается при пуске в ход с угловой скоростью $\omega = 2\pi$ рад/с. Кран перемещается в горизонтальном направлении с постоянной скоростью $v = 0{,}5$ м/с. Определить абсолютную траекторию груза, если начальные координаты груза $x_0 = 10$ м, $y_0 = 6$ м.

Ответ: $y = \frac{x - x_0}{v}\omega r + y_0 = 6{,}28x - 56{,}8$.

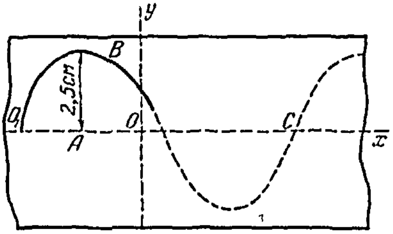
21.5(21.5). Стрела AB поворотного крана вращается вокруг оси O_1O_2 с постоянной угловой скоростью ω. По горизонтальной стреле от A к B движется тележка с постоянной скоростью v_0. Определить абсолютную траекторию тележки, если в начальный момент тележка находилась на оси O_1O_2.

Ответ: Траектория — архимедова спираль $r = \frac{v_0}{\omega}\varphi$, где r — расстояние тележки от оси вращения, φ — угол поворота крана вокруг оси O_1O_2.

21.6(21.6). Лента прибора, служащего для записи колебательных движений, движется по направлению Ox со скоростью 2 м/с. Колеблющееся вдоль оси Oy тело вычерчивает на ленте синусоиду, наибольшая ордината которой $AB = 2{,}5$ см, а длина $O_1C = 8$ см.



К задаче 21.5



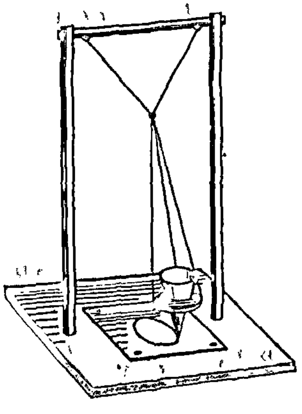
К задаче 21.6

Найти уравнение колебательного движения тела, предполагая, что точка O синусоиды соответствует положению тела при $t = 0$.

Ответ: $y = 2{,}5\sin(50\pi t)$ см.

21.7(21.7). Трамвай движется равномерно по прямолинейному горизонтальному участку со скоростью $v = 5$ м/с, причем кузов совершает на рессорах гармонические колебания с амплитудой $a = 0{,}008$ м и периодом $T = 0{,}5$ с. Найти уравнение траектории центра тяжести кузова, если его среднее расстояние от полотна дороги $h = 1{,}5$ м. При $t = 0$ центр тяжести находится в среднем положении, и скорость колебания направлена вверх. Ось Ox направить горизонтально по полотну в сторону движения, ось Oy — вертикально вверх через положение центра тяжести при $t = 0$.

Ответ: $y = 1{,}5 + 0{,}0008\sin 0{,}8\pi x$.



К задаче 21.8

21.8(21.8). Определить уравнения траектории сложного движения конца двойного маятника, совершающего одновременно два взаимно перпендикулярных гармонических колебания равной частоты, но разных амплитуд и фаз, если уравнения колебаний имеют вид $x = a\sin(\omega t + \alpha)$, $y = b(\sin\omega t + \beta)$.

Ответ: Эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab}\cos(\alpha - \beta) = \sin^2(\alpha - \beta)$.

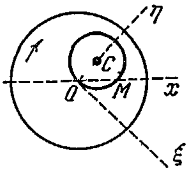
21.9(21.9) Конец двойного маятника описывает фигуру Лиссажу, получающуюся при сложении двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаний $x = a \sin 2\omega t$, $y = a \sin \omega t$. Найти уравнение траектории.

Ответ: $a^2x^2 = 4y^2(a^2 - y^2)$.

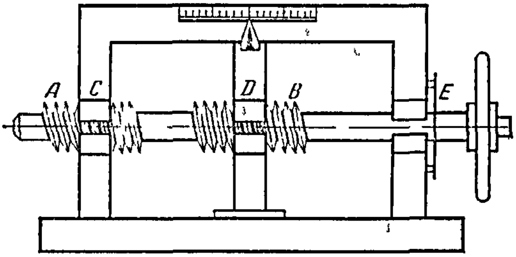
21.10(21.10) Железнодорожный поезд движется равномерно со скоростью 36 км/ч; сигнальный фонарь, привешенный к последнему вагону, срывается с кронштейна. Определить траекторию абсолютного движения фонаря и длину пути s, который будет пройден поездом за время падения фонаря, если фонарь находится на высоте 4,905 м от земли. Оси координат провести через начальное положение фонаря, ось Ox — горизонтально в сторону движения поезда, ось Oy — вертикально вниз.

Ответ: Парабола с вертикальной осью $y = 0{,}049x^2$, $s = 10$ м (x, y — в метрах, t — в секундах).

21.11(21.11) Резец M совершает поперечное возвратно-поступательное движение согласно закону $x = a \sin \omega t$. Найти уравнение траектории конца резца M относительно диска, вращающегося равномерно с угловой скоростью ω вокруг оси O, пересекающей абсолютную траекторию резца.



К задаче 21.11



К задаче 21.12

Ответ: $\xi^2 + (\eta - a/2)^2 = a^2/4$ — окружность радиуса $a/2$ с центром в точке C (см. рисунок).

21.12(21.12) В некоторых измерительных и делительных приборах для перемещения указателя применяется дифференциальный винт, состоящий из оси AB, имеющей в части A винтовую нарезку с шагом h_1 мм, а в части B — нарезку с шагом $h_2 < h_1$. Часть A вращается в неподвижной гайке C, а часть B охватывается элементом D, лишенным вращательного движения и соединенным с указателем, скользящим вдоль неподвижной шкалы.

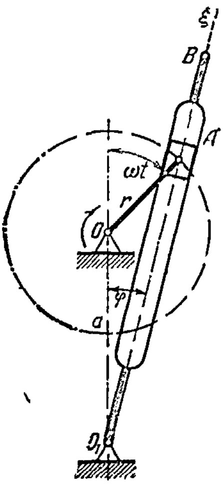
1) Определить перемещение указателя при повороте маховичка оси на $1/n$ оборота (соответствующая шкала нанесена на диске E), если $n = 200$, $h_1 = 0{,}5$ мм и $h_2 = 0{,}4$ мм. Обе нарезки правые или обе левые.

2) Как изменится показание прибора, если в части A сделать левую нарезку, а в части B — правую?

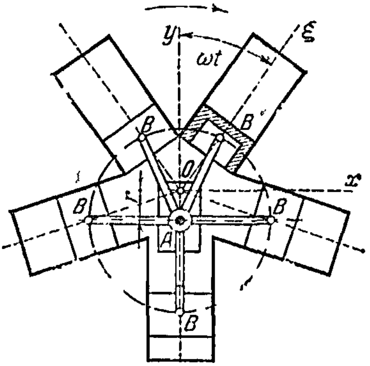
Ответ: 1) $s=\frac{1}{n}(h_1-h_2)=0{,}0005$ мм;

2) $s=\frac{1}{n}(h_1+h_2)=0{,}0045$ мм.

21.13(21.13). Ускорительный механизм строгального станка состоит из двух параллельных валов O и O_1, кривошипа OA и кулисы O_1B. Конец кривошипа OA соединен шарнирно с ползуном, скользящим вдоль прорези в кулисе O_1B. Найти уравнение относительного движения ползуна в прорези кулисы и уравнение вращения самой кулисы, если кривошип OA длины r вращается с постоянной угловой скоростью ω, расстояние между осями валов $OO_1=a$.



К задаче 21 13



К задаче 21 14

Ответ: $\xi=\sqrt{a^2+r^2+2ar\cos\omega t}$, $\operatorname{tg}\varphi=\frac{r\sin\omega t}{a+r\cos\omega t}$.

21.14(21.14). В ротативном двигателе, схематически показанном на рисунке, цилиндры, прикрепленные к картеру, вращаются вместе с ним вокруг неподвижной оси вала O, а шатуны поршней вращаются вокруг пальца A неподвижного кривошипа OA. Указать: 1) траекторию абсолютного движения точек B поршней и 2) приближенное уравнение их относительного движения по отношению к цилиндрам, если цилиндры вращаются с угловой скоростью ω. Дано. $OA=r$ и $AB=l$. Оси Ox и Oy имеют начало в центре вала. Принять, что $\lambda=r/l$ мало.

Ответ: 1) Окружность $x^2+(y+r)^2=l^2$,

2) $\xi=l\left(1-\lambda\cos\omega t-\frac{\lambda^2}{2}\sin^2\omega t\right)$.

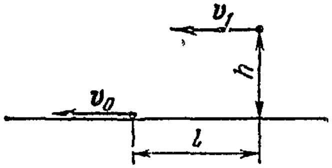
21.15. Вертолет, зависший неподвижно над поляной, сбрасывает груз и в тот же момент начинает двигаться со скоростью v_0, направленной под углом α к горизонтальной поверхности. Найти уравнения движения и траекторию груза относительно вертолета (оси относительной системы координат направлены из центра тяжести вертолета горизонтально по курсу и вертикально вниз).

Ответ: $x_r = -v_0 t \cos\alpha$, $y_r = \frac{gt^2}{2} + v_0 t \sin\alpha$. Траектория — парабола $y_r = -x_r \operatorname{tg}\alpha + \frac{gx_r^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}$

§ 22. Сложение скоростей точки

22.1(22.1). Корабль движется прямолинейно со скоростью v_0. На высоте h над морём со скоростью v_1 летит самолет тем же курсом. Определить расстояние l, отсчитываемое по горизонтали, на котором надо сбросить вымпел, чтобы он попал на корабль. Сопротивлением воздуха движению вымпела пренебречь.

Ответ: $l = (v_1 - v_0)\sqrt{2h/g}$.



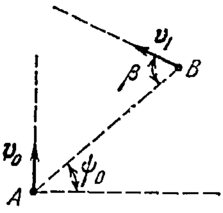
К задаче 22.1

22.2(22.2). Решить предыдущую задачу, если самолет летит с той же скоростью навстречу движущемуся кораблю

Ответ: $l = (v_1 + v_0)\sqrt{2h/g}$

22.3(22.3). Корабль, проходящий точку A, движется с постоянной по модулю и направлению скоростью v_0 Под каким углом β к прямой AB надо начать двигаться катеру из точки B, чтобы встретиться с кораблем, если скорость катера постоянна по модулю и направлению и равна v_1? Линия AB составляет угол ψ_0 с перпендикуляром к курсу корабля

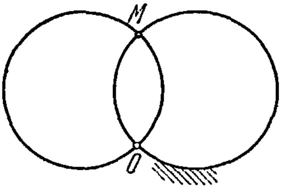
Ответ: $\sin\beta = \frac{v_0}{v_1}\cos\psi_0$.



К задаче 22.3

22.4(22.4). В предыдущей задаче определить время T, по истечении которого катер встретится с кораблем, если и первоначальное расстояние между ними равнялось $AB = l$.

Ответ.
$$T = \frac{l}{v_0 \sin\psi_0 + \sqrt{v_1^2 - v_0^2\cos^2\psi_0}} = \frac{l}{v_0}\,\frac{\sin\beta}{\cos(\psi_0 - \beta)} = \frac{l}{v_1}\,\frac{\cos\psi_0}{\cos(\psi_0 - \beta)}$$



К задаче 22.5

22.5(22.5). Проволочная окружность вращается в своей плоскости относительно неподвижного шарнира O с постоянной угловой скоростью ω Как будет двигаться точка M пересечения этой окружности с неподвижной окружностью того же радиуса R, проходящей также через шарнир O?

Ответ Точка пересечения обходит каждую из окружностей с постоянной скоростью, равной ωR.

22.6(22.6). Корабль идет курсом ЮВ со скоростью a узлов, при этом флюгер на мачте показывает ветер В. Корабль уменьшает ход до $a/2$ узлов, флюгер показывает ветер СВ. Определить: 1) направление и 2) скорость ветра.

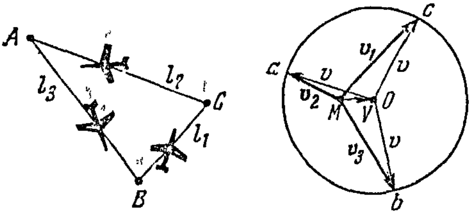
Примечание. Наименование курса указывает, куда идет корабль, а наименование ветра — откуда он дует.

Ответ. 1) С севера, 2) $a\sqrt{2}/2$ узлов.

22.7(22.7). Для определения собственной скорости самолета при ветре на Земле отмечают прямую линию известной длины l, концы которой должны быть хорошо видны сверху. Направление отмеченной прямой должно совпадать с направлением ветра. Вдоль этой прямой самолет пролетел сначала по ветру за время t_1 с, а затем против ветра за время t_2 с. Определить собственную скорость v самолета и скорость V ветра.

Ответ: $v=\frac{l}{2}\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}\right)$ м/с, $V=\frac{l}{2}\left(\frac{1}{t_1}-\frac{1}{t_2}\right)$ м/с.

22.8(22.8). Для определения собственной скорости v самолета при ветре размечают на земле треугольный полигон ABC со сторонами $BC=l_1$, $CA=l_2$, $AB=l_3$ м. Для каждой стороны полигона определяют время полета: t_1, t_2, t_3 с. Определить собственную скорость v самолета, предполагая, что она неизменна по величине, и скорость V ветра. Задачу решить графически.



К задаче 22.8

Пояснение. Собственной скоростью самолета называется скорость самолета относительно воздуха.

Ответ. От произвольной точки M отложить три вектора, соответственно равных l_1/t_1, l_2/t_2, l_3/t_3 и параллельных сторонам BC, CA и AB полигона. Величина скорости v самолета определится радиусом окружности, проходящей через концы этих векторов. Скорость ветра определяется вектором $\overline{MO}$.

22.9(22.9). Пассажир движущегося со скоростью 72 км/ч по горизонтальному шоссе автомобиля видит через боковое стекло кабины траектории капель дождя наклоненными к вертикали под углом 10°. Определить абсолютную скорость падения дождевых капель отвесно падающего дождя, пренебрегая трением капель о стекло.

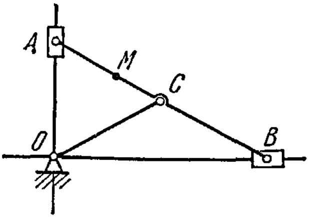
Ответ: $v=\frac{v_e}{\operatorname{tg} 10^\circ}=23{,}8$ м/с.

22.10(22.10). Берега реки параллельны; лодка вышла из точки A и, держа курс перпендикулярно берегам, достигла противоположного берега через 10 мин после отправления. При этом она попала в точку C, лежащую на 120 м ниже точки A по течению реки. Чтобы, двигаясь с прежней относительной скоростью, попасть из точки A в точку B, лежащую на прямой AB, перпендикулярной берегам, лодке надо держать курс под некоторым углом к прямой AB и против течения; в этом случае лодка достигает противоположного берега через 12,5 мин. Определить ширину реки l, относительную скорость u лодки по отношению к воде и скорость v течения реки.

Ответ $l = 200$ м, $u = 20$ м/мин, $v = 12$ м/мин.

22.11(22.11). Корабль плывет на юг со скоростью $36\sqrt{2}$ км/ч. Второй корабль идет курсом на юго восток со скоростью 36 км/ч. Найти величину и направление скорости второго корабля, определяемые наблюдателем, находящимся на палубе первого корабля

Ответ v_r ($v_r = 36$ км/ч) направлена на северо восток



К задаче 22.12

22.12(22.12). Линейка AB эллипсографа приводится в движение стержнем OC, вращающимся вокруг оси O с постоянной угловой скоростью ω_0 Кроме того, весь механизм вместе с направляющими вращается вокруг оси, перпендикулярной плоскости рисунка и проходящей через точку O, с постоянной угловой скоростью, равной также ω_0 Найти абсолютную скорость произвольной точки M линейки как функцию расстояния $AM = l$ в предположении, что вращение стержня OC и вращение всего механизма происходит в противоположных направлениях

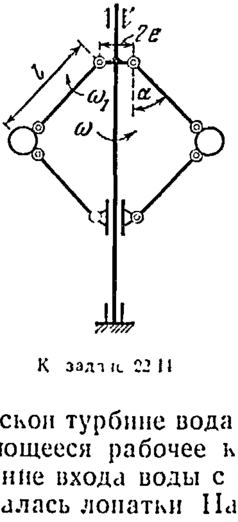
Ответ $v_M = (AB - 2l)\omega_0$

22.13(23.13). Решить предыдущую задачу для случая, когда оба вращения происходят в одном направлении

Ответ: v_M не зависит от положения точки M и равна $AB \cdot \omega_0$

22.14(22.14). Шары центробежного регулятора Уатта, вращающегося вокруг вертикальной оси с угловой скоростью $\omega = 10$ рад/с, благодаря изменению нагрузки машины отходят от этой оси, имея для своих стержней в данном положении угловую скорость $\omega_1 = 1{,}2$ рад/с Найти абсолютную скорость шаров регулятора в рассматриваемый момент, если длина стержней $l = 0{,}5$ м, расстояние между осями их подвеса $2e = 0{,}1$ м, углы, образованные стержнями с осью регулятора, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha = 30°$

Ответ $v = 3{,}06$ м/с



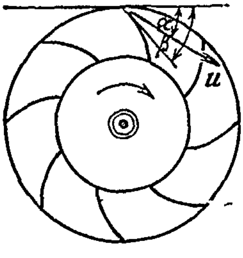
К задаче 22.14

К задаче 22.15

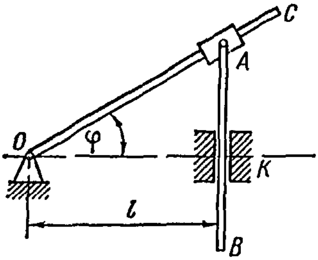
22.15(22.15). В гидравлической турбине вода из направляющего аппарата попадает во вращающееся рабочее колесо, лопатки которого поставлены, во избежание входа воды с ударом, так, чтобы относительная скорость v_r касалась лопатки Найти относительную скорость частицы воды на наружном ободе колеса (в момент входа), если ее абсолютная скорость при входе $v = 15$ м/с, угол между абсолютной скоростью и радиусом $\alpha = 60°$, радиус входа $R = 2$ м, угловая скорость колеса равна π рад/с

Ответ $v_r = 10{,}06$ м/с, $(\widehat{v_r, R}) = 41°50'$.

22.16(22.16). Частицы воды входят в турбину со скоростью u. Угол между скоростью u и касательной к ротору, проведенной в точке входа частицы, равен α. Внешний диаметр ротора D, его число оборотов в минуту n



К задаче 22.16



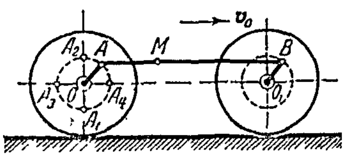
К задаче 22.17

Определить угол между лопаткой ротора и касательной в точке входа воды, при котором вода будет входить без удара (относительная скорость частиц в этом случае должна быть направлена вдоль лопаток).

Ответ: $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{60u\sin\alpha}{60u\cos\alpha - \pi D n}$.

22.17(22.17). В кулисном механизме при качании кривошипа OC вокруг оси O, перпендикулярной плоскости рисунка, ползун A, перемещаясь вдоль кривошипа OC, приводит в движение стержень AB, движущийся в вертикальных направляющих K Расстояние $OK = l$ Определить скорость движения ползуна A относительно кривошипа OC в функции от угловой скорости ω и угла поворота φ кривошипа.

Ответ: $v_r = \dfrac{l\omega\operatorname{tg}\varphi}{\cos\varphi}$.



К задаче 22.18

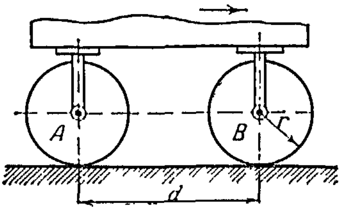
22.18(22.18). Найти абсолютную скорость какой-либо точки M спарника AB, соединяющего кривошипы OA и O_1B осей O и O_1, если радиусы колес одинаковы $R = 1$ м, радиусы кривошипов $OA = O_1B = 0{,}5$ м. Скорость экипажа $v_0 = 20$ м/с Скорость точки M определить для четырех моментов, когда кривошипы OA и O_1B либо вертикальны, либо горизонтальны Колёса катятся по рельсам без скольжения

Ответ. $v_1 = 10$ м/с, $v_2 = 30$ м/с, $v_3 = v_4 = 22{,}36$ м/с

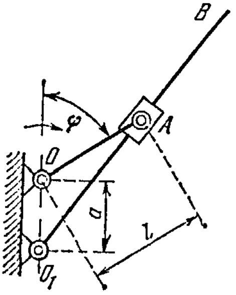
22.19(22.19). Колеса A и B вагона, движущегося со скоростью v по прямолинейному рельсу, катятся по нему без скольжения Радиусы колес равны r, и расстояние между осями d. Определить скорость центра колеса A относительно системы координат, неизменно связанной с колесом B

Ответ Скорость равна vd/r, перпендикулярна к AB и направлена вниз.

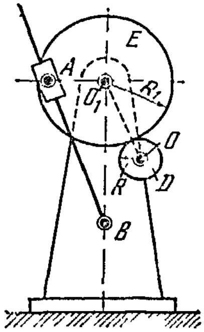
22.20(22.20). Механизм состоит из двух параллельных валов O и O_1, кривошипа OA и кулисы O_1B, конец A кривошипа OA скользит вдоль прорези в кулисе O_1B, расстояние между осями валов OO_1 равно a; длина кривошипа OA равна l, причем $l > a$. Вал O вращается с постоянной угловой скоростью ω Найти: 1) угловую скорость ω_1 вала O_1 и относительную скорость точки A по отношению к кулисе O_1B, выразив их через переменную величину $O_1A = s$, 2) наибольшие и наименьшие значения этих величин; 3) те положения кривошипа, при которых $\omega_1 = \omega$



К задаче 22 19



К задаче 22 20



К задаче 22 21

Ответ: 1) $\omega_1 = \frac{\omega}{2}\left(1 + \frac{l^2 - a^2}{s^2}\right)$,

$$v_r = \frac{\omega}{2s}\sqrt{(l+s+a)(l+s-a)(a+l-s)(a+s-l)};$$

2) $\omega_{1\,\max} = \omega\frac{l}{l-a}$, $\omega_{1\,\min} = \omega\frac{l}{l+a}$, $v_{r\,\max} = a\omega$, $v_{r\,\min} = 0$;

3) $\omega_1 = \omega$ при $O_1B \perp O_1O$.

22.21(22.21). Камень A качающейся кулисы механизма строгального станка приводится в движение зубчатой передачей, состоящей из зубчатки D и зубчатки E, несущей на себе ось камня A в виде пальца Радиусы зубчаток $R = 0{,}1$ м, $R_1 = 0{,}35$ м, $O_1A = 0{,}3$ м, расстояние между осью O_1 зубчатки E и центром B качания кулисы $O_1B = 0{,}7$ м. Определить угловую скорость кулисы в моменты, когда отрезок O_1A либо вертикален (верхнее и нижнее положения), либо перпендикулярен кулисе AB (левое и правое положения), если зубчатка имеет угловую скорость $\omega = 7$ рад/с. Точки O_1 и B расположены на одной вертикали.

Ответ $\omega_{\mathrm{I}} = 0{,}6$ рад/с, $\omega_{\mathrm{II}} = \omega_{\mathrm{IV}} = 0$, $\omega_{\mathrm{III}} = 1{,}5$ рад/с

22.22(22.22). Определить угловую скорость вращающейся кулисы кривошипно кулисного механизма при четырех положениях кривошипа — двух вертикальных и двух горизонтальных, если $a = 60$ см, $l = 80$ см и угловая скорость кривошипа равна π рад/с. (См. рисунок к задаче 22.20.)

Ответ. $\omega_{I} = \frac{4}{7}\pi$ рад/с, $\omega_{II} = \omega_{IV} = 0{,}64\pi$ рад/с, $\omega_{III} = 4\pi$ рад/с.

22.23(22.23). Определить абсолютную скорость поршня ротативного двигателя при двух вертикальных и двух горизонтальных положениях шатуна AB, если длина кривошипа $OA = r = 0{,}24$ м, угловая скорость цилиндра с картером равна 40π рад/с. (См. рисунок к задаче 21.14.)

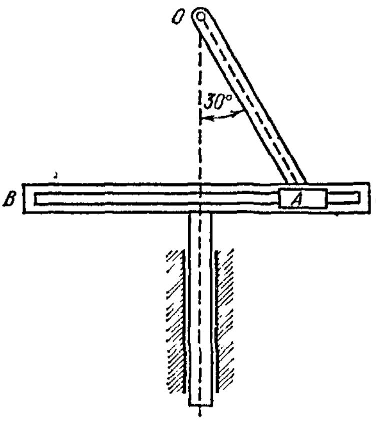
Ответ. $v_{I} = 20{,}11$ м/с, $v_{III} = 40{,}21$ м/с, $v_{II} = v_{IV} = 33{,}51$ м/с.

22.24(22.24). Восточная, северная и вертикальная составляющие скорости точки M относительно Земли соответственно равны v_E, v_N, v_h. Высота точки над поверхностью Земли в данный момент равна h, широта места φ. Радиус Земли R, ее угловая скорость ω. Определить составляющие абсолютной скорости точки.

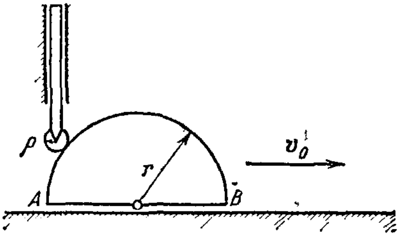
Ответ. $v_x = v_E + (R + h)\omega\cos\varphi$, $v_y = v_N$, $v_z = v_h$ (ось x направлена на восток, ось y — на север, ось z — вертикально вверх).

22.25. В кривошипно-кулисном механизме с поступательно движущейся кулисой BC кривошип OA (расположенный позади кулисы) длины $l = 0{,}2$ м, вращается с постоянной угловой скоростью, равной 3π рад/с. Концом A, соединенным шарнирно с камнем, скользящим в прорези кулисы, он сообщает кулисе BC возвратно-поступательное движение. Определить скорость v кулисы в момент, когда кривошип образует с осью кулисы угол 30°.

Ответ. $v_1 = 0{,}942$ м/с.



К задаче 22.25



К задаче 22.26

22.26. Стержень скользит в вертикальных направляющих, опираясь нижним концом с помощью ролика на поверхность полуцилиндра радиуса r. Полуцилиндр движется по горизонтали вправо с постоянной скоростью v_0. Радиус ролика ρ. Определить скорость стержня, если в начальный момент он находился в наивысшем положении.

Ответ: $v = \dfrac{v_0^2 t}{\sqrt{(r + \rho)^2 - v_0^2 t^2}}$.

22.27. На токарном станке обтачивается цилиндр диаметра $d = 80$ мм. Шпиндель делает $n = 30$ об/мин. Скорость продольной подачи $v = 0,2$ мм/с. Определить скорость v_r резца относительно обрабатываемого цилиндра.

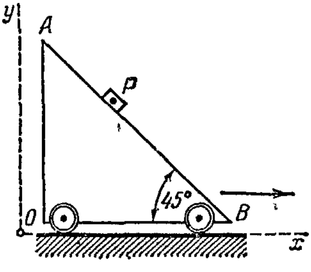
Ответ: $v_r = 125,7$ мм/с, $\operatorname{tg}\alpha = 628$, где α — угол между v_r и осью шпинделя.

§ 23. Сложение ускорений точки

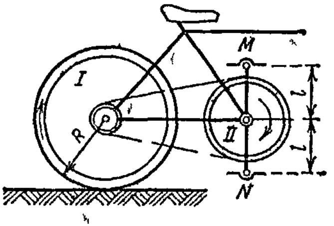
23.1(23.1). Наклонная плоскость AB, составляющая угол 45° с горизонтом, движется прямолинейно параллельно оси Ox с постоянным ускорением 0,1 м/с². По этой плоскости спускается тело P с постоянным относительным ускорением $0,1\sqrt{2}$ м/с², начальные скорости плоскости и тела равны нулю, начальное положение тела определяется координатами $x = 0$, $y = h$. Определить траекторию, скорость и ускорение абсолютного движения тела.

Ответ: $y = h - x/2$, $v = 0,1\sqrt{5}t$ м/с, $w = 0,1\sqrt{5}$ м/с².

23.2(23.2). Велосипедист на некотором участке горизонтального прямолинейного пути движется по закону $s = 0,1t^2$ (s — в метрах, t — в секундах). Дано $R = 0,35$ м, $l = 0,18$ м, $z_1 = 18$ зубцов, $z_2 = 48$ зубцов. Определить абсолютное ускорение осей M и N велосипедных педалей (предполагая, что колеса катятся без скольжения) при $t = 10$ с, если в этот момент кривошип MN расположен вертикально.



К задаче 23.1



К задаче 23.2

Ответ: $w_M = 0,860$ м/с², $w_N = 0,841$ м/с².

23.3(23.3). Определить абсолютное ускорение какой-нибудь точки M спарника AB, соединяющего кривошипы осей O и O_1, если экипаж движется по прямолинейному участку пути равномерно со скоростью $v_0 = 10$ м/с. Радиусы колес $R = 1$ м, радиусы кривошипов $r = 0,75$ м. (См. рисунок к задаче 22.18.)

Ответ: $w = 75$ м/с².

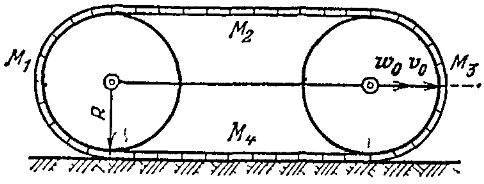
23.4(23.4). Найти скорости и ускорения точек M_1, M_2, M_3 и M_4 гусеницы трактора, движущегося без скольжения по прямолинейному участку пути со скоростью v_0 и ускорением w_0; радиусы колес трактора равны R; скольжением гусеницы по ободу колес пренебречь.

Ответ: $v_1 = v_3 = v_0\sqrt{2},\ v_2 = 2v_0,\ v_4 = 0,$

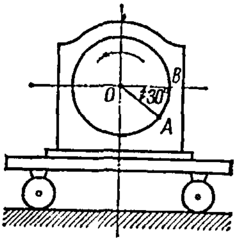
$$w_1 = \sqrt{w_0^2 + (w_0 + v_0^2/R)^2},\ w_2 = 2w_0,$$

$$w_3 = \sqrt{w_0^2 + (w_0 - v_0^2/R)^2},\ w_4 = 0.$$

23.5(23.5). На тележке, движущейся по горизонтали вправо с ускорением $w = 0{,}492$ м/с², установлен электрический мотор, ротор которого при пуске в ход вращается согласно уравнению $\varphi = t^2$, причем угол φ измеряется в радианах. Радиус ротора равен 0,2 м. Определить абсолютное ускорение точки A, лежащей на ободе ротора, при $t = 1$ с, если в этот момент точка A находится в положении, указанном на рисунке.



К задаче 23.4

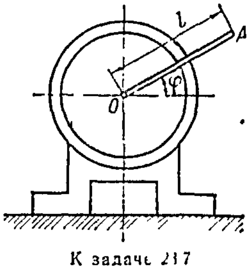


К задаче 23.5

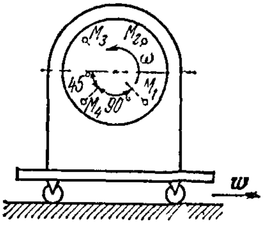
Ответ: w_A ($w_A = 0{,}746$ м/с²) направлено по вертикали вверх.

23.6(23.6). Определить в предыдущей задаче угловую скорость равномерного вращения ротора, при которой точка A, находясь в положении B, имеет абсолютное ускорение, равное нулю.

Ответ: $\omega = 1{,}57$ рад/с.



К задаче 23.7



К задаче 23.8

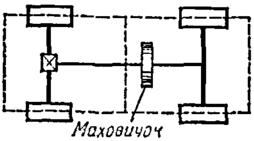
23.7(23.7). К валу электромотора, вращающегося согласно уравнению $\varphi = \omega t$ ($\omega = \mathrm{const}$), прикреплен под прямым углом стержень OA длины l, при этом электромотор, установленный без креплений, совершает горизонтальные гармонические колебания на фундаменте по закону $x = a \sin \omega t$. Определить абсолютное ускорение точки A в момент времени $t = \frac{\pi}{2\omega}$ с.

Ответ: $w_A = \omega^2\sqrt{a^2 + l^2}$.

23.8(23.8). Тележка, на которой установлен мотор, движется по горизонтали вправо с постоянным ускорением $w = 0{,}4$ м/с². Мотор вращается по закону $\varphi = {}^1/_2 t^2$. Определить абсолютное ускоререние в момент $t = 1$ с четырех точек M_1, M_2, M_3, M_4 ротора, отстоящих от оси ротора на расстоянии $l = 0{,}2\sqrt{2}$ м и занимающих в этот момент положение, указанное на рисунке.

Ответ: $w_1 = 0{,}4\sqrt{2}$ м/с^2, $w_2 = 0$, $w_3 = 0{,}4\sqrt{2}$ м/с^2, $w_4 = 0{,}8$ м/с^2.

23.9(23.9). Автомобиль на прямолинейном участке пути движется с ускорением $w_0 = 2$ м/с^2. На продольный вал насажен вращающийся маховичок радиуса $R = 0{,}25$ м, имеющий в данный момент угловую скорость $\omega = 4$ рад/с и угловое ускорение $\varepsilon = 4$ рад/с^2. Найти абсолютное ускорение точек обода маховичка в данный момент.



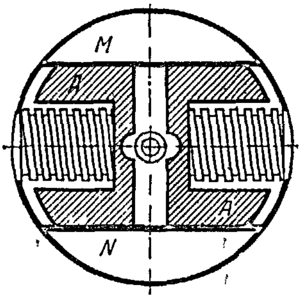
К задаче 23.9

Ответ: $w = 4{,}58$ м/с^2.

23.10(23.10). Самолет движется прямолинейно с ускорением $w_0 = \mathrm{const} = 4$ м/с, винт диаметра $d = 1{,}8$ м вращается равномерно с угловой скоростью равной 60π рад/с. Найти уравнения движения, скорость и ускорение конца винта в системе координат, неподвижной относительно Земли, причем ось Ox этой системы координат совпадает с осью винта. Начальная скорость самолета $v_0 = 0$.

Ответ: $x = 2t^2$ м, $y = 0{,}9\cos 60\pi t$ м, $z = 0{,}9\sin 60\pi t$ м; $v = \sqrt{16t^2 + 2916\pi^2}$ м/с; $w = 31\,945$ м/с^2.

23.11(23.11). В регуляторе, вращающемся вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью $\omega = 6\pi$ рад/с, тяжелые гири A, прикрепленные к концам пружины, совершают гармонические колебания вдоль паза MN таким образом, что расстояние их центров тяжести от оси вращения изменяются по закону $x = (0{,}1 + 0{,}05\sin 8\pi t)$ м. Определить ускорение центра тяжести гири в момент, когда кориолисово ускорение достигает максимального значения, и указать значение кориолисова ускорения при крайних положениях гири.



К задаче 23.11

Ответ $w_a = 6\pi^2$ м/с^2, $w_c = 0$

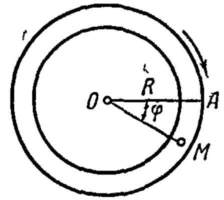
23.12(23.12). Струя воды течет по горизонтальной трубе OA, равномерно вращающейся вокруг вертикальной оси с угловой скоростью, равной 2π рад/с Определить кориолисово ускорение w_c в этой точке струи, где относительная скорость v_r ($v_r = 21/11$ м/с) направлена на OA. Принять для π приближенное значение $\pi = 22/7$.

Ответ $w_c = 24$ м/с^2.

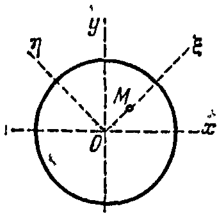
23.13(23.13). Круглая трубка радиуса $R = 1$ м вращается вокруг горизонтальной оси O по часовой стрелке с постоянной угловой скоростью $\omega = 1$ рад/с В трубке около ее точки A колеблется шарик M, причем так, что угол $\varphi = \sin \pi t$. Определить абсолютные ускорения шарика: касательное w_τ и нормальное w_n в момент $t = 2^1/_6$ с

Ответ: $w_\tau = -4{,}93$ м/с², $w_n = 13{,}84$ м/с².

23.14(23.14). Диск вращается вокруг оси, перпендикулярной плоскости диска, по часовой стрелке равноускоренно с угловым ускорением 1 рад/с²; в момент $t = 0$ угловая скорость его равна нулю. По одному из диаметров диска колеблется точка M так, что ее координата $\xi = \sin \pi t$ м, причем t — в секундах Определить в момент $t = 1^2/_3$ с проекции абсолютного ускорения точки M на оси ξ, η, связанные с диском.



К задаче 23 13



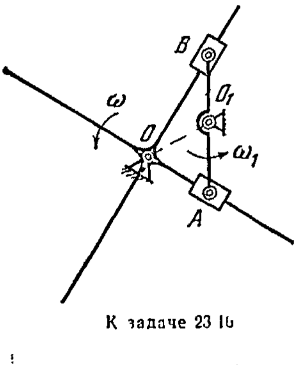
К задаче 23 14

Ответ $w_\xi = 10{,}95$ м/с², $w_\eta = -4{,}37$ м/с².

23.15(23.15). Точка движется равномерно с относительной скоростью v_r по хорде диска, который вращается вокруг своей оси O, перпендикулярной плоскости диска, с постоянной угловой скоростью ω Определить абсолютные скорость и ускорение точки в тот момент, когда она находится на кратчайшем расстоянии h от оси, в предположении, что относительное движение точки происходит в сторону вращения диска

Ответ: $v = v_r + h\omega$, $w = \omega^2 h + 2\omega v_r$.

23.16(23.16). Для передачи вращения одного вала к другому, параллельному первому, применяется муфта, которая является обращенным эллиптическим циркулем с закрепленным кривошипом OO_1. Кривошип AB вращается с угловой скоростью ω_1 вокруг оси O_1 и приводит во вращение крестовину вокруг оси O вместе со вторым валом. Определить угловую скорость вращения крестовины, а также переносную и относительную (по отношению к крестовине) скорости и ускорения (переносное, относительное и кориолисово) точки A ползуна при $\omega_1 = \text{const}$, если $OO_1 = AO_1 = O_1B = a$



К задаче 23 16

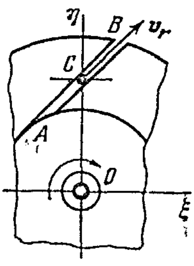
Ответ: $\omega = \frac{\omega_1}{2}$, $v_e = a\omega_1 \sin \frac{\omega_1}{2} t$, $v_r = a\omega_1 \cos \frac{\omega_1}{2} t$, $w_e = w_r =$
$= \frac{a\omega_1^2}{2} \sin \frac{\omega_1}{2} t$, $w_c = a\omega_1^2 \cos \frac{\omega_1}{2} t$.

23.17(23.17). Велосипедист движется по горизонтальной платформе, вращающейся вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью $\omega = {}^1/_2$ рад/с; расстояние велосипедиста до оси вращения платформы остается постоянным и равным $r = 4$ м. Относительная скорость велосипедиста $v_r = 4$ м/с и направлена в сторону, противоположную переносной скорости соответствующей точки платформы. Определить абсолютное ускорение велосипедиста. Найти также, с какой относительной скоростью он должен двигаться, чтобы его абсолютное ускорение равнялось нулю.

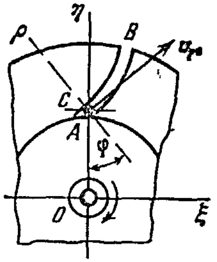
Ответ. 1) w ($w = 1$ м/с^2) направлено по радиусу к центру диска; 2) $v_r = 2$ м/с.

23.18(23.18). Компрессор с прямолинейными каналами равномерно вращается с угловой скоростью ω вокруг оси O, перпендикулярной плоскости рисунка. Воздух течет по каналам с постоянной относительной скоростью v_r. Найти проекции абсолютной скорости и ускорения на оси координат для частицы воздуха, находящейся в точке C канала AB, при следующих данных: канал AB наклонен к радиусу OC под углом 45°, $OC = 0{,}5$ м, $\omega = 4\pi$ рад/с, $v_r = 2$ м/с.

Ответ: $v_\xi = 7{,}7$ м/с, $v_\eta = 1{,}414$ м/с, $w_\xi = 35{,}54$ м/с^2, $w_\eta = -114{,}5$ м/с^2.



К задаче 23.18



К задаче 23.19

23.19(23.19). Решить предыдущую задачу для случая криволинейного канала, если радиус кривизны канала в точке C равен ρ, а угол между нормалью к кривой AB в точке C и радиусом OC равен φ. Радиус CO равен r.

Ответ. $v_\xi = v_r \cos\varphi + r\omega$, $v_\eta = v_r \sin\varphi$, $w_\xi = (2v_r\omega - v_r^2/\rho)\sin\varphi$, $w_\eta = -\left[r\omega^2 + (2v_r\omega - v_r^2/\rho)\cos\varphi\right]$.

23.20(23.20). Выразить как функцию времени угловое ускорение ε качающейся кулисы поперечно-строгального станка, если кривошип длины r вращается равномерно с угловой скоростью ω; расстояние между осями вращения кривошипа и кулисы $a > r$. (См. рисунок к задаче 21.13.)

Ответ: $\varepsilon = \dfrac{(r^2 - a^2)\,ar\omega^2 \sin\omega t}{(a^2 + r^2 + 2ar\cos\omega t)^2}$.

23.21(23.21). Камень A совершает переносное движение вместе с кулисой, вращающейся с угловой скоростью ω и угловым ускорением ε вокруг оси O_1, перпендикулярной плоскости кулисы, и относительное прямолинейное движение вдоль прорези кулисы со скоростью v_r и ускорением w_r. Определить проекции абсолютного ускорения камня на подвижные оси координат, связанные с кулисой, выразив их через переменное расстояние $O_1A = s$. (См. рисунок к задаче 22.20.)

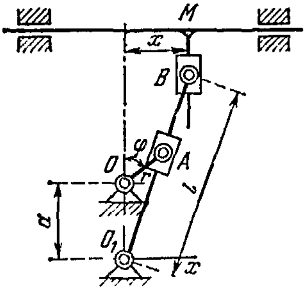
Ответ $w_\xi = w_r - s\omega^2$, $w_\eta = s\varepsilon + 2v_r\omega$, причем оси ξ и η направлены соответственно вдоль прорези и перпендикулярно к ней.

23.22(23.22). Определить угловое ускорение вращающейся кулисы кривошипно-кулисного механизма строгального станка при *двух вертикальных и двух горизонтальных положениях кривошипа*, если длина кривошипа $l = 0{,}4$ м, расстояние между осями кривошипа и кулисы $a = 0{,}3$ м, угловая скорость равномерного вращения кривошипа $\omega = 3$ рад/с (См рисунок к задаче 22 20)

Ответ $\varphi = 0$ и $\varphi = 180°$, $\varepsilon = 0$; $\varphi = 90°$, $\varepsilon = 1{,}21$ рад/с^2; $\varphi = 270°$, $\varepsilon = 1{,}21$ рад/с^2 (вращение замедленное)

23.23(23.23). Найти ускорение относительного движения камня кулисы вдоль ее прорези в предыдущей задаче при указанных четырех положениях кривошипа

Ответ $\varphi = 0$, $w_r = 1{,}543$ м/с^2, $\varphi = 90°$ и $\varphi = 270°$, $w_r = 1{,}037$ м/с^2, $\varphi = 180°$, $w_r = -1{,}037$ м/с^2



К задаче 23 24

23.24(23.24). Найти уравнение движения, скорость и ускорение суппорта M строгального станка, приводимого в движение кривошипно-кулисным механизмом с качающейся кулисой O_1B Схема указана на рисунке Кулиса соединена с суппортом M при помощи ползуна B, скользящего относительно суппорта по направляющей, перпендикулярной оси его движения Дано $O_1B = l$, $OA = r$, $O_1O = a$, $r < a$, кривошип OA вращается с постоянной угловой скоростью ω, угол поворота кривошипа отсчитывается от вертикальной оси

Ответ $x = l\dfrac{r \sin \omega t}{\sqrt{a^2 + r^2 + 2ar\cos\omega t}}$, $v = rl\omega\dfrac{(a + r\cos\omega t)(a\cos\omega t + r)}{(a^2 + r^2 + 2ar\cos\omega t)^{3/2}}$,

$$w = rl\omega^2\frac{a(r^2 - a^2)(a + r\cos\omega t) - r^2(a\cos\omega t + r)^2}{(a^2 + r^2 + 2ar\cos\omega t)^{5/2}}\sin\omega t$$

Примечание Координата отсчитывается от вертикали, проходящей через точку O

23.25(23.25). Найти ускорение резца строгального станка с качающейся кулисой при двух вертикальных и двух горизонтальных положениях кривошипа, если длина кривошипа $r = 0{,}1$ м, расстояние между центрами вращения кривошипа и кулисы $a = 0{,}3$ м, длина кулисы $l = 0{,}6$ м, угловая скорость вращения кривошипа $\omega = 4$ рад/с = const (См рисунок к задаче 23 24)

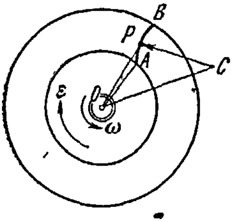
Ответ При $\varphi = 0$ и $\varphi = 180°$ $\omega_x = 0$, при $\varphi = 90°$ и $\varphi = 270°$ $w_x = \mp 2{,}21$ м/с^2

23.26(23.26). Лопатка AB турбины, вращающейся против часовой стрелки замедленно с угловым ускорением, равным 3 рад/с^2, имеет радиус кривизны 0,2 м и центр кривизны в точке C, причем $OC = 0{,}1\sqrt{10}$ м Частица воды P, отстоящая от оси O турбины на расстоянии $OP = 0{,}2$ м, движется по лопатке наружу и имеет скорость 0,25 м/с и касательное ускорение 0,5 м/с^2 по отношению к лопатке Определить абсолютное ускорение частицы P в тот момент, когда угловая скорость турбины равна 2 рад/с.

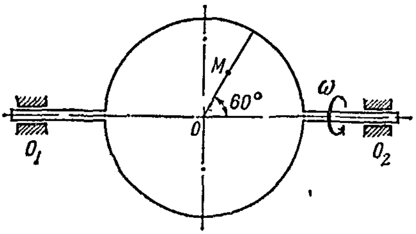
Ответ $w_a = 0{,}52$ м/с^2.

23.27(23.27). По радиусу диска, вращающегося вокруг оси O_1O_2 с угловой скоростью $\omega = 2t$ рад/с в направлении от центра диска к его ободу движется точка M по закону $OM = 4t^2$ см. Радиус OM составляет с осью O_1O_2 угол 60° Определить величину абсолютного ускорения точки M в момент $t = 1$ с.

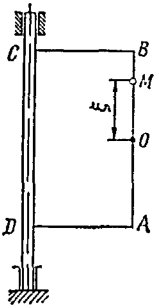
Ответ: $w_M = 35{,}56$ см/с^2.



К задаче 23.26



К задаче 23.27



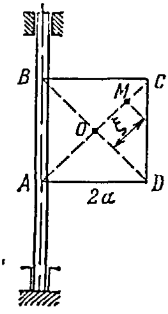
К задаче 23.28

23.28(23.28). Прямоугольник $ABCD$ вращается вокруг стороны CD с угловой скоростью $\omega = \pi/2$ рад/с $=$ const. Вдоль стороны AB движется точка M по закону $\xi = a \sin \frac{\pi}{2} t$ м Даны размеры. $DA = CB = a$ м Определить величину абсолютного ускорения точки в момент времени $t = 1$ с.

Ответ: $w_a = \frac{a\pi^2}{4}\sqrt{2}$ м/с^2.

23.29(23.29). Квадрат $ABCD$ со стороною $2a$ м вращается вокруг стороны AB с постоянной угловой скоростью $\omega = \pi\sqrt{2}$ рад/с. Вдоль диагонали AC совершает гармоническое колебание точка M по закону $\xi = a \cos \frac{\pi}{2} t$ м. Определить величину абсолютного ускорения точки при $t = 1$ с и $t = 2$ с.

Ответ: $w_{a1} = a\pi^2\sqrt{5}$ м/с^2, $w_{a2} = 0{,}44a\pi^2$ м/с^2.

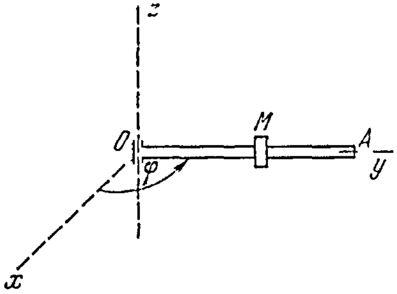


К задаче 23.29

23.30(23.30). Стержень OA вращается вокруг оси z, проходящей через точку O, с угловым замедлением 10 рад/с^2. Вдоль стержня от точки O скользит шайба M. Определить абсолютное ускорение шайбы в момент, когда она находится на расстоянии 0,6 м от точки O и имеет скорость и ускорение в движении вдоль стержня соответственно 1,2 м/с и 0,9 м/с^2, если в этот момент угловая скорость стержня равна 5 рад/с

Ответ: $w_a = 15{,}33$ м/с^2 и составляет с направлением MO угол в 23°.

23.31(23.31). Шайба M движется по горизонтальному стержню OA, так что $OM = 0{,}5t^2$ см. В то же время стержень вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через точку O, по закону $\varphi = t^2 + t$. Определить радиальную и трансверсальную составляющие абсолютной скорости и абсолютного ускорения шайбы в момент $t = 2$ с.

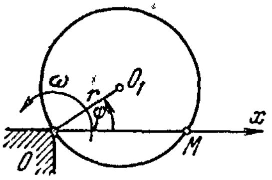


К задачам 23.30 и 23.31

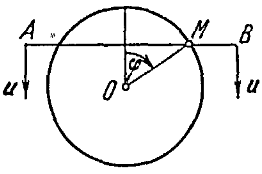
Ответ. $v_r = 0{,}02$ см/с, $v_\varphi = 0{,}1$ см/с, $w_r = -0{,}49$ см/с², $w_\varphi = 0{,}21$ см/с²

23.32(23.32). Круг радиуса r вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг неподвижной точки O, лежащей на его окружности. При вращении круг пересекает неподвижную горизонтальную прямую — ось x, проходящую через точку O. Найти скорость и ускорение точки M пересечения круга с осью x в движениях этой точки по отношению к кругу и по отношению к оси x. Выразить искомые величины через расстояние $OM = x$.

Ответ. По отношению к прямой Ox точка M движется со скоростью $-\omega\sqrt{4r^2 - x^2}$ и ускорением $-\omega^2 x$. По отношению к кругу точка движется в сторону, противоположную вращению круга, с постоянной скоростью $2\omega r$ и ускорением $4\omega^2 r$.



К задаче 23.32



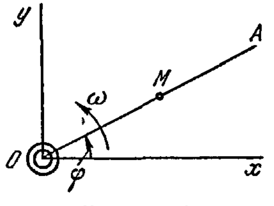
К задаче 23.33

23.33(23.33). Горизонтальная прямая AB перемещается параллельно самой себе по вертикали с постоянной скоростью u и пересекает при этом неподвижный круг радиуса r. Найти скорость и ускорение точки M пересечения прямой с окружностью в движениях этой точки относительно круга и относительно прямой AB в функции от угла φ (см. рисунок).

Ответ. 1) В движении по окружности точка M имеет скорость $\dfrac{u}{\sin\varphi}$ и касательное ускорение $-\dfrac{u^2\cos\varphi}{r\sin^3\varphi}$, нормальное ускорение $\dfrac{u^2}{r\sin^2\varphi}$.

2) По отношению к прямой AB точка M движется со скоростью $\dfrac{u\cos\varphi}{\sin\varphi}$ и ускорением $-\dfrac{u^2}{r\sin^3\varphi}$.

23.34(23.34). Полупрямая OA вращается в плоскости рисунка вокруг неподвижной точки O с постоянной угловой скоростью ω Вдоль OA перемещается точка M. В момент, когда полупрямая совпадала с осью x, точка M находилась в началее координат. Определить движение точки M относительно полупрямой OA, если известно, что абсолютная скорость v точки M постоянна по величине Определить также абсолютную траекторию и абсолютное ускорение точки M.



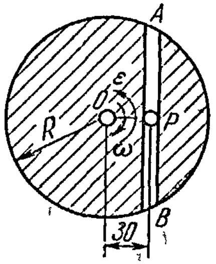
К задаче 23.34

Ответ. Точка M движется по OA со скоростью $v_r = v\cos\omega t$

Абсолютная траектория точки M — окружность, ее уравнение в полярных координатах $r = \frac{v}{\omega}\sin\varphi$, в декартовых координатах $x^2 + \left(y - \frac{v}{2\omega}\right)^2 = \left(\frac{v}{2\omega}\right)^2$. Абсолютное ускорение точки M $w_a = 2\omega v$.

23.35(23.35). Точка движется с постоянной скоростью v по радиусу диска, вращающегося с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его центр. Определить абсолютное ускорение точки в тот момент, когда она будет находиться на расстоянии r от центра диска.

Ответ: $w_a = \omega\sqrt{r^2\omega^2 + 4v^2}$.



К задаче 23.36

23.36(23.36). Шарик P движется со скоростью 1,2 м/с от A к B по хорде AB диска, вращающегося вокруг оси, проходящей через его центр перпендикулярно плоскости диска Найти абсолютное ускорение шарика, когда он находится на кратчайшем расстоянии от центра диска, равном 30 см. В этот момент угловая скорость диска равна 3 рад/с, угловое замедление равно 8 рад/с².

Ответ. $w_a = 10{,}18$ м/с²

23.37(23.37). Решить предыдущую задачу в предположении, что диск вращается вокруг диаметра, параллельного хорде.

Ответ $w_a = 3{,}612$ м/с².

23.38(23.38). Решить задачу 23.36 при условии, что осью вращения диска является диаметр, перпендикулярный хорде.

Ответ $w_a = 7{,}2$ м/с².

23.39(23.39). Корабль, находящийся на экваторе, идет курсом северо-восток. Скорость движения корабля равна 20 узлам. Найти абсолютную скорость и кориолисово ускорение корабля с учетом вращения Земли, считая радиус Земли равным $R = 6{,}378\cdot 10^6$ м (наименование курса указывает, куда идет судно; узел = 1 морская миля/ч = 1852 м/ч = 0,5144 м/с).

Ответ. $v_a = 470{,}4$ м/с, $w_c = 1{,}06\cdot 10^{-3}$ м/с².

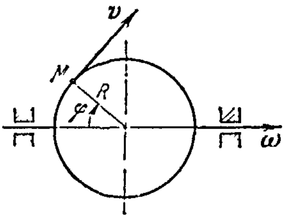
23.40(23.40). В условиях предыдущей задачи найти абсолютное ускорение корабля, считая его скорость постоянной.

Ответ. $w_a = 317{,}766\cdot10^{-4}$ м/с^2.

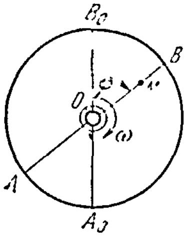
23.41(23.41). По ободу диска радиуса R, вращающегося вокруг своего диаметра с постоянной угловой скоростью ω, движется с постоянной по модулю скоростью v точка M. Найти абсолютное ускорение точки M как функцию угла φ, составленного радиус-вектором точки с осью вращения диска.

Ответ: $w_a = \sqrt{\frac{v^4}{R^2} + \omega^4 R^2 \sin^2\varphi + 2\omega^2 v^2 (1 + \cos^2\varphi)}$.

23.42(23.42). Диск радиуса R вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, проходящей через его центр перпендикулярно плоскости диска. По одному из диаметров диска движется точка M так, что ее расстояние от центра диска меняется по закону $OM = R\sin\omega t$. Найти абсолютную траекторию, абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M.



К задаче 23.41



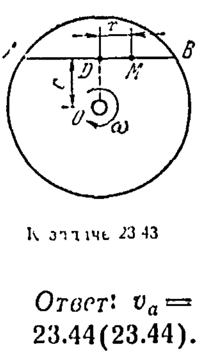
К задаче 23.42

Ответ. Если начальное положение точки M принять за начало координат, а ось y направить по начальному положению диаметра, по которому движется точка M, то уравнение траектории будет

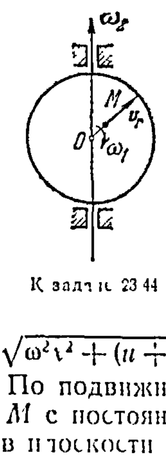
$$\left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{R^2}{4}$$

(окружность половинного радиуса с центром на середине радиуса). Абсолютная скорость $v_a = \omega R$. Абсолютное ускорение $w_a = 2\omega^2 R$.

23.43(23.43). Диск вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, проходящей через его центр перпендикулярно плоскости диска. По хорде AB из ее середины D движется точка M с постоянной относительной скоростью u. Хорда отстоит от центра диска на расстоянии c. Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M как функции расстояния $DM = x$.



К задаче 23.43



К задаче 23.44

Ответ: $v_a = \sqrt{\omega^2 x^2 + (u + \omega c)^2}$, $w_a = \omega\sqrt{\omega^2 x^2 + (2u + \omega c)^2}$.

23.44(23.44). По подвижному радиусу диска от центра к ободу движется точка M с постоянной скоростью v_r. Подвижный радиус поворачивается в плоскости диска с постоянной угловой скоростью ω_1. Плоскость диска вращается вокруг своего диаметра с постоянной угловой скоростью ω_2 Найти абсолютную скорость точки M, считая, что при $t=0$ точка M находилась в центре диска, а подвижный радиус был направлен по оси вращения диска.

Ответ: $v_a = v_r\sqrt{1+t^2(\omega_1^2+\omega_2^2\sin^2\omega_1 t)}$.

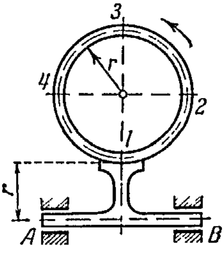
23.45(23.45). Точка движется со скоростью 2 м/с по окружности обода диска диаметра 4 м Диск вращается в противоположном направлении, имея в данный момент угловую скорость 2 рад/с и угловое ускорение 4 рад/с². Определить абсолютное ускорение точки

Ответ w_a ($w_a = 8{,}24$ м/с²) направлено под углом 76° к радиусу.

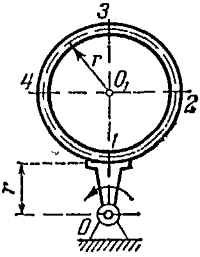
23.46(23.46). Диск вращается вокруг оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его центр, по закону $\varphi = {}^2/_3t^3$. Вдоль радиуса диска начинает двигаться точка по закону $s = 4t^2 - 10t + 8$ (см). Расстояние s измеряется от центра диска. Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки в момент времени $t = 1$ с

Ответ $v_a = 4{,}47$ см/с, $w_a = 0$

23.47(23.47). Полое кольцо радиуса r жестко соединено с валом AB, и притом так, что ось вала расположена в плоскости оси кольца. Кольцо заполнено жидкостью, движущейся в нем в направлении стрелки с постоянной относительной скоростью u. Вал AB вращается по направлению движения стрелки часов, если смотреть по оси вращения от A к B Угловая скорость вала ω постоянна. Определить величины абсолютных ускорений частиц жидкости, расположенных в точках 1, 2, 3 и 4



К задаче 23.47



К задаче 23.48

Ответ: $w_1 = r\omega^2 - \frac{u^2}{r}$, $w_3 = 3r\omega^2 + \frac{u^2}{r}$, $w_2 = w_4 = 2r\omega^2 + \frac{u^2}{r}$.

23.48(23.48). По условиям предыдущей задачи, измененным лишь в том отношении, что плоскость оси кольца теперь перпендикулярна оси вала AB, определить те же величины в двух случаях:

1) переносное и относительное движения одного направления;
2) составляющие движения противоположны по направлению.

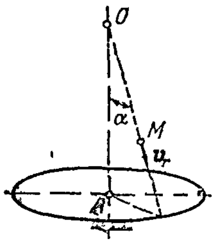
Ответ: 1) $w_1 = r\omega^2 - u^2/r - 2u\omega$, $w_3 = 3r\omega^2 + u^2/r + 2\omega u$,

$$w_2 = w_4 = \sqrt{(u^2/r + 2\omega u + \omega^2 r)^2 + 4\omega^2 r^2};$$

2) $w_1 = r\omega^2 - u^2/r + 2u\omega$, $w_3 = 3r\omega^2 + u^2/r - 2\omega u$,

$$w_2 = w_4 = \sqrt{(\omega^2 r + u^2/r - 2\omega u)^2 + 4\omega^4 r^2}.$$

23.49(23.49). Точка M равномерно движется по образующей кругового конуса с осью OA от вершины к основанию с относительной скоростью v_r; угол $MOA = \alpha$. В момент $t = 0$ расстояние $OM_0 = a$. Конус равномерно вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω. Найти абсолютное ускорение точки M.



К задаче 23.49

Ответ. Ускорение лежит в плоскости, перпендикулярной оси вращения, и представляет собой гипотенузу треугольника с катетами $w_{en} = \omega^2(a + v_r t)\sin\alpha$ и $w_c = 2v_r\omega\sin\alpha$.

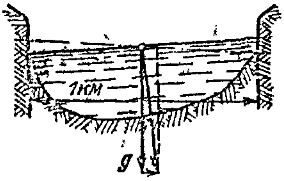
23.50(23.50). Определить в предыдущей задаче величину абсолютного ускорения точки M в момент $t = 1$ с в том случае, когда она движется по образующей конуса с постоянным относительным ускорением w_r, направленным от вершины конуса к основанию, при следующих данных: $\alpha = 30°$, $a = 15$ м, $w_r = 10$ м/с^2, $\omega = 1$ рад/с, в момент $t = 0$ относительная скорость точки v_r равна нулю.

Ответ. $w = 14{,}14$ м/с^2.

23.51(23.51). Полагая в задаче 23.49, что конус вращается вокруг своей оси равноускоренно с угловым ускорением ε, определить величину абсолютного ускорения w точки M в момент $t = 2$ с при следующих данных: $\alpha = 30°$, $a = 0{,}2$ м, $v_r = 0{,}3$ м/с, $\varepsilon = 0{,}5$ рад/с^2, в момент $t = 0$ угловая скорость ω равна нулю.

Ответ. $w = 0{,}64$ м/с^2.

23.52(23.52). Река ширины 500 м течет с юга на север со скоростью 1,5 м/с. Определить кориолисово ускорение w_c частиц воды, находящихся на 60° северной широты. Определить затем, у какого берега вода выше и насколько, если известно, что поверхность воды должна быть перпендикулярна направлению вектора, составленного из ускорения силы тяжести g и вектора, равного и противоположного кориолисову ускорению.



К задаче 23.52

Ответ. Кориолисово ускорение w_c ($w_c = 1{,}89\cdot10^{-4}$ м/с^2) направлено к западу. Вода выше у правого берега на 0,0096 м.

23.53(23.53). Магистраль южных железных дорог к северу от Мелитополя идет прямо по меридиану. Тепловоз движется со скоростью $v = 90$ км/ч на север, широта места $\varphi = 47°$. Найти кориолисово ускорение тепловоза.

Ответ. $w_c = 2{,}66\cdot10^{-3}$ м/с^2.

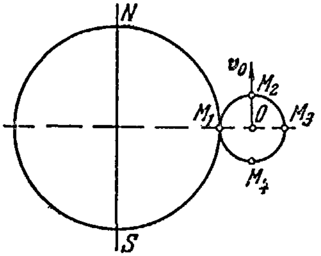
23.54(23.54). По железнодорожному пути, проложенному по параллели северной широты, движется тепловоз со скоростью $v_r = 20$ м/с с запада на восток. Найти кориолисово ускорение w_c тепловоза.

Ответ. $w_c = 2{,}91\cdot10^{-3}$ м/с^2.

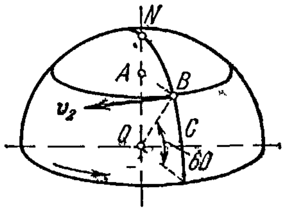
23.55(23.55). Определить кориолисово ускорение точек M_1, M_2, M_3, M_4 колеса электровоза, движущегося по меридиану, в момент пересечения экватора. Скорость центра колеса электровоза $v_0 = 40$ м/с.

Ответ. Для точек M_1 и M_3 $w_c = 0$, для точек M_2 и M_4 $w_c = 5{,}81\cdot 10^{-3}$ м/с².

23.56(23.56). Река Нева течет с востока на запад по параллели 60° северной широты со скоростью $v_r = 1{,}11$ м/с. Определить сумму проекций на касательную BC к соответствующему меридиану



К задаче 23.55



К задаче 23.56

тех составляющих ускорений частиц воды, которые зависят от скорости течения. Радиус Земли $R = 64\cdot 10^5$ м.

Ответ. $w_{BC} = 1{,}395\cdot 10^{-4}$ м/с².

23.57(23.57). Река Нева течет с востока на запад по параллели 60° северной широты со скоростью $v_r = 1{,}11$ м/с. Найти составляющие абсолютного ускорения частицы воды. Радиус Земли $R = 64\cdot 10^5$ м.

Ответ. $w_e = 1{,}692\cdot 10^{-2}$ м/с², $w_r = 3{,}86\cdot 10^{-7}$ м/с², $w_c = 1{,}616\times$ $\times 10^{-4}$ м/с².

23.58(23.58). Найти абсолютное ускорение шаров центробежного регулятора Уатта, если он вращается вокруг своей вертикальной оси, имея в данный момент угловую скорость $\omega = \pi/2$ рад/с при угловом ускорении $\varepsilon = 1$ рад/с², угловая скорость расхождения шаров $\omega_1 = \pi/2$ рад/с при угловом ускорении $\varepsilon_1 = 0{,}4$ рад/с². Длина рукояток шаров $l = 0{,}5$ м, расстояние между осями их привеса $2e = 0{,}1$ м, угол раствора регулятора в рассматриваемый момент $2\alpha = 90°$. Размерами шаров пренебречь, принимая шары за точки. (См. рисунок к задаче 22.14.)

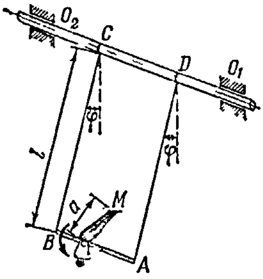
Ответ. $w = 2{,}937$ м/с².

23.59(23.59). Найти абсолютное ускорение шаров центробежного регулятора Уатта, если после изменения нагрузки машины регулятор начал вращаться с угловой скоростью $\omega = \pi$ рад/с, причем шары продолжают опускаться в данный момент со скоростью $v_r = 1$ м/с и касательным ускорением $w_{r\tau} = 0{,}1$ м/с². Угол раствора регулятора $2\alpha = 60°$, длина рукояток шаров $l = 0{,}5$ м, расстоянием $2e$ между их осями привеса можно пренебречь. Шары принять за точки. (См. рисунок к задаче 22.14.)

Ответ. $w = 6{,}71$ м/с².

23.60(23.60). Воздушная трапеция $ABCD$ совершает качания вокруг горизонтальной оси O_1O_2 по закону $\varphi = \varphi_0 \sin\omega t$. Гимнаст, выполняющий упражнение на перекладине AB, вращается вокруг нее с относительной угловой скоростью $\omega = \mathrm{const}$, дано $BC =$

$= AD = l$. Определить абсолютное ускорение точки M на подошве гимнаста, отстоящей от перекладины AB на расстоянии a в момент $t = \pi/\omega$ с. В начальный момент гимнаст был расположен вертикально, головой вверх; трапеция $ABCD$ занимала вертикальное нижнее положение.



К задаче 23.60

Ответ: w_M ($w_M = \omega^2[\varphi_0^2(l-a) - a(2\varphi_0 + 1)]$) направлено вертикально вверх, если выражение в квадратных скобках положительно.

23.61(23.61). Точка движется по радиусу диска согласно уравнению $r = ae^{kt}$, где a, k — постоянные величины. Диск вращается вокруг оси, перпендикулярной его плоскости и проходящей через центр, согласно уравнению $\varphi = kt$. Определить абсолютную скорость, абсолютное ускорение, касательное и нормальное ускорения точки.

Ответ: $v = ake^{kt}\sqrt{2}$, $\omega = 2ak^2e^{kt}$, $w_\tau = ak^2e^{kt}\sqrt{2}$, $w_n = ak^2e^{kt}\sqrt{2}$.

23.62(23.62). Точка M движется по поверхности Земли; курс движения k (угол между направлением на север и скоростью v точки относительно Земли), широта места в данный момент равна φ. Определить восточную w_{cx}, северную w_{cy} и вертикальную w_{cz} составляющие кориолисова ускорения точки.

Ответ: $w_{cx} = -2v\omega \cos k \sin\varphi$, $w_{cy} = 2v\omega \sin k \sin\varphi$, $w_{cz} = -2v\omega \sin k \cos\varphi$, где ω — угловая скорость вращения Земли.

23.63(23.63). В условиях предыдущей задачи определить величину и направление горизонтальной составляющей кориолисова ускорения точки M.

Ответ: $w_{cH} = 2v\omega \sin\varphi$, горизонтальная составляющая перпендикулярна скорости v точки M относительно Земли и направлена влево от нее в северном полушарии и вправо в южном полушарии.

23.64(23.64). Высота точки M над поверхностью Земли равна h, широта места φ. Определить восточную w_{ex}, северную w_{ey} и вертикальную w_{ez} составляющие переносного ускорения точки, обусловленного вращением Земли (R — ее радиус, ω — угловая скорость).

Ответ: $w_{ex} = 0$, $w_{ey} = (R + h)\omega^2 \sin\varphi \cos\varphi$,
$w_{ez} = -(R + h)\omega^2 \cos^2\varphi$.

23.65(23.65). Восточная, северная и вертикальная проекции скорости точки M относительно Земли соответственно равны v_E, v_N и v_h. Определить проекции относительного ускорения точки на координатные оси x, y, z (ось x направлена на восток, ось y — на север, ось z — по вертикали), если высота ее над поверхностью Земли в данный момент равна h, а широта места φ (R и ω — радиус и угловая скорость Земли).

Ответ: $w_{rx} = \dot{v}_E - \frac{v_E v_V}{R+h}\operatorname{tg}\varphi + \frac{v_F v_h}{R+h}$ $w_{ry} = \dot{v}_V + \frac{v_E^2}{R+h}\operatorname{tg}\varphi + \frac{v_V v_h}{R+h}$, $w_{rz} = v_h - \frac{v_E^2 + v_N^2}{R+h}$

23.66(23.66). В условиях предыдущей задачи определить составляющие абсолютного ускорения точки M, движущейся вблизи Земли.

Ответ: $w_x = \dot{v}_E - \frac{v_F v_N}{R+h}\operatorname{tg}\varphi + \frac{v_E v_h}{R+h} - 2(v_V \sin\varphi - v_h \cos\varphi)\omega$;

$$w_y = v_N + \frac{v_F^2}{R+h}\operatorname{tg}\varphi + \frac{v_V v_h}{R+h} + (R+h)\omega^2 \sin\varphi\cos\varphi + 2v_E\omega\sin\varphi,$$

$$w_z = v_h - \frac{v_E^2 + v_N^2}{R+h} - (R+h)\omega^2\cos^2\varphi - 2v_E\omega\cos\varphi.$$

23.67. Кривошипно-кулисный механизм приводного молота состоит из прямолинейной кулисы, совершающей возвратно поступательное движение Кулиса приводится в движение камнем A, соединенным с концом кривошипа $OA = r = 0,4$ м, который вращается равномерно с угловой скоростью, равной 4π рад/с При $t = 0$ кулиса занимает нижнее положение Найти ускорение кулисы

Ответ $w = 63,2 \cos 4\pi t$ м/с^2

23.68. Кривошип $OA = r = 0,5$ м, приводящий в движение прямолинейную кулису, которая совершает возвратно-поступательное движение, в момент, когда $\angle xOA = 60°$, имеет угловую скорость $\omega = 1$ рад/с и угловое ускорение $\varepsilon = \pm 1$ рад/с^2 Найти ускорение кулисы в указанный момент для двух случаев· 1) когда $\varepsilon > 0$ и 2) когда $\varepsilon < 0$

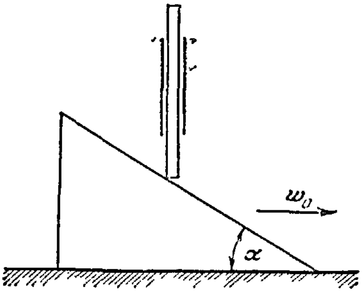
Ответ $w_1 = 0,683$ м/с^2, $w_2 = 0,183$ м/с^2

23.69. Поступательно движущийся кулак имеет форму полудиска, скользящего по направлению своего диаметра AB с постоянной скоростью v_0 Определить ускорение движения стержня, опирающегося на кулак, перпендикулярного его диаметру AB и свободно скользящего в прорези державки. Радиус ролика равен ρ В начальный момент стержень находится в верхнем положении

Ответ. $\omega = \frac{v_0^2 (r+\rho)^2}{\left[(r+\rho)^2 - v_0^2 t^2\right]^{3/2}}$

23.70. На токарном станке обтачивается цилиндр диаметра 80 мм. Шпиндель делает 30 об/мин. Скорость продольной подачи постоянна и равна 0,2 мм/с. Определить скорость и ускорение резца относительно обрабатываемого цилиндра.

Ответ: $v_r = 125,7$ мм/с, $w_e = 789,5$ мм/с^2, $w_r = w_c = 394,8$ мм/с^2.



К задаче 23.71

23.71. Стержень скользит в вертикальных направляющих, опираясь нижним концом на гладкую наклонную поверхность треугольной призмы. Призма движется по горизонтали вправо с постоянным ускорением w_0 Найти ускорение стержня.

Ответ. $w = w_0 \operatorname{tg}\alpha$

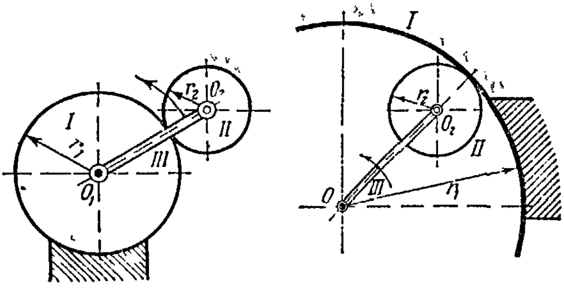
ГЛАВА VIII

СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

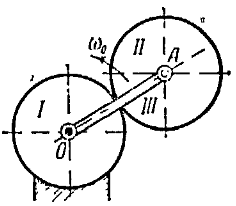
§ 24. Сложение движений тела

а) Сложение плоских движений тела

24.1(24.1). Кривошип *III* соединяет оси O_1 и O_2 двух зубчатых колес *I* и *II*, причем зацепление может быть или внешнее, или внутреннее, как указано на рисунке, колесо *I* остается неподвижным, а кривошип *III* вращается вокруг оси O_1 с угловой скоростью ω_3



К задаче 24.1



К задаче 24.2

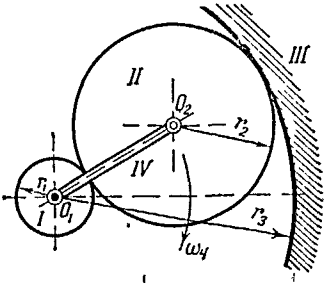
Зная радиусы колес r_1 и r_2, вычислить для колеса *II* его абсолютную угловую скорость ω_2 и его относительную угловую скорость ω_{23} по отношению к кривошипу

Ответ: Внешнее зацепление: $\omega_2 = \omega_3 \frac{r_1 + r_2}{r_2}$, $\omega_{23} = \omega_3 \frac{r_1}{r_2}$. Внутреннее зацепление: $\omega_2 = -\omega_3 \frac{r_1 - r_2}{r_2}$, $\omega_{23} = -\omega_3 \frac{r_1}{r_2}$. Знак минус указывает на то, что соответствующие тела вращаются в противоположные стороны

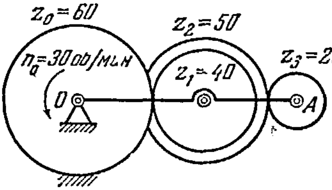
24.2(24.2). Найти относительную и абсолютную угловые скорости зубчатого колеса *II* радиуса r, катящегося по неподвижному зубчатому колесу *I* с тем же радиусом и приводящегося в движение кривошипом *III*, вращающимся вокруг оси неподвижного колеса O с угловой скоростью ω_0, движение кривошипа OA принять за переносное

Ответ $\omega_{23} = \omega_0$, $\omega_2 = 2\omega_0$

24.3(24.3). Зацепление, приводящее в быстрое вращение точильный камень, устроено следующим образом стержень *IV* посредством особой ручки приводится во вращение вокруг оси O_1 с угловой скоростью ω_4; на конце стержня O_2 находится палец, на который свободно надето колесо *II* радиуса r_2. При вращении ручки палец заставляет колесо *II* катиться без скольжения по наружному неподвижному кругу *III* радиуса r_3. При этом, благодаря трению, колесо *II* вращает без скольжения колесо *I* радиуса r_1, свободно насаженное на ось O_1 и неизменно связанное с осью точила.



К задаче 24.3



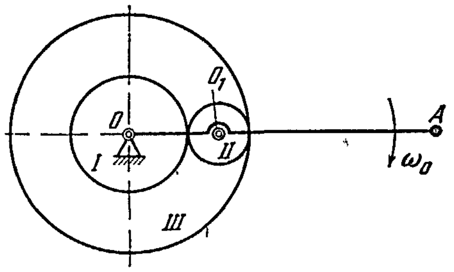
К задаче 24.4

По данному радиусу r_3 наружной неподвижной обоймы найти такое значение r_1, чтобы было $\omega_1/\omega_4 = 12$, т. е. чтобы точило вращалось в 12 раз быстрее приводящей его в движение ручки.

Ответ. $r_1 = \frac{1}{11} r_3$.

24.4(24.4). Найти число оборотов в минуту шестерни с числом зубцов $z_3 = 25$, если кривошип *OA* вращается вокруг оси *O* неподвижной шестерни (с числом зубцов $z_0 = 60$) с угловой скоростью, соответствующей $n_0 = 30$ об/мин, и несет на себе ось двойной шестерни с числами зубцов $z_1 = 40$, $z_2 = 50$.

Ответ: $n_3 = n_0\left(1 - \frac{z_0 z_2}{z_1 z_3}\right) = -60$ об/мин (в отношении знака минус см. ответ к задаче 24.1).



К задаче 24.5

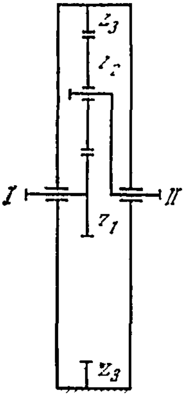
24.5(24.5). В эпициклическом механизме, применяемом в конных приводах молотилок, водило *OA* и колесо *I* радиуса r_1 насажены на вал *O* свободно, ось O_1 колеса *II* укреплена на водиле, а колесо *III* радиуса r_3 может свободно вращаться вокруг оси *O*. Определить угловую скорость ω_1 колеса *I*, если водилу *OA* сообщена угловая скорость ω_0, а колесу *III* от другого двигателя (тоже конного) сообщена угловая скорость ω_3 противоположного направления.

Ответ: $\omega_1 = \omega_0\left(1 + \frac{r_3}{r_1}\right) + \frac{r_3}{r_1}|\omega_3|$

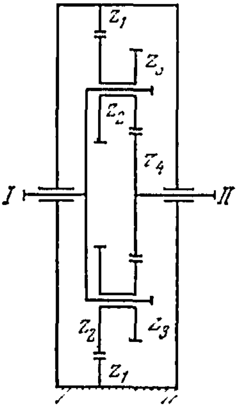
24.6(24.6). Редуктор скоростей состоит из трех зубчатых колес. Первое колесо (число зубцов $z_1 = 20$) насажено на ведущий вал *I*, делающий $n_1 = 1500$ об/мин, второе ($z_2 = 25$) свободно насажено на ось, жестко связанную с ведомым валом *II*, третье колесо ($z_3 = 70$) с внутренним зацеплением неподвижно. Найти число оборотов в минуту ведомого вала и бегающего колеса.

Ответ: $n_{II} = 1000$ об/мин, $n_2 = -1800$ об/мин.

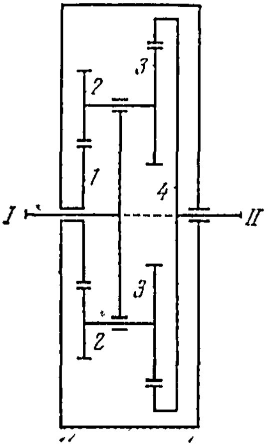
24.7(24.7). Ведущий вал *I* редуктора делает $n_1 = 1200$ об/мин. Найти число оборотов в минуту ведомого вала *II*, если неподвижное зубчатое колесо с внутренним зацеплением имеет $z_1 = 180$ зубцов; бегающие шестеренки, спаренные между собой, имеют $z_2 = 60$ и $z_3 = 40$ зубцов; шестеренка, закрепленная на ведомом валу, имеет $z_4 = 80$ зубцов.



К задаче 24.6



К задаче 24.7

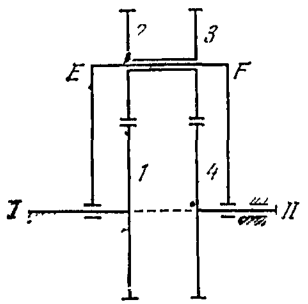


К задаче 24.8

Ответ: $n_{II} = 3000$ об/мин.

24.8(24.8). Редуктор скоростей состоит из неподвижной шестеренки радиуса $r_1 = 40$ см, двух бегающих шестеренок радиусов $r_2 = 20$ см и $r_3 = 30$ см, спаренных между собой, и шестеренки с внутренним зацеплением радиуса $r_4 = 90$ см, сидящей на ведомом валу. Ведущий вал и кривошип, несущий оси бегающих шестеренок, делают $n_1 = 1800$ об/мин. Найти число оборотов в минуту ведомого вала.

Ответ: $n_{II} = 3000$ об/мин.

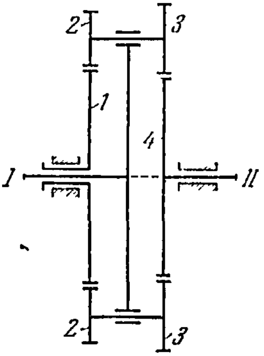


К задаче 24.9

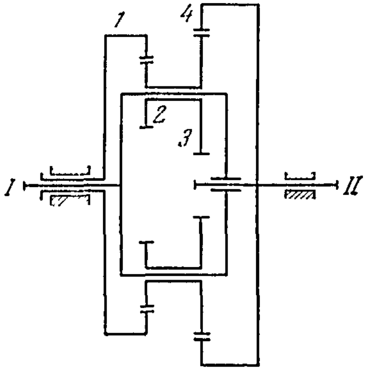
24.9(24.9). Редуктор скоростей с планетарной передачей состоит из неподвижного солнечного колеса *1*, жестко связанного с валом *I*, рамки, свободно вращающейся вокруг осей *I* и *II* с угловой скоростью Ω, двух шестеренок *2* и *3*, жестко связанных между собой и свободно насаженных на ось *EF*, вращающуюся вместе с рамкой, и ведомой шестерни *4*, жестко связанной с валом *II*. Определить отношение угловой скорости вала *II* к угловой скорости рамки, если шестеренки имеют следующее число зубцов. $z_1 = 49$, $z_2 = 50$, $z_3 = 51$, $z_4 = 50$

Ответ: $\frac{\omega_{II}}{\Omega} = \frac{1}{2500}$

24.10(24.10). Найти угловую скорость ω_{II} ведомого вала редуктора с дифференциальной передачей, если ведущий вал с кривошипом, несущим на себе передаточные шестеренки, спаренные между собой, вращается с угловой скоростью $\omega_I = 120$ рад/с. Колесо *1* вращается с угловой скоростью $\omega_1 = 180$ рад/с и имеет число зубцов $z_1 = 80$, бегающие колеса имеют числа зубцов: $z_2 = 20$, $z_3 = 40$, а колесо, сидящее на ведомом валу, имеет $z_4 = 60$ зубцов Колесо *1* и ведущий вал вращаются в одном направлении



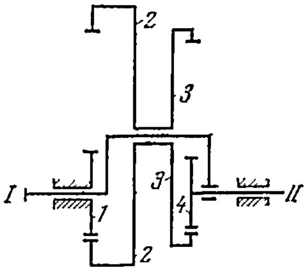
К задаче 24.10



К задаче 24.11

Ответ $\omega_{II} = 280$ рад/с

24.11(24.11). Редуктор скоростей с дифференциальной передачей состоит из четырех зубчатых колес, из которых первое — с внутренним зацеплением — делает 160 об/мин и имеет $z_1 = 70$ зубцов, второе и третье спарены между собой и сидят на оси, вращающейся вокруг оси ведущего вала *I* вместе с последним, делая $n_1 = 1200$ об/мин, числа зубцов $z_2 = 20$, $z_3 = 30$, четвертое — с внутренним зацеплением — имеет $z_4 = 80$ зубцов и заклинено на ведомом валу Найти число оборотов в минуту ведомого вала, если вал *I* и колесо *1* вращаются в противоположных направлениях.



К задаче 24.12

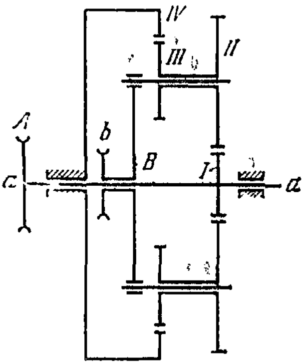
Ответ $n_{II} = 585$ об/мин

24.12(24.12). Редуктор скоростей имеет неподвижную шестеренку *1*, спаренные между собой подвижные шестеренки *2* и *3* с внутренним зацеплением и шестерню *4*, заклиненную на ведомом валу. Найти число оборотов в минуту ведомого вала, если числа зубцов равны $z_1 = 3$, $z_2 = 80$, $z_3 = 70$, $z_4 = 20$; ведущий вал вращается с угловой скоростью, соответствующей $n_I = 1200$ об/мин.

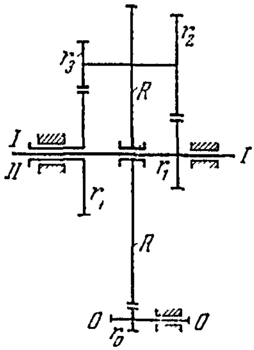
Ответ. $n_{II} = -375$ об/мин

24.13(24.13). В блоке системы «Триплекс» на валу $a - a$ жестко насажен цепной блок A; на тот же вал свободно насажена втулка b с подъемной цепью и грузом, наглухо соединенная с рукояткой B. На каждый палец рукоятки свободно насажены две шестерни II и III, спаренные между собой, шестерни II сцеплены с шестерней I, заклиненной на валу $a - a$, шестеренки III сцеплены с неподвижным зубчатым колесом IV. Определить отношение угловых скоростей вращения вала $a - a$ и втулки b, если числа зубцов колес I, II, III и IV соответственно равны $z_1 = 12$, $z_2 = 28$, $z_3 = 14$, $z_4 = 54$.

Ответ $\omega_a/\omega_b = 10$.



К задаче 24.13



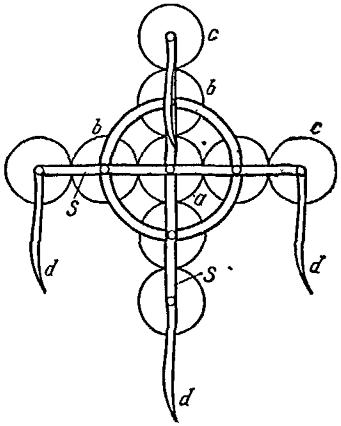
К задаче 24.14

24.14(24.14). В цилиндрическом дифференциале зубчатое колесо радиуса R свободно насажено на вал $I - I$ и несет на себе шестерни радиусов r_2 и r_3, спаренные друг с другом. Колесо R приводится в движение шестеренкой радиуса r_0. Шестеренки радиусов r_2 и r_3 зацепляются с шестеренками радиусов r_1 и r_4, заклиненными соответственно на валах $I - I$ и II, из которых последний выполнен в виде втулки. Найти угловую скорость вала II, если известны угловые скорости вращения n_1 и n_0 валов $I - I$ и $O - O$, причем эти валы вращаются по одну сторону.

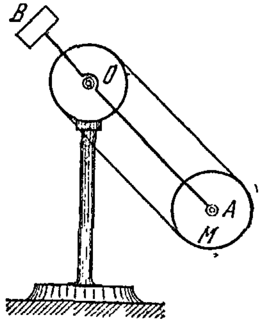
Ответ $n_2 = \left(n_1 + n_0\frac{r_0}{R}\right)\frac{r_1 r_3}{r_2 r_4} - n_0\frac{r_0}{R}$.

24.15(24.15). В планетарном приводе картофелекопателя центральная шестеренка a, совершающая поступательное прямолинейное равномерное движение вместе со своей осью, соединена при помощи паразитных шестеренок b с подвижными шестеренками c, к втулкам которых прикреплены крылья d, оси шестеренок b и c насажены на водило S, вращающееся вокруг оси центральной шестеренки a с угловой скоростью ω_0. Определить абсолютную угловую скорость шестеренок, а также характер движения крыльев, если радиусы всех шестеренок одинаковы

Ответ. $\omega \equiv 0$, крылья совершают поступательное циклоидальное движение вместе с центрами шестеренок c.



К задаче 24.15

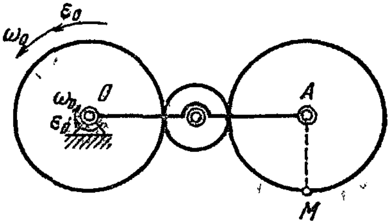


К задаче 24.16

24.16(24.16). Кривошип OA с противовесом B вращается с угловой скоростью $\omega_0 = \text{const}$ вокруг оси O неподвижной шестеренки и несет на конце A ось другой шестеренки того же размера, соединенной с цепью Определить угловую скорость и угловое ускорение подвижной шестеренки, а также скорость и ускорение произвольной ее точки M, если длина кривошипа $OA = l$

Ответ. $\omega = 0$, $\varepsilon = 0$ — шестеренка совершает круговое поступательное движение вместе с центром A; $v_M = v_A = l\omega$, $w_M = w_A = l\omega_0^2$.

24.17(24.17). В эпициклической передаче ведущая шестерня радиуса R вращается против часовой стрелки с угловой скоростью ω_0 и угловым ускорением ε_0, кривошип длины $3R$ вращается вокруг ее оси по часовой стрелке с той же угловой скоростью и тем же угловым ускорением Найти скорость и ускорение точки M ведомой шестерни радиуса R, лежащей на конце диаметра, перпендикулярного в данный момент кривошипу



К задаче 24.17

Ответ: $v = R\omega_0\sqrt{10}$, $w = R\sqrt{10(\varepsilon_0^2 + \omega_0^4) - 12\omega_0^2\varepsilon_0}$

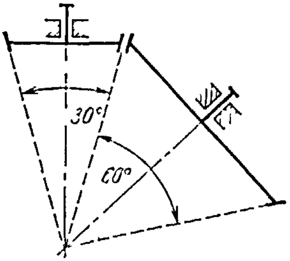
б) Сложение пространственных движений тела

24.18(25.1). Даны два конических зубчатых колеса, оси которых неподвижны, а соответственные углы равны α и β Первое колесо вращается с угловой скоростью ω_1. Определить угловую скорость ω_2 второго колеса и вычислить ее в том случае, когда $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$, $\omega_1 = 10$ об/мин

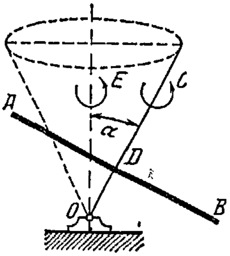
Ответ. $\omega_2 = \omega_1 \dfrac{\sin(\alpha/2)}{\sin(\beta/2)} = 5{,}16$ об/мин

24.19(25.2) Карусель представляет собой круглую площадку AB, которая вращается вокруг оси OC, проходящей через ее центр D, делая 6 об/мин, а ось OC вращается в том же направлении вокруг вертикали OE и делает 10 об/мин Угол между осями $\alpha = 20°$, диаметр площадки AB равен 10 м, расстояние OD равно 2 м Определить скорость v точки B в тот момент, когда она занимает самое низкое положение.

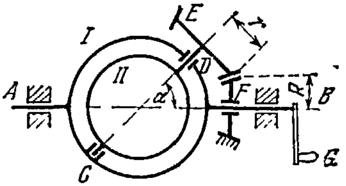
Ответ. $v = 8{,}77$ м/с.



К задаче 24.18

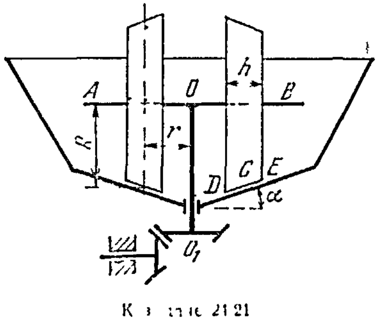


К задаче 24.19



К задаче 24.20

24.20(25.3). Шаровая дробилка состоит из полого шара II (в котором находятся шары и вещество, подвергающееся дроблению), сидящего на оси CD, на которой заклинено коническое зубчатое колесо E радиуса r Ось CD сидит в подшипниках в раме I, составляющей одно целое с осью AB и приводящейся во вращение при помощи рукоятки G. Колесо E сцепляется с неподвижным колесом I радиуса R Определить абсолютную угловую скорость шаровой дробилки, если рукоятка вращается с угловой скоростью ω_0, угол между осями AB и CD равен α Определить также абсолютное угловое ускорение шаровой дробилки, если угловая скорость рукоятки $\omega_0 = \mathrm{const}$



К задаче 24.21

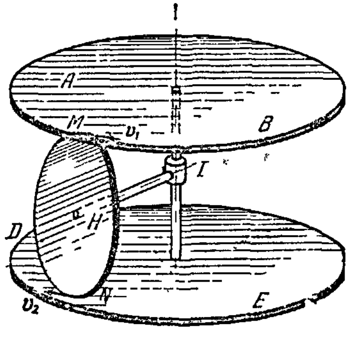
Ответ

$$\omega_A = \frac{\omega_0}{r}\sqrt{r^2 + R^2 + 2rR\cos\alpha},$$

$$\varepsilon = \omega_0^2 \frac{R}{r}\sin\alpha.$$

24.21(25.4). Для растирания руды применяются бегуны в виде чугунных колес со стальными ободьями, катящимися по дну конической чаши Бегуны вращаются вокруг горизонтальной оси AOB, которая в свою очередь вращается вокруг вертикальной оси OO_1, составляющей с осью AOB одно целое Найти абсолютные скорости точек D и E обода бегуна, принимая, что мгновенная ось вращения бегуна проходит через середину C линии касания обода бегуна с дном чаши. Скорость вращения вокруг вертикальной оси $\omega_e = 1$ рад/с, ширина бегуна $h=0{,}5$ м. Средний радиус бегуна $R = 1$ м, средний радиус вращения $r = 0{,}6$ м, $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}2$.

Ответ. $v_D = v_E = 0{,}28$ м/с.



К задаче 24.22

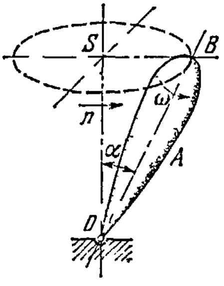
24.22(25.5). Дифференциальная передача состоит из двух дисков AB и DE, центры которых находятся на их общей оси вращения; эти диски сжимают колесо MN, ось которого HI перпендикулярна оси дисков. Определить для колеса MN скорость v центра H и угловую скорость ω_r вращения вокруг оси HI, если скорости точек касания колеса с дисками равны $v_1 = 3$ м/с, $v_2 = 4$ м/с, радиус колеса $r = 0{,}05$ м.

Ответ. $v = 0{,}5$ м/с, $\omega_r = 70$ рад/с.

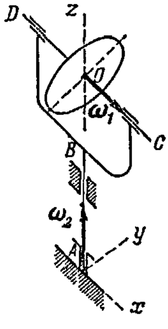
24.23(25.6). Сохранив условия предыдущей задачи и зная длину $HI = \frac{1}{11}$ м, определить абсолютную угловую скорость и абсолютное угловое ускорение колеса MN.

Ответ: $\omega = \sqrt{4949}$ рад/с, $\varepsilon = 490$ рад/с^2.

24.24(25.7). Волчок A вращается относительно своей оси симметрии OB с постоянной угловой скоростью ω_1 рад/с. Ось OB описывает равномерно конус. За одну минуту вершина волчка B делает n оборотов, $\angle BOS = \alpha$. Найти угловую скорость ω и угловое ускорение ε волчка.



К задаче 24.24



К задаче 24.25

Ответ: $\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \left(\frac{\pi n}{30}\right)^2 + 2\omega_1 \frac{\pi n}{30}\cos\alpha}$, $\varepsilon = \omega_1 \frac{\pi n}{30}\sin\alpha$.

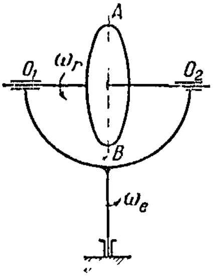
24.25(25.8). Круглый диск вращается с угловой скоростью ω_1 вокруг горизонтальной оси CD, одновременно ось CD вращается вокруг вертикальной оси AB, проходящей через центр O диска, с угловой скоростью ω_2. Вычислить величину и направление мгновенной угловой скорости ω и мгновенного углового ускорения ε диска, если $\omega_1 = 5$ рад/с, $\omega_2 = 3$ рад/с.

Ответ. ω ($\omega = 5{,}83$ рад/с) составляет углы $\alpha = 30°58'$ и $\beta = 59°2'$ с положительными направлениями осей x и z; ε ($\varepsilon = 15$ рад/с^2) направлено по оси y.

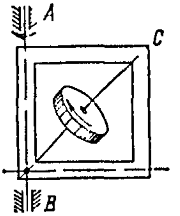
24.26(25.9). Диск радиуса R вращается с постоянной угловой скоростью ω_r вокруг горизонтальной оси O_1O_2, которая в свою очередь вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси Найти скорости и ускорения точек A и B, лежащих на концах вертикального диаметра диска.

Ответ: $v_A = v_B = R\omega_r$, $w_A = w_B = R\omega_r\sqrt{4\omega_e^2 + \omega_r^2}$

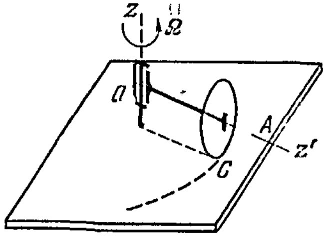
24.27(25.10). Квадратная рама вращается вокруг оси AB, делая 2 об/мин Вокруг оси BC, совпадающей с диагональю рамы,



К задаче 24.26



К задаче 24.27



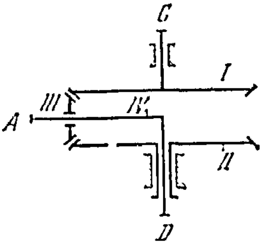
К задаче 24.28

вращается диск, делая 2 об/мин Определить абсолютную угловую скорость и угловое ускорение диска

Ответ $\omega = 0{,}39$ рад/с, $\varepsilon = 0{,}031$ рад/с^2

24.28(25.11). Ось мельничного бегуна OA вращается равномерно вокруг вертикальной оси Oz с угловой скоростью Ω Длина оси $OA = R$, радиус бегуна $AC = r$ Считая, что в данный момент точка C бегуна имеет скорость, равную нулю, определить угловую скорость бегуна ω, направление мгновенной оси, подвижный и неподвижный аксоиды

Ответ. $\omega = \dfrac{\sqrt{R^2 + r^2}}{r}\,\Omega$, мгновенная ось — прямая OC; аксоиды — конусы с вершиной в точке O, подвижный — с углом $z'OC$ при вершине, равным $\operatorname{arctg}(r/R)$, неподвижный — с углом zOC, равным $\pi - \operatorname{arctg}(R/r)$.



К задаче 24.29

24.29(25.12). Дифференциальная передача состоит из конического зубчатого колеса III (сателлита), насаженного свободно на кривошип IV, который может вращаться вокруг неподвижной оси CD Сателлит соединен с коническими зубчатыми колесами I и II, вращающимися вокруг той же оси CD с угловыми скоростями $\omega_1 = 5$ рад/с и $\omega_2 = 3$ рад/с, причем вращения происходят в одну сторону. Радиус сателлита $r = 2$ см, а радиусы колес I и II одинаковы и равны $R = 7$ см Определить угловую скорость ω_4 кривошипа IV, угловую скорость ω_{34} сателлита по отношению к кривошипу и скорость точки A.

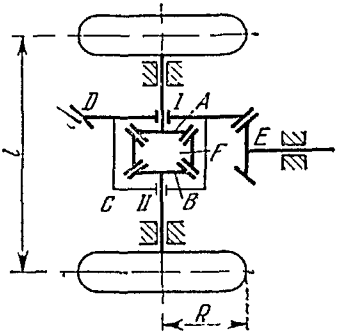
Ответ: $v_A = 0{,}28$ м/с, $\omega_4 = 4$ рад/с, $\omega_{34} = 3{,}5$ рад/с.

24.30(25.13). В дифференциальном механизме, рассмотренном в предыдущей задаче, конические зубчатые колеса *I* и *II* вращаются в разные стороны с угловыми скоростями $\omega_1 = 7$ рад/с, $\omega_2 = 3$ рад/с. Определить v_A, ω_4 и ω_{34}, если $R = 5$ см, $r = 2{,}5$ см.

Ответ. $v_A = 0{,}1$ м/с, $\omega_4 = 2$ рад/с, $\omega_{34} = 10$ рад/с.

24.31(25.14). При движении автомобиля по закругленному пути внешние колеса автомобиля, проходя больший путь, должны вращаться быстрее внутренних колес, проходящих меньший путь. Во избежание поломки задней ведущей оси автомобиля применяется зубчатая передача, называемая дифференциальной и имеющая следующее устройство.

Задняя ось, несущая два колеса, делается из двух отдельных частей *I* и *II*, на концах которых наглухо насажены два одинаковых зубчатых колеса *A* и *B*. На этих частях вала в подшипниках вращается коробка *C* с коническим колесом *D*, наглухо с ней соединенным. Коробка получает вращение от главного (продольного) вала, приводимого в движение мотором, через посредство зубчатки *E*.

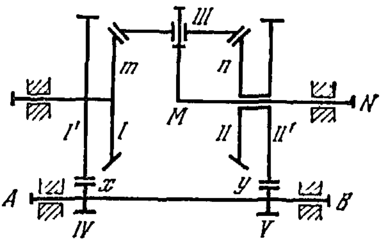


К задаче 24.31

Вращение коробки *C* передается зубчатым колесам *A* и *B* при помощи двух конических шестеренок *F* (сателлитов), свободно вращающихся вокруг осей, укрепленных в коробке перпендикулярно к задней оси *I* — *II* автомобиля.

Найти угловые скорости задних колес автомобиля в зависимости от угловой скорости вращения коробки *C* и угловую скорость ω_r сателлитов по отношению к коробке, если автомобиль движется со скоростью $v = 36$ км/ч по закруглению среднего радиуса $\rho = 5$ м, радиусы колес задней оси $R = 0{,}5$ м, расстояние между ними $l = 2$ м. Радиусы зубчатых колес *A* и *B* вдвое больше радиусов сателлитов $R_0 = 2r$.

Ответ $\omega_1 = 21$ рад/с, $\omega_2 = 16$ рад/с, $\omega_r = 8$ рад/с



К задаче 24.32

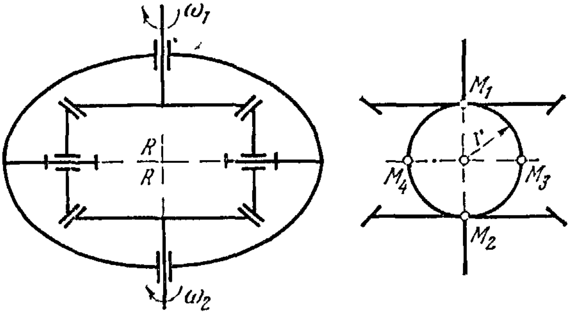
24.32(25.15). При применении дифференциального зацепления для получения назначенного отношения чисел оборотов осей *AB* и *MN* к коническим колесам *I* и *II* дифференциального зацепления присоединяют наглухо цилиндрические зубчатые колеса *I'* и *II''*, которые сцепляются с шестеренками *IV* и *V*, насаженными наглухо на ось *AB*. Найти соотношение между угловыми скоростями ω_0 и ω валов *AB* и *MN*, если радиусы колес *I* и *II* одинаковы, числа зубцов колес *I'*, *II''*, *IV* и *V* соответственно равны *m*, *n*, *x*, *y*.

Ответ: $\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{m} + \frac{y}{n}\right)$.

24.33(25.16). В дифференциальной передаче, рассмотренной в предыдущей задаче, между зубчатыми колесами *I'* и *IV* введено паразитное колесо с неподвижной осью вращения. Требуется найти соотношение между угловыми скоростями ω_0 и ω валов *AB* и *MN*, сохраняя все остальные условия задачи.

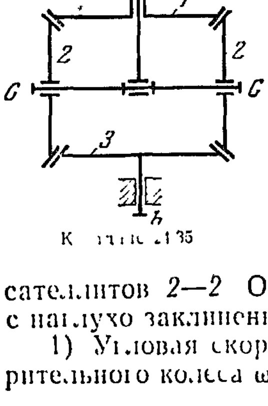
Ответ: $\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{m} - \frac{y}{n}\right)$.

24.34(25.17). Дифференциальная передача, соединяющая обе половины задней оси автомобиля, состоит из двух шестеренок с одинаковыми радиусами $R = 6$ см, насаженных на полуоси, вращающиеся при движении автомобиля на повороте с разными, но постоянными по величине угловыми скоростями $\omega_1 = 6$ рад/с и $\omega_2 = 4$ рад/с одинакового направления. Между шестеренками зажат бегущий сателлит радиуса $r = 3$ см, свободно насаженный на ось. Ось сателлита жестко заделана в кожухе и может вращаться вместе с ним вокруг задней оси автомобиля. Найти относительно корпуса автомобиля ускорения четырех точек M_1, M_2, M_3 и M_4 сателлита, лежащих на концах двух диаметров, как показано на рисунке.



К задаче 24.34

Ответ. $w_1 = 2{,}1$ м/с², $w_2 = 0{,}91$ м/с², $w_3 = w_4 = 1{,}73$ м/с².



К задаче 24.35

24.35(25.18). В дифференциале зуборезного станка ускорительное колесо *4* сидит на ведущем валу *a* свободно, вместе со скрепленным с ним жестко колесом *1*. На конце ведущего вала *a* сидит головка, несущая ось *CC* сателлитов *2—2*. Определить угловую скорость ведомого вала *b* с наглухо заклиненным колесом *3* в пяти случаях:

1) Угловая скорость ведущего вала ω_a, угловая скорость ускорительного колеса $\omega_4 = 0$.

2) Угловая скорость ведущего вала ω_a, ускорительное колесо вращается в ту же сторону, что и ведущий вал, с угловой скоростью ω_4.

3) Ускорительное колесо и ведущий вал вращаются в одну и ту же сторону с равными угловыми скоростями $\omega_4 = \omega_a$

4) Ускорительное колесо и ведущий вал вращаются в одну и ту же сторону, причем $\omega_4 = 2\omega_a$

5) Угловая скорость ведущего вала ω_a, ускорительное колесо вращается в противоположную сторону с угловой скоростью ω_4.

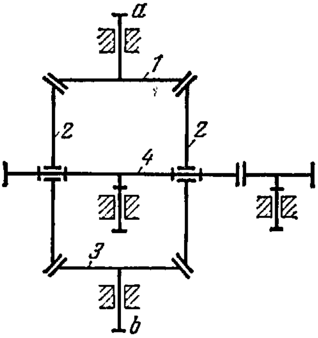
Ответ. 1) $\omega_b = 2\omega_a$; 2) $\omega_b = 2\omega_a - \omega_4$; 3) $\omega_b = \omega_a$; 4) $\omega_b = 0$; 5) $\omega_b = 2\omega_a + \omega_4$

24.36(25.19). В дифференциале зуборезного станка, описанном в предыдущей задаче, угловая скорость ведущего вала $\omega_a = 60$ об/мин Определить, какова должна быть угловая скорость ускорительного колеса, чтобы ведомый вал был неподвижен

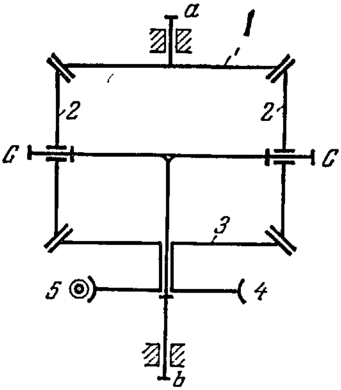
Ответ $\omega_4 = 120$ об/мин

24.37(25.20). В дифференциале зуборезного станка ускорительное колесо *4* несет на себе ось сателлитов Угловая скорость ведущего вала ω_a Определить угловую скорость ведомого вала в следующих трех случаях.

1) Ускорительное колесо *4* вращается в сторону ведущего вала с угловой скоростью $\omega_4 = \omega_a$



К задаче 24.37



К задаче 24.38

2) То же, но вращения ведущего вала и ускорительного колеса противоположны по направлению

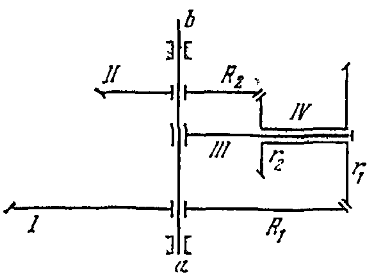
3) Ускорительное колесо и ось сателлитов неподвижны

Ответ 1) $\omega_b = \omega_a$, 2) $\omega_b = -3\omega_a$; 3) $\omega_b = -\omega_a$.

24.38(25.21). В станочном дифференциале коническое колесо *1* заклинено на ведущем валу *a*, на конце ведомого вала *b* сидит головка, несущая ось *CC* сателлитов *2—2*. На том же валу свободно сидит коническое колесо *3*, составляющее одно целое с червячным колесом *4*. Определить передаточное число при неподвижном червяке *5*, а следовательно, и колесах *4* и *3*, если все конические колеса одного радиуса.

Ответ. $\omega_b/\omega_a = 0{,}5$

24.39(25.22). Двойной дифференциал состоит из кривошипа *III*, который может вращаться вокруг неподвижной оси *ab*. На кривошипе свободно насажен сателлит *IV*, состоящий из двух наглухо скрепленных между собой конических зубчатых колес радиусов $r_1 = 5$ см и $r_2 = 2$ см. Колеса эти соединены с двумя коническими зубчатыми колесами *I* и *II* радиусов $R_1 = 10$ см и $R_2 = 5$ см, вращающимися вокруг оси *ab*, но с кривошипом не связанными. Угловые скорости колес *I* и *II* соответственно равны $\omega_1 = 4{,}5$ рад/с и $\omega_2 = 9$ рад/с. Определить угловую скорость кривошипа ω_3 и угловую скорость сателлита по отношению к кривошипу ω_{43}, если оба колеса вращаются в одну и ту же сторону.



К задаче 24.39

Ответ: $\omega_3 = 7$ рад/с, $\omega_{43} = 5$ рад/с.

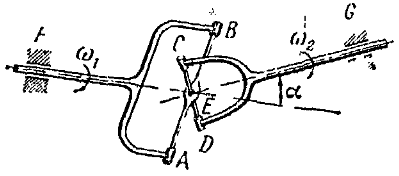
24.40(25.23). Решить предыдущую задачу, предполагая, что зубчатые колеса *I* и *II* вращаются в противоположные стороны.

Ответ: $\omega_3 = 3$ рад/с, $\omega_{43} = 15$ рад/с.

24.41(25.24). Крестовина *ABCD* универсального шарнира Кардана — Гука ($AB \perp CD$), употребляемого при передаче вращения между пересекающимися осями, вращается вокруг неподвижной точки *E*. Найти отношение ω_1/ω_2 для валов, связанных крестовиной, в двух случаях:

1) когда плоскость вилки *ABF* горизонтальна, а плоскость вилки *CDG* вертикальна,

2) когда плоскость вилки *ABF* вертикальна, а плоскость вилки *CDG* ей перпендикулярна.



К задаче 24.41

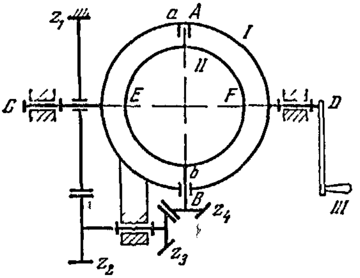
Угол между осями валов постоянный: $\alpha = 60°$.

Ответ. 1) $\omega_1/\omega_2 = 1/\cos\alpha = 2$, 2) $\omega_1/\omega_2 = \cos\alpha = 0{,}5$.

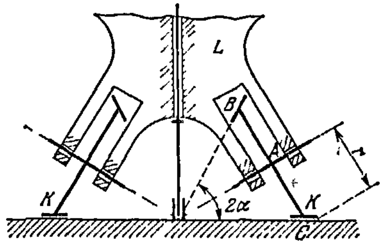
24.42(25.25). Шаровая дробилка состоит из полого шара диаметра $d = 10$ см, сидящего на оси *AB*, на которой заклинено колесо с числом зубцов $z_4 = 28$. Ось *AB* закреплена во вращающейся раме *I* в подшипниках *a* и *b*. Рама *I* составляет одно целое с осью *CD*, приводящейся во вращение при помощи рукоятки *III*. Вращение шаровой дробилки вокруг оси *AB* осуществляется при помощи зубчатых колес с числами зубцов $z_1 = 80$, $z_2 = 43$, $z_3 = 28$, причем первое из них неподвижно. Определить абсолютную угловую скорость, угловое ускорение дробилки и скорости и ускорения двух точек *E* и *F*, лежащих в рассматриваемый момент времени на оси *CD*, если рукоятку вращают с постоянной угловой скоростью $\omega = 4{,}3$ рад/с.

Ответ: $\omega_a = 9{,}08$ рад/с, $\varepsilon = 34{,}4$ рад/с^2, $v_E = v_F = 0{,}4$ м/с, $w_E = w_F = 4{,}68$ м/с^2.

24.43(25.26). Поворотная часть моста поставлена на катки в виде конических зубчатых колес K, оси которых закреплены в кольцевой раме L наклонно, так что их продолжения пересекаются в геометрическом центре плоской опорной шестерни, по которой перекатываются опорные зубчатые колеса K. Найти угловую скорость и угловое ускорение конического катка, скорости и ускорения точек A, B, C (A — центр конического зубчатого колеса BAC), если радиус основания катка $r = 0{,}25$ м, угол при вершине 2α, причем $\cos\alpha = 84/85$. Угловая скорость вращения кольцевой рамы вокруг вертикальной оси $\omega_0 = \mathrm{const} = 0{,}1$ рад/с.



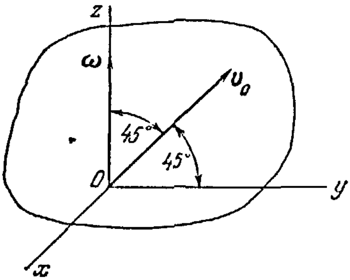
К задаче 24.42



К задаче 24.43

Ответ. $\omega = 0{,}646$ рад/с, $\varepsilon = 0{,}0646$ рад/с^2, $v_A = 0{,}16$ м/с, $v_B = 0{,}32$ м/с, $v_C = 0$, $w_A = 0{,}016$ м/с^2, $w_B = 0{,}11$ м/с^2, $w_C = 0{,}105$ м/с^2.

24.44(25.27). Тело движется в пространстве, причем вектор угловой скорости тела равен ω и направлен в данный момент по оси z. Скорость точки O тела равна v_0 и образует с осями y, z одинаковые углы, равные 45°. Найти точку твердого тела, скорость которой будет наименьшей, и определить величину этой скорости.

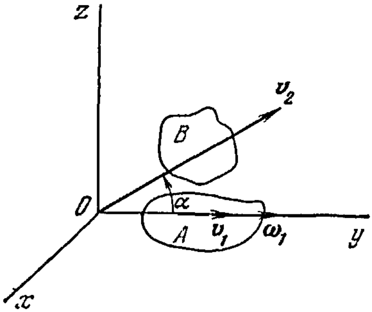


К задаче 24.44

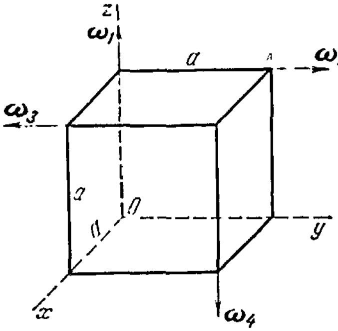
Ответ. $v_{\min} = v_0 \cos 45°$. Такова скорость точек мгновенной винтовой оси, параллельной оси z, проходящей через точку с координатами $x = -(v_0 \cos 45°)/\omega$, $y = 0$.

24.45(25.28). Тело A вращается с угловой скоростью ω_1 вокруг оси y и движется поступательно со скоростью v_1 вдоль той же оси. Тело B движется поступательно со скоростью v_2, образующей угол α с осью y. При каком соотношении v_1/v_2 движение тела A по отношению к телу B будет чистым вращением? Где при этом будет лежать ось вращения?

Ответ. При $v_1/v_2 = \cos\alpha$ относительное движение тела A по отношению к телу B будет чистым вращением вокруг оси, параллельной y и отстоящей от нее на расстоянии $l = \frac{v \sin\alpha}{\omega_1}$, отложенном по перпендикуляру к оси y и составляющей поступательной скорости $v_2 \sin\alpha$.



К задаче 24.45



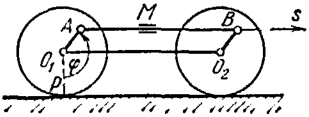
К задаче 24.46

24.46(25.29). Твердое тело, имеющее форму куба со стороной $a = 2$ м участвует одновременно в четырех вращениях с угловыми скоростями $\omega_1 = \omega_4 = 6$ рад/с, $\omega_2 = \omega_3 = 4$ рад/с. Определить результирующее движение тела.

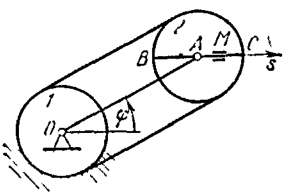
Ответ. Тело движется поступательно со скоростью v, проекции которой равны $v_x = -12$ м/с, $v_y = 12$ м/с, $v_z = -8$ м/с.

§ 25. Смешанные задачи на сложное движение точки и твердого тела

25.1. Колеса паровоза соединены спарником AB. Колеса радиуса $r = 80$ см катятся без скольжения по рельсам налево. При движении из состояния покоя угол поворота колес $\varphi = \angle PO_1A$ изменяется по закону $\varphi = \frac{3\pi}{4}t^2$ рад. Вдоль спарника AB, в соответствии с уравнением $s = AM = (10 + 40t^2)$ см, движется ползун



К задаче 25.1



К задаче 25.2

M. Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение ползуна M в момент $t = 1$ с, если $O_1O_2 = AB$, $O_1A = O_2B = r/2$.

Ответ. $v_M = 450$ см/с, $w_M = 1170$ см/с².

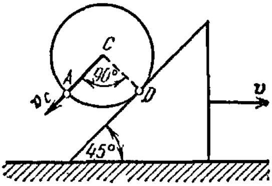
25.2. Неподвижная шестерня 1 соединена цепью с одинаковой по радиусу подвижной шестерней 2. Шестерня 2 приводится в движение с помощью кривошипа $OA = 60$ см, вращающегося против хода часовой стрелки по закону $\varphi = \frac{\pi}{6}t$ рад. В момент времени

$t=0$ кривошип OA находился в правом горизонтальном положении. Вдоль горизонтальной направляющей BC шестерни 2, совмещенной с осью s, движется ползун M, совершающий колебания около центра A по закону $s = AM = 20 \sin \frac{\pi}{2} t$ см. Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение ползуна M в моменты времени. $t_1 = 0$, $t_2 = 1$ с.

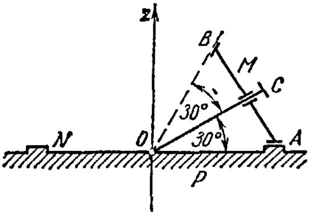
Ответ. $v_{M_0} = 44{,}1$ см/с, $v_{M_1} = 31{,}1$ см/с, $w_{M_0} = 16{,}5$ см/с^2, $w_{M_1} = 64{,}2$ см/с^2.

25.3. Треугольная призма, образующая угол 45° с горизонтом, скользит направо по горизонтальной плоскости со скоростью v ($v = 2t$ см/с). По наклонной грани призмы скатывается без скольжения круглый цилиндр. Модуль скорости его центра масс C относительно призмы равен $v_C = 4t$ см/с. Определить модуль абсолютной скорости и абсолютного ускорения точки A, лежащей на ободе цилиндра, если в момент $t = 1$ с $\angle ACD = 90°$.

Ответ. $v_A = 6$ см/с, $w_A = 5{,}60$ см/с^2.



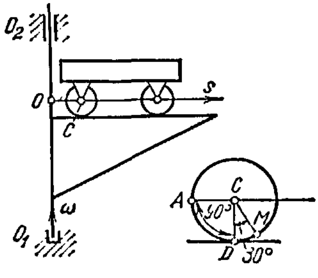
К задаче 25.3



К задаче 25.4

25.4. Коническая шестерня M приводится в движение по шестерне N с помощью оси OC, закрепленной в точке O и вращающейся вокруг вертикальной оси z с постоянной угловой скоростью 2 рад/с. Горизонтальная платформа P, к которой прикреплена шестерня N, движется ускоренно вертикально вниз, имея в данный момент скорость $v = 80$ см/с и ускорение $w = 80\sqrt{3}$ см/с^2. Угол $BOA = 60°$, диаметр AB шестерни M равен 20 см. Найти абсолютные скорости и ускорения точек A и B шестерни M.

Ответ: $v_A = 80$ см/с, $v_B = 100$ см/с, $w_A = 0$, $w_B = 302$ см/с^2.



К задаче 25.6

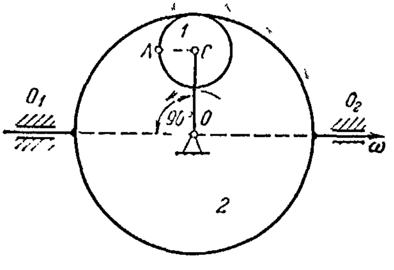
25.5. Решить предыдущую задачу в предположении, что ось OC вращается вокруг вертикальной оси z с угловой скоростью, равной $2t$ рад/с. Найти абсолютные ускорения точек A и B конической шестерни M для момента времени $t = 1$ с.

Ответ. $w_A = 0$, $w_B = 308$ см/с^2.

25.6. Поворотный кран вращается вокруг вертикальной неподвижной оси O_1O_2 с угловой скоростью ω ($\omega = 1$ рад/с). Вдоль горизонтальной стрелы крана, совмещенной с осью s, катится без скольжения тележка. Центр масс C ее заднего колеса радиуса 10 см движется по закону $s_C = OC = 60(1+t)$ см. Определить модуль абсолютной скорости точки M, лежащей на ободе колеса, в момент $t = 1$ с, если $\angle MCD = 30°$. Найти также модули абсолютных ускорений точек A и D, лежащих на ободе колеса, в момент $t = 1$ с, если $\angle ACD = 90°$.

Ответ: $v_M = 129$ см/с, $w_A = 278$ см/с^2, $w_D = 380$ см/с^2.

25.7. Шестерня *1* радиуса 10 см приводится в движение внутри шестерни *2* радиуса 40 см с помощью кривошипа OC, вращающегося с постоянной угловой скоростью $\omega_0 = 2$ рад/с. Шестерня *2* в свою очередь вращается вокруг горизонтальной неподвижной оси O_1O_2 с постоянной угловой скоростью $\omega = 2$ рад/с. Определить модули абсолютной скорости и абсолютного ускорения точки A, лежащей на ободе шестерни *1*, если $\angle OCA = \angle O_1OC = 90°$.

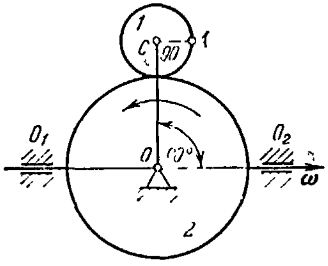


К задаче 25.7

Ответ: $v_A = 103{,}8$ см/с, $w_A = 494$ см/с^2.

25.8. Найти модуль абсолютного ускорения точки A в предыдущей задаче для момента времени $t = 2$ с, если вращение шестерни *2* вокруг неподвижной горизонтальной оси O_1O_2 происходит с переменной угловой скоростью ω $(\omega = (2 - t)$ рад/с). Считать, что в момент времени $t = 2$ с точка A занимает положение, указанное на рисунке к предыдущей задаче.

Ответ. $w_A = 455$ см/с^2.



К задаче 25.9

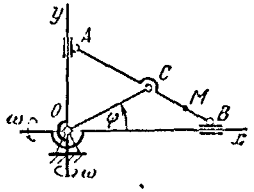
25.9. Шестерня *1* радиуса 10 см приводится в движение по шестерне *2* радиуса 20 см посредством кривошипа OC, вращающегося с угловой скоростью $\omega_0 = t$ рад/с. Шестерня *2* в свою очередь вращается вокруг неподвижной горизонтальной оси O_1O_2 с постоянной угловой скоростью ω $(\omega = 2$ рад/с). Определить модуль абсолютной скорости и абсолютного ускорения в момент $t = 1$ с точки A, лежащей на ободе шестерни *1*, если $\angle O_2OC = \angle OCA = 90°$.

Ответ: $v_A = 73{,}5$ см/с, $w_A = 207$ см/с^2.

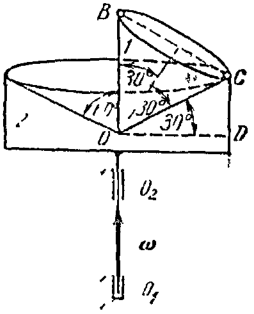
25.10. Кривошип OC с помощью стержня AB приводит в движение ползуны A и B, которые скользят вдоль взаимно перпендикулярных направляющих x и y. Эти направляющие в свою очередь вращаются против хода часовой стрелки вокруг оси O с постоянной угловой скоростью ω $(\omega = \pi/2$ рад/с). Угол поворота φ кривошипа OC, отсчитываемый от оси x против хода часовой стрелки, изменяется по закону $\varphi = \frac{\pi}{4}t$ рад. Найти модуль абсолютной скорости и абсолютного ускорения точки M линейки AB в момент времени $t = 0$, если $OC = AC = CB = 2BM = 16$ см.

Ответ: $v_M = 44$ см/с, $w_M = 93{,}8$ см/с^2.

25.11. Конус 1 с углом при вершине O равным 60° катится без скольжения внутри конуса 2 с углом при вершине 120°. Конус 2 в свою очередь вращается вокруг неподвижной вертикальной оси O_1O_2 с постоянной угловой скоростью ω ($\omega = 3$ рад/с). Точка B обода основания конуса 1 лежит на диаметре BC, расположенном в одной вертикальной плоскости с осью O_1O_2. Скорость точки B по модулю постоянна, равна 60 см/с и направлена за рисунок перпендикулярно плоскости OBC, $OB = OC = 20$ см, $\angle COD = 30°$. Определить модули абсолютных ускорений точек B и C конуса 1.



К задаче 25.10



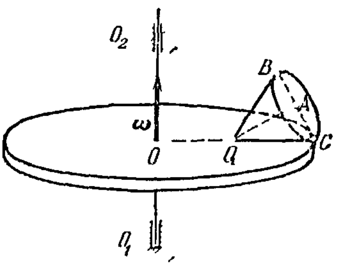
К задаче 25.11

Ответ: $w_B = 497$ см/с^2, $w_C = 316$ см/с^2.

25.12. Найти в момент времени $t = 1$ с геометрическое место точек конуса 1, рассмотренного в предыдущей задаче, абсолютные ускорения которых не изменятся, несмотря на то, что скорость точки B будет переменной и равной $60t$ см/с.

Ответ: Точки конуса 1, совмещенные с образующей OC.

25.13. Круговой конус катится без скольжения по горизонтальному диску, к которому он прикреплен вершиной Q. Диск в свою очередь вращается вокруг неподвижной вертикальной оси O_1O_2 с постоянной угловой скоростью ω ($\omega = 2$ рад/с). Скорость центра A основания конуса относительно покоящегося диска равна по модулю 15 см/с и направлена на читателя перпендикулярно плоскости рисунка. Найти модули абсолютной скорости и абсолютного ускорения точки C касания основания конуса с диском, если $OQ = QC = QB = BC = 10$ см.



К задаче 25.13

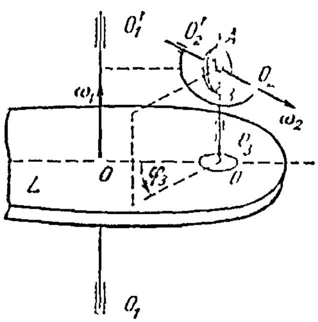
Ответ: $v_C = 10$ см/с, $w_C = 105$ см/с^2.

25.14. Определить модуль абсолютного ускорения точки C, рассмотренной в предыдущей задаче, для момента времени $t = 1$ с в предположении, что диск вращается ускоренно с угловым ускорением ε ($\varepsilon = 2t$ рад/с^2), причем в начальный момент времени модуль угловой скорости был равен 2 рад/с.

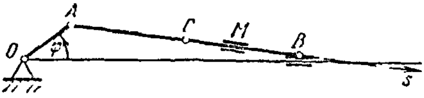
Ответ $w_C = 197$ см/с^2.

25.15. Гироскоп установлен на горизонтальной платформе L, вращающейся вокруг неподвижной вертикальной оси O_1O_1' с постоянной угловой скоростью ω_1 ($\omega_1 = 2\pi$ рад/с). Гироскопом является диск K радиуса $r = 10$ см, вращающийся вокруг горизонтальной оси O_2O_2' с постоянной угловой скоростью ω_2 ($\omega_2 = 8\pi$ рад/с). Ось O_2O_2' в свою очередь вращается вокруг вертикальной оси O_3O_3' по закону $\varphi_3 = 2\pi t^2$ рад. В момент времени $t = 0$ диск K лежал в одной вертикальной плоскости с осью O_1O_1'. Угол φ_3 отсчитывается от этой плоскости в направлении, указанном на рисунке. Оси O_2O_2' и O_3O_3' пересекаются в центре диска K. Найти модули абсолютной скорости и абсолютного ускорения точки A, лежащей на верхнем конце вертикального диаметра AB диска K в момент времени $t = 1$ с, если расстояние между параллельными осями O_1O_1' и O_3O_3' равно $OO_3 = 30$ см.

Ответ $v_A = 314$ см/с, $w_A = 7170$ см/с^2.



К задаче 25.15



К задаче 25.16

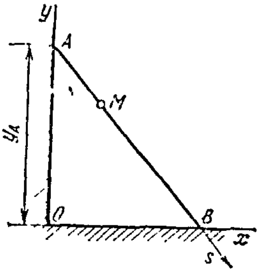
25.16. Вдоль шатуна AB кривошипно-ползунного механизма OAB около точки C совершает колебания муфта M по закону $s = CM = 20\sin\frac{\pi}{2}t$ см (ось s, направленная вдоль шатуна AB, имеет начало в центре C шатуна). Кривошип OA вращается вокруг горизонтальной оси O, перпендикулярной плоскости рисунка, против хода часовой стрелки по закону $\varphi = \frac{\pi}{2}t$ рад. Определить модули абсолютной скорости и абсолютного ускорения муфты M в момент времени $t = 0$, если $OA = 10$ см, $AC = CB = AB/2 = 20$ см.

Ответ $v_M = 32{,}3$ см/с, $w_M = 37{,}2$ см/с^2.

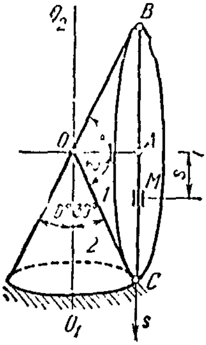
25.17. Стержень AB длиной $1\sqrt{2}$ м скользит концом A вниз вдоль оси y, а концом B вдоль оси x направо. Точка A движется по закону $y_A = (5 - t^2)$ м. Одновременно вдоль стержня от A к B соскальзывает точка M. Определить модули абсолютной скорости и абсолютного ускорения точки M в момент $t = 1$ с, если уравнение движения точки M вдоль оси s, совмещенной со стержнем, имеет вид $s = AM = 2\sqrt{2}\,t^2$ м.

Ответ $v_M = 7{,}05$ м/с, $w_M = 8{,}00$ м/с^2.

25.18. Круговой конус 1 с углом при вершине равным 120° прикреплен к неподвижному конусу 2 с углом при вершине 60° шарниром O и катится без скольжения. При этом ось OA конуса 1 совершает вокруг вертикальной оси O_1O_2 один оборот в секунду. Вдоль диаметра $BC = 20$ см основания конуса 1 проложена направляющая, по которой скользит ползун M, совершая колебания около центра A по закону $s = AM = 10 \cos 2\pi t$ см. В начальный момент времени $t = 0$ направляющая BC лежит в одной вертикальной плоскости с шарниром O. Найти модуль абсолютного ускорения ползуна M в момент $t = 0$.



К задаче 25.17



К задаче 25.18

Ответ. $w_M = 572$ см/с^2.

ОТДЕЛ ТРЕТИЙ

ДИНАМИКА

ГЛАВА IX

ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ*)

§ 26. Определение сил по заданному движению

26.1 (26.1). В шахте опускается равноускоренно лифт массы 280 кг. В первые 10 с он проходит 35 м. Найти натяжение каната, на котором висит лифт.

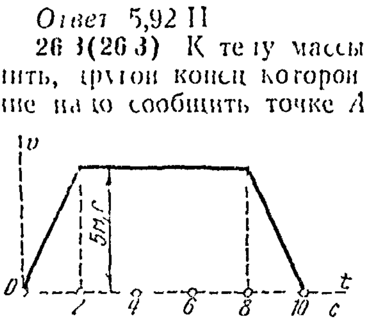
Ответ: 2548 Н.

26.2 (26.2). Горизонтальная платформа, на которой лежит груз массы 1,02 кг, опускается вертикально вниз с ускорением 4 м/с². Найти силу давления, производимого грузом на платформу во время их совместного спуска.

Ответ: 5,92 Н.

26.3 (26.3). К телу массы 3 кг, лежащему на столе, привязали нить, другой конец которой прикреплен к точке A. Какое ускорение надо сообщить точке A, поднимая тело вверх по вертикали, чтобы нить оборвалась, если она рвется при натяжении $T = 42$ Н?

Ответ: 4,2 м/с².



К задаче 26.4

26.4 (26.4). При подъеме клетки лифта график скоростей имеет вид, изображенный на рисунке. Масса клетки 480 кг. Определить натяжения T_1, T_2, T_3 каната, к которому привешена клетка, в течение трех промежутков времени: 1) от $t = 0$ до $t = 2$ с, 2) от $t = 2$ до $t = 8$ с и 3) от $t = 8$ до $t = 10$ с.

Ответ: $T_1 = 5904$ Н, $T_2 = 4704$ Н, $T_3 = 3504$ Н.

26.5 (26.5). Камень массы 0,3 кг, привязанный к нити длины 1 м, описывает окружность в вертикальной плоскости. Определить наименьшую угловую скорость ω камня, при которой произойдет разрыв нити, если сопротивление ее разрыву равно 9 Н.

Ответ: $\omega_{\min} = 4,494$ рад/с.

26.6 (26.6). На криволинейных участках железнодорожного пути возвышают наружный рельс над внутренним для того, чтобы сила

---

*) Во всех задачах этой главы, если нет специального указания, весом пружин, нитей, блоков, силами сопротивления и т. п. следует пренебречь.

давления проходящего поезда на рельсы была направлена перпендикулярно полотну дороги. Определить величину h возвышения наружного рельса над внутренним при следующих данных: радиус закругления 400 м, скорость поезда 10 м/с, расстояние между рельсами 1,6 м

Ответ $h = 4{,}1$ см

26.7(26.7). В вагоне поезда, идущего сначала по прямолинейному пути, а затем по закругленному со скоростью 20 м/с, производится взвешивание некоторого груза на пружинных весах, весы в первом случае показывают 50 Н, а на закруглении 51 Н. Определить радиус закругления пути.

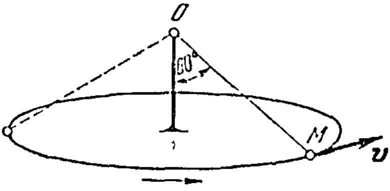
Ответ 203 м

26.8(26.8). Гиря массы 0,2 кг подвешена к концу нити длины 1 м; вследствие толчка гиря получила горизонтальную скорость 5 м/с. Найти натяжение нити непосредственно после толчка

Ответ 6,96 Н

26.9(26.9). Груз M массы 0,102 кг, подвешенный на нити длины 30 см в неподвижной точке O, представляет собой конический маятник, т. е. описывает окружность в горизонтальной плоскости, причем нить составляет с вертикалью угол 60°. Определить скорость v груза и натяжение T нити

Ответ $v = 2{,}1$ м/с, $T = 2$ Н



К задаче 26.9

26.10(26.10). Автомобиль массы 1000 кг движется по выпуклому мосту со скоростью $v = 10$ м/с. Радиус кривизны в середине моста $\rho = 50$ м. Определить силу давления автомобиля на мост в момент прохождения его через середину моста

Ответ 7800 Н.

26.11(26.11). В поднимающейся кабине подъемной машины производится взвешивание тела на пружинных весах. При равномерном движении кабины показание пружинных весов равно 50 Н, при ускоренном — 51 Н. Найти ускорение кабины

Ответ 0,196 м/с².

26.12(26.12). Масса кузова трамвайного вагона 10 000 кг. Масса тележки с колесами 1000 кг. Определить силу наибольшего и наименьшего давления вагона на рельсы горизонтального прямолинейного участка пути, если на ходу кузов совершает на рессорах вертикальные гармонические колебания по закону $x = 0{,}02 \sin 10t$ м.

Ответ $N_{\max} = 12{,}78 \cdot 10^4$ Н, $N_{\min} = 8{,}78 \cdot 10^4$ Н

26.13 (26.13). Поршень двигателя внутреннего сгорания совершает горизонтальные колебания согласно закону $x = r\left(\cos\omega t + \frac{r}{4l}\cos 2\omega t\right)$ см, где r — длина кривошипа, l — длина шатуна, ω — постоянная по величине угловая скорость вала. Определить наибольшее значение силы, действующей на поршень, если масса последнего M.

Ответ $P = Mr\omega^2(1 + r/l)$.

26.14(26.14). Решето рудообогатительного грохота совершает вертикальные гармонические колебания с амплитудой $a = 5$ см. Найти наименьшую частоту k колебаний решета, при которой куски руды, лежащие на нем, будут отделяться от него и подбрасываться вверх

Ответ $k = 14$ рад/с

26.15(26.15). Тело массы 2,04 кг совершает колебательное движение по горизонтальной прямой согласно закону $x = 10 \sin \frac{\pi t}{2}$ м Найти зависимость силы, действующей на тело, от координаты x, а также наибольшую величину этой силы.

Ответ $F = -5{,}033x$ Н, $F_{\max} = 50{,}33$ Н

26.16(26.16). Движение материальной точки массы 0,2 кг выражается уравнениями $x = 3\cos 2\pi t$ см, $y = 4\sin \pi t$ см (t в с). Определить проекции силы, действующей на точку, в зависимости от ее координат

Ответ $X = -0{,}0789x$ Н, $Y = -0{,}0197y$ Н

26.17(26.17). Шарик, масса которого равна 100 г, падает под действием силы тяжести и при этом испытывает сопротивление воздуха Движение шарика выражается уравнением

$$x = 4{,}9t - 2{,}45(1 - e^{-2t}),$$

где x — в метрах, t — в секундах, ось Ox направлена по вертикали вниз. Определить силу сопротивления воздуха R и выразить ее как функцию скорости шарика

Ответ $R = 0{,}98(1 - e^{-2t})$ Н $= 0{,}2v$ Н

26.18(26.18). Масса стола строгального станка 700 кг, масса обрабатываемой детали 300 кг, скорость хода стола $v = 0{,}5$ м/с, время разгона $t = 0{,}5$ с Определить силу, необходимую для разгона (считая движение равноускоренным) и для дальнейшего равномерного движения стола, если коэффициент трения при разгоне $f_1 = 0{,}14$, а при равномерном движении $f_2 = 0{,}07$

Ответ. $F_1 = 2372$ Н, $F_2 = 686$ Н

26.19(26.19). Груженая вагонетка массы 700 кг опускается по канатной железной дороге с уклоном $\alpha = 15°$, имея скорость $v = 1{,}6$ м/с Определить натяжение каната при равномерном спуске и при торможении вагонетки Время торможения $t = 4$ с, общий коэффициент сопротивления движению $f = 0{,}015$ При торможении вагонетка движется равнозамедленно.

Ответ $T_1 = 1676$ Н, $T_2 = 1956$ Н

26.20(26.20). Груз массы 1000 кг перемещается вместе с тележкой вдоль горизонтальной фермы мостового крана со скоростью $v = 1$ м/с Расстояние центра тяжести груза до точки подвеса $l = 5$ м При внезапной остановке тележки груз по инерции будет продолжать движение и начнет качаться около точки подвеса. Определить наибольшее натяжение каната при качании груза.

Ответ $T = 10\,000$ Н.

26.21(26.21). Определить отклонение α от вертикали и силу давления N вагона на рельс подвесной дороги при движении вагона по закруглению радиуса $R = 30$ м со скоростью $v = 10$ м/с. Масса вагона 1500 кг.

Ответ $\alpha = 18°47'$; $N = 15\,527$ Н

26.22(26.22). Масса поезда без локомотива равна $2\cdot 10^5$ кг. Двигаясь по горизонтальному пути равноускоренно, поезд через 60 с после начала движения приобрел скорость 15 м/с. Сила трения равна 0,005 веса поезда. Определить натяжение стяжки между поездом и локомотивом в период разгона.

Ответ 59 800 Н

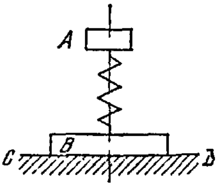
26.23(26.23). Спортивный самолет массы 2000 кг летит горизонтально с ускорением 5 м/с^2, имея в данный момент скорость 200 м/с. Сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости и при скорости в 1 м/с равно 0,5 Н. Считая силу сопротивления направленной в сторону, обратную скорости, определить силу тяги винта, если она составляет угол в 10° с направлением полета. Определить также величину подъемной силы в данный момент.

Ответ. Сила тяги равна 30 463 Н, подъемная сила равна 14 310 Н

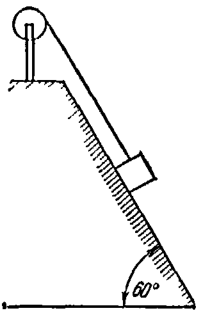
26.24(26.24). Грузовой автомобиль массы 6000 кг въезжает на паром со скоростью 6 м/с. Заторможенный с момента въезда на паром автомобиль остановился, пройдя 10 м. Считая движение автомобиля равнозамедленным, найти натяжение каждого из двух канатов, которыми паром привязан к берегу. При решении задачи пренебречь массой и ускорением парома.

Ответ Натяжение каждого каната 5400 Н

26.25(26.25). Грузы A и B веса $P_A = 20$ Н и $P_B = 40$ Н соединены между собой пружиной, как показано на рисунке. Груз A совершает свободные колебания по вертикальной прямой с амплитудой 1 см и периодом 0,25 с. Вычислить силу наибольшего и наименьшего давления грузов A и B на опорную поверхность CD.



К задаче 26.25



К задаче 26.26

Ответ $R_{max} = 72{,}8$ Н, $R_{min} = 47{,}2$ Н.

26.26. Груз массы $M = 600$ кг посредством ворота поднимают по наклонному шурфу, составляющему угол 60° с горизонтом. Коэффициент трения груза о поверхность шурфа равен 0,2. Ворот радиуса 0,2 м вращается по закону $\varphi = 0{,}4t^3$. Найти натяжение троса как функцию времени и значение этого натяжения через 2 с после начала подъема.

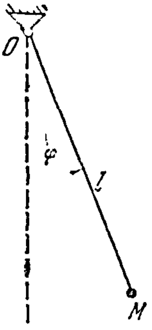
Ответ. $T = (5{,}68 + 0{,}288t)$ кН, при $t = 2$ с $T = 6{,}256$ кН.

26.27(26.27) Самолет, пикируя отвесно, достиг скорости 300 м/с, после чего летчик стал выводить самолет из пике, описывая дугу окружности радиуса $R = 600$ м в вертикальной плоскости. Масса летчика 80 кг. Какая наибольшая сила прижимает летчика к креслу?

Ответ: 12 784 Н.

26.28(26.30). Груз M веса 10 Н подвешен к тросу длины $l=2$ м и совершает вместе с тросом колебания согласно уравнению $\varphi = \frac{\pi}{6}\sin 2\pi t$, где φ — угол отклонения троса от вертикали в радианах, t — время в секундах. Определить натяжения T_1 и T_2 троса в верхнем и нижнем положениях груза.

Ответ: $T_1 = 32{,}1$ Н, $T_2 = 8{,}65$ Н.



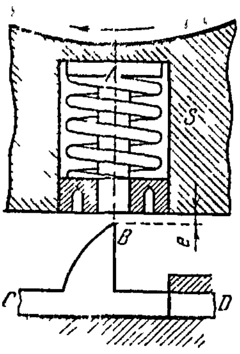
К задаче 26.28

26.29(26.31) Велосипедист описывает кривую радиуса 10 м со скоростью 5 м/сек. Найти угол наклона средней плоскости велосипеда к вертикали, а также тот наименьший коэффициент трения между шинами велосипеда и полотном дороги, при котором будет обеспечена устойчивость велосипеда.

Ответ: 14°20′, 0,255.

26.30(26.32) Велосипедный трек на кривых участках пути имеет виражи, профиль которых в поперечном сечении представляет собой прямую, наклонную к горизонту, так что на кривых участках внешний край трека выше внутреннего. С какой наименьшей и с какой наибольшей скоростью можно ехать по виражу, имеющему радиус R и угол наклона к горизонту α, если коэффициент трения резиновых шин о грунт трека равен f?

Ответ:
$$v_{\min} = \sqrt{gR\,\frac{\operatorname{tg}\alpha - f}{1 + f\operatorname{tg}\alpha}},$$
$$v_{\max} = \sqrt{gR\,\frac{\operatorname{tg}\alpha + f}{1 - f\operatorname{tg}\alpha}}.$$

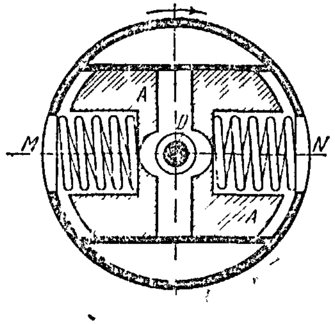


К задаче 26.31

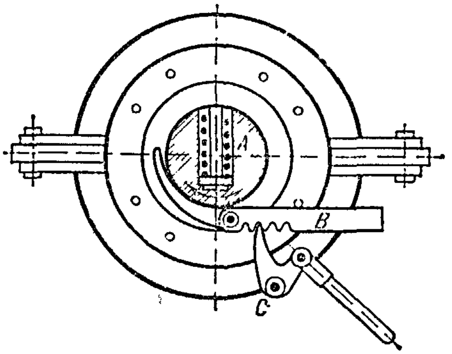
26.31(26.33) Во избежание несчастных случаев, происходивших от разрыва маховиков, устраивается следующее приспособление. В ободе маховика помещается тело 1, удерживаемое внутри его пружиной S; когда скорость маховика достигает предельной величины, тело 1 концом своим задевает выступ B задвижки CD, которая и закрывает доступ пара в машину. Пусть масса тела A равна 1,5 кг, расстояние e выступа B от маховика равно 2,5 см, предельная угловая скорость маховика 120 об/мин. Определить необходимый коэффициент жесткости пружины c (т. е. величину силы, под действием которой пружина сжимается на 1 см), предполагая, что масса тела A сосредоточена в точке, рас стояние которой от оси вращения маховика в изображенном на рисунке положении равно 147,5 см.

Ответ. 145,6 Н/см.

26.32(26.34). В регуляторе имеются гири A массы 30 кг, которые могут скользить вдоль горизонтальной прямой MN; эти гири соединены пружинами с точками M и N; центры тяжести гирь совпадают с концами пружин. Расстояние конца каждой пружины от оси O, перпендикулярной плоскости рисунка, в ненапряженном состоянии равно 5 см, изменение длины пружины на 1 см вызывается силой в 200 Н. Определить расстояние центров тяжести гирь от оси O, когда регулятор, равномерно вращаясь вокруг оси O, делает 120 об/мин.



К задаче 26.32



К задаче 26.33

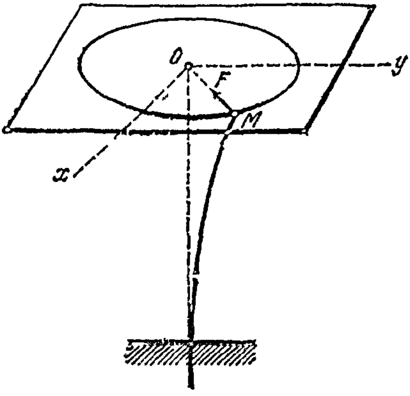
Ответ. 6,55 см.

26.33(26.35). Предохранительный выключатель паровых турбин состоит из пальца A массы $m = 0{,}225$ кг, помещенного в отверстии, просверленном в передней части вала турбины перпендикулярно оси, и отжимаемого внутрь пружиной; центр тяжести пальца отстоит от оси вращения вала на расстоянии $l = 8{,}5$ мм при нормальной скорости вращения турбины $n = 1500$ об/мин. При увеличении числа оборотов на 10% палец преодолевает реакцию пружины, отходит от своего нормального положения на расстояние $x = 4{,}5$ мм, задевает конец рычага B и освобождает собачку C, связанную системой рычагов с пружиной, закрывающей клапан парораспределительного механизма турбины. Определить жесткость пружины, удерживающей тело A, т. е. силу, необходимую для сжатия ее на 1 см, считая реакцию пружины пропорциональной ее сжатию.

Ответ. $c = 89{,}2$ Н/см.

26.34(26.36). Точка массы m движется по эллипсу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Ускорение точки параллельно оси y. При $t = 0$ координаты точки были $x=0$, $y=b$, начальная скорость v_0. Определить силу, действующую на движущуюся точку в каждой точке ее траектории.

Ответ: $F_y = -m\frac{v_0^2 b^4}{a^2 y^3}$.



К задаче 26.35

26.35(26.37). Шарик массы m закреплен на конце вертикального упругого стержня, зажатого нижним концом в неподвижной стойке. При небольших отклонениях стержня от его вертикального равновесного положения можно приближенно считать, что центр шарика движется в горизонтальной плоскости Oxy, проходящей через верхнее равновесное положение центра шарика. Определить закон изменения силы, с которой упругий, изогнутый стержень действует на шарик, если выведенный из своего положения равновесия, принятого за начало координат, шарик движется согласно уравнениям $x = a\cos kt$, $y = b\sin kt$, где a, b, k — постоянные величины.

Ответ: $F = mk^2r$, где $r = \sqrt{x^2+y^2}$.

§ 27. Дифференциальные уравнения движения

а) Прямолинейное движение

27.1(27.1). Камень падает в шахту без начальной скорости. Звук от удара камня о дно шахты услышан через 6,5 с от момента начала его падения. Скорость звука равна 330 м/с. Найти глубину шахты.

Ответ: 175 м.

27.2(27.2). Тяжелое тело спускается по гладкой плоскости, наклоненной под углом 30° к горизонту. Найти, за какое время тело пройдет путь 9,6 м, если в начальный момент его скорость равнялась 2 м/с.

Ответ. 1,61 с.

27.3(27.3). При выстреле из орудия снаряд вылетает с горизонтальной скоростью 570 м/с. Масса снаряда 6 кг. Как велико среднее давление пороховых газов, если снаряд проходит внутри орудия 2 м? Сколько времени движется снаряд в стволе орудия, если считать давление газов постоянным?

Ответ. $P = 4{,}88\cdot10^5$ Н, $t = 0{,}007$ с.

27.4(27.4). Тело массы m вследствие полученного толчка прошло по негладкой горизонтальной плоскости за 5 с расстояние $s = 24{,}5$ м и остановилось. Определить коэффициент трения f.

Ответ. $f = 0{,}2$.

27.5(27.5). За какое время и на каком расстоянии может быть остановлен тормозом вагон трамвая, идущий по горизонтальному пути со скоростью 10 м/с, если сопротивление движению, развиваемое при торможении, составляет 0,3 веса вагона.

Ответ $t = 3{,}4$ с, $s = 17$ м

27.6(27.6). Принимая в первом приближении сопротивление откатника постоянным, определить продолжительность отката ствола полевой пушки, если начальная скорость отката равна 10 м/с, а средняя длина отката равна 1 м.

Ответ 0,2 с

27.7(27.7). Тяжелая точка поднимается по негладкой наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 30°$ с горизонтом. В начальный момент скорость точки равнялась $v_0 = 15$ м/с. Коэффициент трения $f = 0{,}1$ Какой путь пройдет точка до остановки? За какое время точка пройдет этот путь?

Ответ $s = 19{,}57$ м, $t = 2{,}61$ с

27.8(27.8). По прямолинейному железнодорожному пути с углом наклона $\alpha = 10°$ вагон катится с постоянной скоростью. Считая сопротивление трения пропорциональным нормальному давлению, определить ускорение вагона и его скорость через 20 с после начала движения, если он начал катиться без начальной скорости по пути с углом наклона $\beta = 15°$. Определить также, какой путь пройдет вагон за это время

Ответ. $a = \dfrac{\sin(\beta - \alpha)}{\cos\alpha} g = 0{,}867$ м/с^2, $v = \dfrac{\sin(\beta - \alpha)}{\cos\alpha} gt = 17{,}35$ м/с,

$s = \dfrac{\sin(\beta - \alpha)}{\cos\alpha} \dfrac{gt^2}{2} = 173{,}5$ м

27.9(27.9). Найти наибольшую скорость падения шара массы 10 кг и радиуса $r = 8$ см, принимая, что сопротивление воздуха равно $R = k\sigma v^2$, где v — скорость движения, σ — площадь проекции тела на плоскость, перпендикулярную направлению его движения, и k — численный коэффициент, зависящий от формы тела и имеющий для шара значение 0,24 Н·с^2/м^4.

Ответ $v_{\max} = 142{,}5$ м/с

27.10(27.10). Два геометрически равных и однородных шара сделаны из различных материалов Плотности материала шаров соответственно равны γ_1 и γ_2. Оба шара падают в воздухе Считая сопротивление среды пропорциональным квадрату скорости, определить отношение максимальных скоростей шаров.

Ответ: $\dfrac{v_{1\max}}{v_{2\max}} = \sqrt{\dfrac{\gamma_1}{\gamma_2}}$.

27.11(27.11). При скоростном спуске лыжник массы 90 кг скользил по склону в 45°, не отталкиваясь палками Коэффициент трения лыж о снег $f = 0{,}1$. Сопротивление воздуха движению лыжника пропорционально квадрату скорости лыжника и при скорости в 1 м/с равно 0,635 Н. Какую наибольшую скорость мог развить лыжник? Насколько увеличится максимальная скорость, если подобрав лучшую мазь лыжник уменьшит коэффициент трения до 0,05?

Ответ: $v_{1\max} = 29{,}73$ м/с, скорость увеличится до $v_{2\max} = 30{,}55$ м/с.

27.12(27.12). Корабль движется, преодолевая сопротивление воды, пропорциональное квадрату скорости и равное 1200 Н при скорости в 1 м/с. Сила упора винтов направлена по скорости движения и изменяется по закону $T = 12\cdot 10^5(1 - v/33)$ Н, где v — скорость корабля, выраженная в м/с. Определить наибольшую скорость, которую может развить корабль.

Ответ: $v_{\max} = 20$ м/с.

27.13(27.13). Самолет летит горизонтально. Сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости и равно 0,5 Н при скорости в 1 м/с. Сила тяги постоянна, равна 30 760 Н и составляет угол в 10° с направлением полета. Определить наибольшую скорость самолета.

Ответ: $v_{\max} = 246$ м/с.

27.14(27.14). Самолет массы 10^4 кг приземляется на горизонтальное поле на лыжах. Летчик подводит самолет к поверхности без вертикальной скорости и вертикального ускорения в момент приземления. Сила лобового сопротивления пропорциональна квадрату скорости и равна 10 Н при скорости в 1 м/с. Подъемная сила пропорциональна квадрату скорости и равна 30 Н при скорости в 1 м/с. Определить длину и время пробега самолета до остановки, приняв коэффициент трения $f = 0{,}1$.

Ответ: $S = 909{,}3$ м, $T = 38{,}7$ с.

27.15(27.15). Самолет начинает пикировать без начальной вертикальной скорости. Сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости. Найти зависимость между вертикальной скоростью в данный момент, пройденным путем и максимальной скоростью пикирования.

Ответ: $v = v_{\max}\sqrt{1 - e^{-2gs/v_{\max}^2}}$.

27.16(27.16). На какую высоту H и за какое время T поднимется тело веса p, брошенное вертикально вверх со скоростью v_0, если сопротивление воздуха может быть выражено формулой k^2pv^2, где v — величина скорости тела?

Ответ: $H = \dfrac{\ln\left(v_0^2k^2 + 1\right)}{2gk^2}$, $T = \dfrac{\operatorname{arctg} kv_0}{kg}$.

27.17(27.17). Тело массы 2 кг, брошенное вертикально вверх со скоростью 20 м/с, испытывает сопротивление воздуха, которое при скорости v м/с равно $0{,}4v$ Н. Найти, через сколько секунд тело достигнет наивысшего положения.

Ответ: 1,71 с.

27.18(27.18). Подводная лодка, не имевшая хода, получив небольшую отрицательную плавучесть p, погружается на глубину, двигаясь поступательно. Сопротивление воды при небольшой отрицательной плавучести можно принять пропорциональным первой степени скорости погружения и равным kSv, где k — коэффициент пропорциональности, S — площадь горизонтальной проекции лодки, v — величина скорости погружения. Масса лодки равна M. Определить скорость погружения v, если при $t = 0$ скорость $v_0 = 0$.

Ответ: $v = \frac{p}{kS}\left(1 - e^{-\frac{kS}{M}t}\right)$.

27.19(27.19). При условиях предыдущей задачи определить путь z, пройденный погружающейся лодкой за время T.

Ответ. $z = \frac{p}{kS}\left[T - \frac{M}{kS}\left(1 - e^{-\frac{kS}{M}T}\right)\right]$

27.20(27.21). Какова должна быть постоянная тяга винта T при горизонтальном полете самолета, чтобы, пролетев s метров, самолет увеличил свою скорость с v_0 м/с до v_1 м/с. Тяга винта направлена по скорости полета. Сила лобового сопротивления, направленная в сторону, противоположную скорости, пропорциональна квадрату скорости и равна α Н при скорости в 1 м/с. Масса самолета M кг.

Ответ $T = \frac{\alpha\left(v_0^2 - v_1^2 e^{\alpha S/M}\right)}{1 - e^{\alpha S/M}}$ Н.

27.21(27.22). Корабль массы 10^7 кг движется со скоростью 16 м/с. Сопротивление воды пропорционально квадрату скорости корабля и равно $3 \cdot 10^5$ Н при скорости 1 м/с. Какое расстояние пройдет корабль, прежде чем скорость его станет равной 4 м/с? За какое время корабль пройдет это расстояние?

Ответ $s = 16,2$ м, $T = 6,25$ с.

27.22(27.23). Тело падает в воздухе без начальной скорости. Сопротивление воздуха $R = k^2pv^2$, где v — величина скорости тела, p — вес тела. Какова будет скорость тела по истечении времени t после начала движения? Каково предельное значение скорости?

Ответ: $v = \frac{1}{k}\,\frac{e^{kgt} - e^{-kgt}}{e^{kgt} + e^{-kgt}}$, $v_\infty = \frac{1}{k}$.

27.23(27.24). Корабль массы $1,5 \cdot 10^6$ кг преодолевает сопротивление воды, равное $R = \alpha v^2$ Н, где v — скорость корабля в м/с, а α — постоянный коэффициент, равный 1200. Сила упора винтов направлена по скорости в сторону движения и изменяется по закону $T = 1,2 \cdot 10^6(1 - v/33)$ Н. Найти зависимость скорости корабля от времени, если начальная скорость равна v_0 м/с.

Ответ: $v = \frac{70v_0 + 20(v_0 + 50)\left(e^{0,056t} - 1\right)}{70 + (v_0 + 50)\left(e^{0,056t} - 1\right)}$.

27.24(27.25). В предыдущей задаче найти зависимость пройденного пути от скорости.

Ответ: $x = 893 \ln \frac{v_0 + 50}{v + 50} + 357 \ln \frac{v_0 - 20}{v - 20}$ (м).

27.25(27.26). В задаче 27.23 найти зависимость пути от времени при начальной скорости $v_0 = 10$ м/с

Ответ: $x = 1250 \ln \frac{(v_0 + 50) e^{0,08t} + 20 - v_0}{70} - 50t$, при $v_0 = 10$ м/с $x = 1250 \ln \frac{6e^{0,08t} + 1}{7} - 50t$

27.26(27.27). Вагон массы 9216 кг приходит в движение вследствие действия ветра, дующего вдоль полотна, и движется по горизонтальному пути. Сопротивление движению вагона равно 1/200 его веса. Сила давления ветра $P = kSu^2$, где S — площадь задней стенки вагона, подверженной давлению ветра, равная 6 м², u — скорость ветра относительно вагона, а $k = 1{,}2$. Абсолютная скорость ветра $v = 12$ м/с. Считая начальную скорость вагона равной нулю, определить

1) наибольшую скорость $v_{\max}$ вагона,

2) время T, которое потребовалось бы для достижения этой скорости,

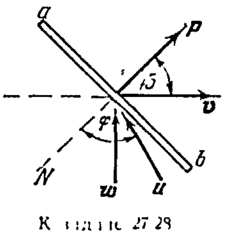
3) на каком расстоянии x вагон наберет скорость 3 м/с

Ответ: 1) $v_{\max} = 1{,}08$ м/с, 2) $T = \infty$, 3) $x = 175{,}5$ м

27.27(27.28). Найти уравнение движения точки массы m, падающей без начальной скорости на Землю. Сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости. Коэффициент пропорциональности равен k

Ответ: $x = \frac{m}{k} \ln \operatorname{ch} \sqrt{\frac{gk}{m}}\, t.$

27.28(27.29). Буер, весящий вместе с пассажирами $Q = 1962$ Н, движется прямолинейно по гладкой горизонтальной поверхности льда вследствие давления ветра на парус, плоскость которого ab образует угол 45° с направлением движения. Абсолютная скорость w ветра перпендикулярна направлению движения. Величина силы давления ветра P выражается формулой Ньютона $P = kSu^2 \cos^2 \varphi$, где φ — угол, образуемый относительной скоростью ветра u с перпендикуляром N к плоскости паруса, $S = 5$ м² — площадь паруса, $k = 0{,}113$ — опытный коэффициент. Сила давления P направлена перпендикулярно плоскости ab. Пренебрегая трением, найти: 1) какую наибольшую скорость $v_{\max}$ может получить буер, 2) какой угол α составляет при этой скорости помещенный на мачте флюгер с плоскостью паруса, 3) какой путь x_1 должен пройти буер для того, чтобы приобрести скорость $v = \frac{2}{3} w$, если его начальная скорость равна нулю



К задаче 27.29

Ответ: 1) $v_{\max} = w$, 2) $\alpha = 0°$, 3) $x_1 = 88{,}5$ м

27.29(27.30). Вожатый трамвая, выключая постепенно реостат, увеличивает мощность вагонного двигателя так, что сила тяги возрастает от нуля пропорционально времени, увеличиваясь на 1200 Н в течение каждой секунды. Найти зависимость пройденного пути от времени движения вагона при следующих данных: масса вагона 10 000 кг, сопротивление трения постоянно и составляет 0,02 веса вагона, а начальная скорость равна нулю

Ответ Движение начнется через 1,635 с после включения тока по закону $s = 0{,}02(t - 1{,}635)^3$ м

27.30(27.31). Тело массы 1 кг движется под действием переменной силы $F = 10(1 - t)$ Н, где время t — в секундах Через сколько секунд тело остановится, если начальная скорость тела $v_0 = 20$ м/с и сила совпадает по направлению со скоростью тела? Какой путь пройдет тело до остановки?

Ответ $t = 3{,}236$ с, $s = 60{,}6$ м

27.31(27.32). Материальная точка массы m совершает прямолинейное движение под действием силы, изменяющейся по закону $F = F_0 \cos \omega t$, где F_0 и ω — постоянные величины В начальный момент точка имела скорость $\dot{x}_0 = v_0$ Найти уравнение движения точки

Ответ: $x = \dfrac{F_0}{m\omega^2}(1 - \cos \omega t) + v_0 t.$

27.32(27.33). Частица массы m, несущая заряд электричества e, находится в однородном электрическом поле с переменным напряжением $E = A \sin kt$ (A и k — заданные постоянные) Определить движение частицы, если известно, что в электрическом поле на частицу действует сила $F = eE$, направленная в сторону напряжения E. Влиянием силы тяжести пренебречь Начальное положение частицы принять за начало координат, начальная скорость частицы равна нулю

Ответ $x = \dfrac{eA}{mk}\left(t - \dfrac{\sin kt}{k}\right).$

27.33(27.34). Определить движение тяжелого шарика вдоль воображаемого прямолинейного канала, проходящего через центр Земли, если принять, что сила притяжения внутри земного шара пропорциональна расстоянию движущейся точки от центра Земли и направлена к этому центру; шарик опущен в канал с поверхности Земли без начальной скорости Указать также скорость шарика при прохождении через центр Земли и время движения до этого центра Радиус Земли равен $R = 6{,}37 \cdot 10^6$ м, ускорение силы притяжения на поверхности Земли принять равным $g = 9{,}8$ м/с^2.

Ответ Расстояние шарика от центра Земли меняется по закону $x = R \cos \sqrt{\dfrac{g}{R}}\, t$, $v = 7{,}9 \cdot 10^3$ м/с, $T = 1266{,}4$ с $= 21{,}1$ мин.

27.34(27.35). Тело падает на Землю с высоты h без начальной скорости Сопротивлением воздуха пренебречь, а силу притяжения Земли считать обратно пропорциональной квадрату расстояния тела от центра Земли Найти время T, по истечении которого тело достигнет поверхности Земли Какую скорость v оно приобретет за это время? Радиус Земли равен R, ускорение силы тяжести у поверхности Земли равно g.

Ответ: $v=\sqrt{\dfrac{2gRh}{R+h}}$,

$$t=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{R+h}{2g}}\left(\sqrt{Rh}+\frac{R+h}{2}\arccos\frac{R-h}{R+h}\right).$$

27.35(27.36). Материальная точка массы m отталкивается от центра силой, пропорциональной расстоянию (коэффициент пропорциональности mk_2). Сопротивление среды пропорционально скорости движения (коэффициент пропорциональности $2mk_1$). В начальный момент точка находилась на расстоянии a от центра, и ее скорость в этот момент равнялась нулю. Найти закон движения точки.

Ответ: $x=\dfrac{a}{\alpha+\beta}\left(\alpha e^{\beta t}+\beta e^{-\alpha t}\right)$, где $\alpha=\sqrt{k_1^2+k_2}+k_1$, $\beta=$ $=\sqrt{k_1+k_2}-k_1$.

27.36(27.37). Точка массы m начинает двигаться без начальной скорости из положения $x=\beta$ прямолинейно (вдоль оси x) под действием силы притяжения к началу координат, изменяющейся по закону $R=\alpha/x^2$. Найти момент времени, когда точка окажется в положении $x_1=\beta/2$. Определить скорость точки в этом положении.

Ответ: $t_1=\dfrac{\beta^{3/2}}{2\sqrt{2}}\sqrt{\dfrac{m}{\alpha}}\left(1+\dfrac{\pi}{2}\right)$, $v_1=\sqrt{\dfrac{2\alpha}{m\beta}}$.

27.37(27.38). Точка массы m начинает двигаться из состояния покоя из положения $x_0=a$ прямолинейно под действием силы притяжения, пропорциональной расстоянию от начала координат: $F_x=-c_1mx$, и силы отталкивания, пропорциональной кубу расстояния: $Q_x=c_2mx^3$. При каком соотношении c_1, c_2, a точка достигает начала координат и остановится?

Ответ: $c_1={}^1/_2c_2a^2$.

27.38(27.40). При движении тела в неоднородной среде сила сопротивления изменяется по закону $F=-\dfrac{2v^2}{3+s}$ Н, где v — скорость тела в м/с, а s — пройденный путь в метрах. Определить пройденный путь как функцию времени, если начальная скорость $v_0=5$ м/с.

Ответ: $s=3[\sqrt{5+1}-1]$ м.

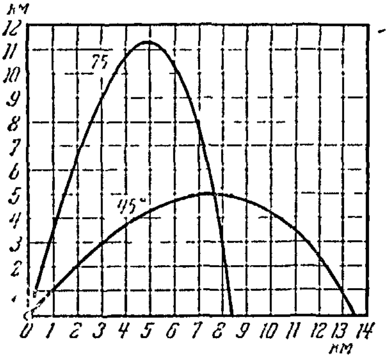
б) Криволинейное движение

27.39(27.41). Морское орудие выбрасывает снаряд массы 18 кг со скоростью $v_0=700$ м/с, действительная траектория снаряда в воздухе изображена на рисунке в двух случаях: 1) когда угол, составляемый осью орудия с горизонтом, равен 45° и 2) когда этот угол равен 75°. Для каждого из указанных двух случаев определить, на сколько километров увеличилась бы высота и дальность полета, если бы снаряд не испытывал сопротивления воздуха.

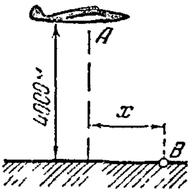
Ответ Увеличение высоты 1) 7,5 км, 2) 12 км. Увеличение дальности 1) 36,5 км, 2) 16,7 км

27.40(27.42). Самолет A летит на высоте 4000 м над землей с горизонтальной скоростью 140 м/с. На каком расстоянии x, измеряемом по горизонтальной прямой от данной точки B, должен быть сброшен с самолета без начальной относительной скорости какой-либо груз для того, чтобы он упал в эту точку? Сопротивлением воздуха пренебречь

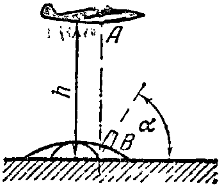
Ответ $x = 4000$ м



К задаче 27.39



К задаче 27.40



К задаче 27.41

27.41(27.43). Самолет A летит над землей на высоте h с горизонтальной скоростью v_1 Из орудия B произведен выстрел по самолету в тот момент, когда самолет находится на одной вертикали с орудием Найти 1) какому условию должна удовлетворять начальная скорость v_0 снаряда для того, чтобы он мог попасть в самолет, и 2) под каким углом α к горизонту должен быть сделан выстрел Сопротивлением воздуха пренебречь

Ответ: 1) $v_0^2 \geqslant v_1^2 + 2gh$; 2) $\cos\alpha = v_1/v_0$.

27.42(27.44). Наибольшая горизонтальная дальность снаряда равна L. Определить его горизонтальную дальность l при угле бросания $\alpha = 30°$ и высоту h траектории в этом случае Сопротивлением воздуха пренебречь

Ответ: $l = \frac{\sqrt{3}}{2}L$, $h = \frac{L}{8}$.

27.43(27.45). При угле бросания α снаряд имеет горизонтальную дальность l_α. Определить горизонтальную дальность при угле бросания, равном $\alpha/2$ Сопротивлением воздуха пренебречь.

Ответ: $l_{\alpha/2} = \frac{l_\alpha}{2\cos\alpha}$

27.44(27.47). Определить угол наклона ствола орудия к горизонту, если цель обнаружена на расстоянии 32 км, а начальная скорость снаряда $v_0 = 600$ м/с. Сопротивлением воздуха пренебречь

Ответ. $\alpha_1 = 30°\,18'$, $\alpha_2 = 59°\,42'$.

27.45(27.48). Решить предыдущую задачу в том случае, когда цель будет находиться на высоте 200 м над уровнем артиллерийских позиций

Ответ. $\alpha_1 = 30°\,50'$, $\alpha_2 = 59°\,31'$.

27.46(27.49). Из орудия, находящегося в точке O, произвели выстрел под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0. Одновременно из точки A, находящейся на расстоянии l по горизонтали от точки O, произвели выстрел вертикально вверх. Определить, с какой начальной скоростью v_1 надо выпустить второй снаряд, чтобы он столкнулся с первым снарядом, если скорость v_0 и точка A лежат в одной вертикальной плоскости. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Ответ: $v_1 = v_0 \sin\alpha$ (независимо от расстояния l, для $l < \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$).

27.47(27.50). Найти геометрическое место положений в момент t материальных точек, одновременно брошенных в вертикальной плоскости из одной точки с одной и той же начальной скоростью v_0 под всевозможными углами к горизонту.

Ответ: Окружность радиуса $v_0 t$ с центром, лежащим на вертикали точки бросания, ниже этой точки на $^1/_2 gt^2$.

27.48(27.51). Найти геометрическое место фокусов всех параболических траекторий, соответствующих одной и той же начальной скорости v_0 и всевозможным углам бросания.

Ответ: $x^2 + y^2 = \frac{v_0^4}{4g^2}$.

27.49(27.52). Тело веса P, брошенное с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту, движется под влиянием силы тяжести и сопротивления R воздуха. Определить наибольшую высоту h тела над уровнем начального положения, считая сопротивление пропорциональным первой степени скорости $R = kPv$.

Ответ: $h = \frac{v_0 \sin\alpha}{gk} - \frac{1}{gk^2} \ln(1 + kv_0 \sin\alpha)$.

27.50(27.53). В условиях задачи 27.49 найти уравнения движения точки.

Ответ: $x = \frac{v_0 \cos\alpha}{kg}(1 - e^{-kgt})$, $y = \frac{1}{kg}\left(v_0 \sin\alpha + \frac{1}{k}\right)(1 - e^{-kgt}) - \frac{t}{k}$.

27.51(27.54). При условиях задачи 27.49 определить, на каком расстоянии s по горизонтали точка достигнет наивысшего положения.

Ответ: $s = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g(kv_0 \sin\alpha + 1)}$.

27.52(27.55). В вертикальной трубе, помещенной в центре круглого бассейна и наглухо закрытой сверху, на высоте 1 м сделаны отверстия в боковой поверхности трубы, из которых выбрасываются наклонные струи воды под различными углами φ к горизонту ($\varphi < \pi/2$), начальная скорость струи равна $v_0 = \sqrt{\frac{4g}{3\cos\varphi}}$ м/с, где g — ускорение силы тяжести, высота трубы

1 м. Определить наименьший радиус R бассейна, при котором вся выбрасываемая трубой вода падает в бассейн, как бы мала ни была высота его стенки.

Ответ. $R = 2{,}83$ м.

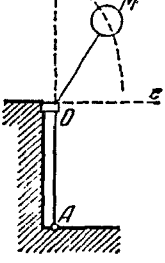
27.53(27.56). Определить движение тяжелой материальной точки, масса которой равна m, притягиваемой к неподвижному центру O силой, прямо пропорциональной расстоянию. Движение происходит в пустоте, сила притяжения на единице расстояния равна k^2m; в момент $t = 0$ $x = a$, $x = 0$, $y = 0$, $y = 0$, причем ось Oy направлена по вертикали вниз.

Ответ. Гармоническое колебательное движение $x = a\cos kt$, $y = \frac{g}{k^2}(1 - \cos kt)$ по отрезку прямой $y = \frac{g}{k^2} - \frac{g}{k^2a}x$, $|x| \leqslant a$.

27.54(27.57). Точка массы m движется под действием силы отталкивания от неподвижного центра O, изменяющейся по закону $\boldsymbol{F} = k^2m\boldsymbol{r}$, где $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор точки. В начальный момент точка находилась в $M_0(a, 0)$ и имела скорость v_0, направленную параллельно оси y. Определить траекторию точки.

Ответ. $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{ky}{v_0}\right)^2 = 1$ (гипербола).

27.55(27.58). Упругая нить, закрепленная в точке A, проходит через неподвижное гладкое кольцо O, к свободному концу ее прикреплен шарик M, масса которого равна m. Длина невытянутой нити $l = AO$; для удлинения нити на 1 м нужно приложить силу, равную k^2m. Вытянув нить по прямой AB так, что длина ее увеличилась вдвое, сообщили шарику скорость v_0, перпендикулярную прямой AB. Определить траекторию шарика, пренебрегая действием силы тяжести и считая натяжение нити пропорциональным ее удлинению.



К задаче 27.55

Ответ. Эллипс $\frac{k^2x^2}{v_0^2} + \frac{y^2}{l^2} = 1$.

27.56(27.59). Точка M, масса которой равна m, притягивается к n неподвижным центрам $C_1, C_2, \ldots, C_n$ силами, пропорциональными расстояниям; сила притяжения точки M к центру C_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ равна $k_im\cdot\overline{MC_i}$ Н, точка M и притягивающие центры лежат в плоскости Oxy. Определить траекторию точки M, если при $t = 0$: $x = x_0$, $y = y_0$, $x = 0$, $y = v_0$. Действием силы тяжести пренебречь.

Ответ: Эллипс $\left(\frac{x - a}{x_0 - a}\right)^2 + \left[(y - b) + \frac{x - a}{x_0 - a}(b - y_0)\right]^2 \frac{k}{v_0^2} = 1$,

где $a = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n} k_ix_i$, $b = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n} k_iy_i$, $k = \sum_{i=1}^{n} k_i$.

27.57(27.60). Точка M притягивается к двум центрам C_1 и C_2 силами, пропорциональными расстояниям $km\cdot\overline{MC_1}$ и $km\cdot\overline{MC_2}$, центр C_1 неподвижен и находится в начале координат, центр C_2 равномерно движется по оси Ox, так что $x_2 = 2(a + bt)$. Найти траекторию точки M, полагая, что в момент $t = 0$ точка M находится в плоскости xy, координаты ее $x = y = a$ и скорость имеет проекции

$$\dot x = \dot z = b, \qquad \dot y = 0.$$

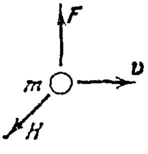
Ответ. Винтовая линия, расположенная на эллиптическом цилиндре, ось которого есть Ox, а уравнение имеет вид $\frac{y^2}{a^2} + \frac{2kz^2}{b^2} = 1$, шаг винта равен $\pi b\sqrt{\frac{2}{k}}$.

27.58(27.61). Частица массы m, несущая заряд отрицательного электричества e, вступает в однородное электрическое поле напряжения $\boldsymbol{E}$ со скоростью v_0, перпендикулярной направлению напряжения поля. Определить траекторию дальнейшего движения частицы, зная, что в электрическом поле на нее действует сила $\boldsymbol{F} = e\boldsymbol{E}$, направленная в сторону, противоположную напряжению $\boldsymbol{E}$; действием силы тяжести пренебречь.

Ответ. Парабола, параметр которой равен $mv_0^2/(eE)$.

27.59(27.62). Частица массы m, несущая заряд отрицательного электричества e, вступает в однородное магнитное поле напряжения $\boldsymbol{H}$ со скоростью v_0, перпендикулярной направлению напряжения поля. Определить траекторию дальнейшего движения частицы, зная, что на частицу действует сила $\boldsymbol{F} = -e(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H})$.

При решении удобно воспользоваться уравнениями движения точки в проекциях на касательную и на главную нормаль к траектории.



К задаче 27.59

Ответ. Окружность радиуса $mv_0/(eH)$.

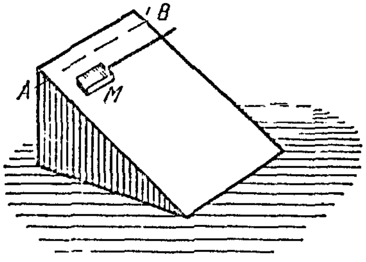
27.60(27.63). Определить траекторию движения частицы массы m, несущей заряд e электричества, если частица вступила в однородное электрическое поле с переменным напряжением $E = A\cos kt$ (A и k — заданные постоянные) со скоростью v_0, перпендикулярной направлению напряжения поля; влиянием силы тяжести пренебречь. В электрическом поле на частицу действует сила $\boldsymbol{F} = -e\boldsymbol{E}$.

Ответ: $y = -\frac{eA}{mk^2}\left(1 - \cos\frac{k}{v_0}x\right)$, где ось y направлена по напряжению поля, начало координат совпадает с начальным положением точки в поле.

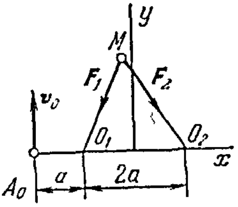
27.61(27.64). По негладкой наклонной плоскости движется тяжелое тело M, постоянно оттягиваемое посредством нити в горизонтальном направлении, параллельно прямой AB. С некоторого момента движение тела становится прямолинейным и равномерным, причем из двух взаимно перпендикулярных составляющих скорости та, которая направлена параллельно AB, равна 12 м/с, Определить вторую составляющую v_1 скорости, а также натяжение T нити при следующих данных уклон плоскости $\operatorname{tg}\alpha = 1/30$, коэффициент трения $f = 0{,}1$, масса тела 30 кг

Ответ $v_1 = 4{,}24$ см/с, $T = 27{,}7$ Н.

27.62(27.65). Точка M массы m находится под действием двух сил притяжения, направленных к неподвижным центрам O_1 и O_2 (см рисунок) Величина этих сил пропорциональна расстоянию от точек O_1 и O_2. Коэффициент пропорциональности одинаков и



К задаче 27.61

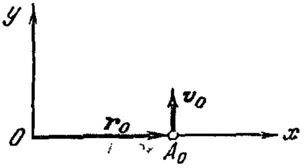


К задаче 27.62

равен c. Движение начинается в точке A_0 со скоростью v_0, перпендикулярной линии O_1O_2. Определить, какую траекторию опишет точка M. Найти моменты времени, когда она пересекает направление линии O_1O_2, и вычислить ее координаты в эти моменты времени Расстояние от точки A_0 до оси y равно $2a$.

Ответ Эллипс $\frac{x^2}{(2a)^2} + \frac{y^2}{(v_0/k)^2} = 1$, где $k = \sqrt{\frac{2c}{m}}$, $t = 0$, $x_0 = -2a$, $y_0 = 0$; $t_1 = \pi/k$, $x_1 = 2a$, $y_1 = 0$, $t_2 = 2\pi/k$, $x_2 = -2a$, $y_2 = 0$ и т д Время, в течение которого точка описывает эллипс, $T = 2\pi/k$

27.63(27.66). На точку A массы m, которая начинает движение из положения $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0$ (где $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор точки) со скоростью $\boldsymbol{v}_0$, перпендикулярной $\boldsymbol{r}_0$, действует сила притяжения, направленная к центру O и пропорциональная расстоянию от него Коэффициент пропорциональности равен mc_1 Кроме того, на точку действует постоянная сила $mc\boldsymbol{r}_0$ Найти уравнение движения и траекторию точки Каково должно быть отношение c_1/c, чтобы траектория движения проходила через центр O? С какой скоростью точка пройдет центр O?



К задаче 27.63

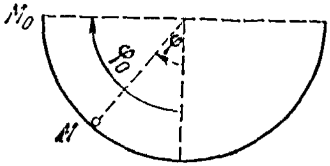
Ответ: 1) $\boldsymbol{r} = \frac{c}{c_1}\boldsymbol{r}_0 + \frac{\boldsymbol{v}_0}{\sqrt{c_1}} \sin\sqrt{c_1}\,t + \boldsymbol{r}_0\left(1 - \frac{c}{c_1}\right)\cos\sqrt{c_1}\,t$,

2) эллипс $\left[\frac{x - \frac{c}{c_1}r_0}{r_0\left(1 - \frac{c}{c_1}\right)}\right]^2 + \left(\frac{y\sqrt{c_1}}{v_0}\right) = 1$,

3) точка A пройдет через центр O, если $c_1/c = 2$;

4) точка A пройдет через центр O со скоростью $v_0 = -v_0$ в момент времени $t = \pi/\sqrt{c_1}$.

27.64(27.67). Тяжелая точка массы m падает из положения, определяемого координатами $x_0 = 0$, $y_0 = h$ при $t = 0$, под действием силы тяжести (параллельной оси y) и силы отталкивания от оси y, пропорциональной расстоянию от этой оси (коэффициент пропорциональности c). Проекции начальной скорости точки на оси координат равны $v_x = v_0$, $v_y = 0$. Определить траекторию точки, а также момент времени t_1 пересечения оси x.



К задаче 27.65

Ответ. Траектория

$$x = \frac{v_0}{k}\,\mathrm{sh}\,k\sqrt{\frac{2}{g}(h-y)},$$

где $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$, $t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$.

27.65(27.68). Точка M массы m движется под действием силы тяжести по гладкой внутренней поверхности полого цилиндра радиуса r. В начальный момент угол $\varphi_0 = \pi/2$, а скорость точки равнялась нулю. Определить скорость точки M и реакцию поверхности цилиндра при угле $\varphi = 30°$.

Ответ: $v = \sqrt[4]{3}\cdot\sqrt{gr}$; $T = \frac{3\sqrt{3}}{2}mg$.

§ 28. Теорема об изменении количества движения материальной точки. Теорема об изменении момента количества движения материальной точки

28.1(28.1). Железнодорожный поезд движется по горизонтальному и прямолинейному участку пути. При торможении развивается сила сопротивления, равная 0,1 веса поезда. В момент начала торможения скорость поезда равняется 20 м/с. Найти время торможения и тормозной путь.

Ответ. 20,4 с, 204 м.

28.2(28.2). По шероховатой наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол $\alpha = 30°$, спускается тяжелое тело без начальной скорости. Определить, в течение какого времени T тело пройдет путь длины $l = 39,2$ м, если коэффициент трения $f = 0,2$.

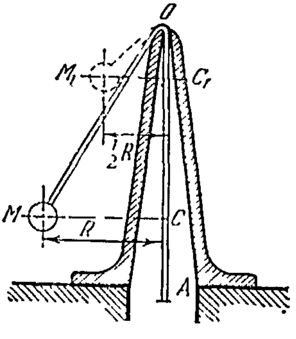
Ответ. $T = 5$ с.

28.3(28.3). Поезд массы $4\cdot10^5$ кг входит на подъем $i = \mathrm{tg}\,\alpha = 0,006$ (где α — угол подъема) со скоростью 15 м/с. Коэффициент трения (коэффициент суммарного сопротивления) при движении поезда равен 0,005. Через 50 с после входа поезда на подъем его скорость падает до 12,5 м/с. Найти силу тяги тепловоза.

Ответ. 23 120 Н.

28.4(28.4). Гирька M привязана к концу нерастяжимой нити MOA, часть которой OA пропущена через вертикальную трубку; гирька движется вокруг оси трубки по окружности радиуса $MC = R$, делая 120 об/мин. Медленно втягивая нить OA в трубку, укорачивают наружную часть нити до длины OM_1, при которой гирька описывает окружность радиусом $R/2$. Сколько оборотов в минуту делает гирька по этой окружности?

Ответ: 180 об/мин.



К задаче 28.4

28.5(28.5). Для определения массы груженого железнодорожного состава между тепловозами и вагонами установили динамометр. Среднее показание динамометра за 2 мин оказалось 10^6 Н. За то же время состав набрал скорость 16 м/с (вначале состав стоял на месте). Найти массу состава, если коэффициент трения $f = 0{,}02$.

Ответ: 3036 т.

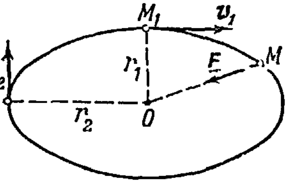
28.6(28.6). Каков должен быть коэффициент трения f колес заторможенного автомобиля о дорогу, если при скорости езды $v = 20$ м/с он останавливается через 6 с после начала торможения.

Ответ: $f = 0{,}34$.

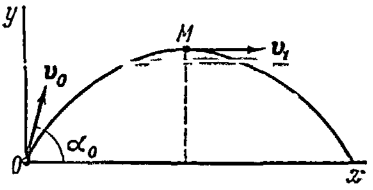
28.7(28.7). Пуля массы 20 г вылетает из ствола винтовки со скоростью $v = 650$ м/с, пробегая канал ствола за время $t = 0{,}00095$ с. Определить среднюю величину давления газов, выбрасывающих пулю, если площадь сечения канала $\sigma = 150$ мм².

Ответ. Среднее давление $9{,}12 \cdot 10^1$ Н/мм².

28.8(28.8). Точка M движется вокруг неподвижного центра под действием силы притяжения к этому центру. Найти скорость v_2 в наиболее удаленной от центра точке траектории, если скорость точки в наиболее близком к нему положении $v_1 = 30$ см/с, а r_2 в пять раз больше r_1.



К задаче 28.8



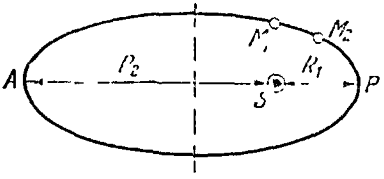
К задаче 28.9

Ответ: $v_2 = 6$ см/с.

28.9(28.9). Найти импульс равнодействующей всех сил, действующих на снаряд за время, когда снаряд из начального положения O переходит в наивысшее положение M. Дано $v_0 = 500$ м/с, $\alpha_0 = 60°$; $v_1 = 200$ м/с; масса снаряда 100 кг.

Ответ: Проекции импульса равнодействующей $S_x = -5000$ Н·с, $S_y = -43\,300$ Н·с.

28.10(28.10). Два астероида M_1 и M_2 описывают один и тот же эллипс, в фокусе которого S находится Солнце. Расстояние между ними настолько мало, что дугу M_1M_2 эллипса можно считать отрезком прямой. Известно, что длина дуги M_1M_2 равнялась a, когда середина ее находилась в перигелии P. Предполагая, что астероиды движутся с равными секториальными скоростями, определить длину дуги M_1M_2, когда середина ее будет проходить через афелий A, если известно, что $SP = R_1$ и $SA = R_2$.



К задаче 28.10

Ответ: $M_1M_2 = \frac{R_1}{R}a$.

28.11(28.11). Мальчик массы 40 кг стоит на полозьях спортивных саней, масса которых равна 20 кг, и делает каждую секунду толчок с импульсом 20 Н·с. Найти скорость, приобретаемую санями за 15 с, если коэффициент трения $f = 0{,}01$.

Ответ: $v = 3{,}53$ м/с.

28.12(28.12). Точка совершает равномерное движение по окружности со скоростью $v = 0{,}2$ м/с, делая полный оборот за время $T = 4$ с. Найти импульс S сил, действующих на точку, за время одного полупериода, если масса точки $m = 5$ кг. Определить среднее значение силы F.

Ответ: $S = 2$ Н·с, $F = 1$ Н.

28.13(28.13). Два математических маятника, подвешенных на нитях длин l_1 и l_2 $(l_1 > l_2)$, совершают колебания одинаковой амплитуды. Оба маятника одновременно начали двигаться в одном направлении из своих крайних отклоненных положений. Найти условие, которому должны удовлетворять длины l_1 и l_2 для того, чтобы маятники по истечении некоторого промежутка времени одновременно вернулись в положение равновесия. Определить наименьший промежуток времени T.

Ответ: $\sqrt{l_1/l_2} = k/n$, где k, n — целые числа и дробь k/n несократима, $T = kT_2 = nT_1$.

28.14(28.14). Шарик массы m, привязанный к нерастяжимой нити, скользит по гладкой горизонтальной плоскости; другой конец нити втягивают с постоянной скоростью a в отверстие, сделанное на плоскости. Определить движение шарика и натяжение нити T, если известно, что в начальный момент нить расположена по прямой, расстояние между шариком и отверстием равно R, а проекция начальной скорости шарика на перпендикуляр к направлению нити равна v_0.

Ответ: В полярных координатах (если принять отверстие за начало координат и угол φ_0 равным нулю):

$$r = R - at; \quad \varphi = \frac{v_0 t}{R - at}, \quad T = \frac{mv_0^2R^2}{(R - at)^3}.$$

28.15(28.15). Определить массу M Солнца, имея следующие данные: радиус Земли $R = 6{,}37 \cdot 10^6$ м, средняя плотность 5,5 т/м³, большая полуось земной орбиты $a = 1{,}49 \cdot 10^{11}$ м, время обращения Земли вокруг Солнца $T = 365{,}25$ сут. Силу всемирного тяготения между двумя массами, равными 1 кг, на расстоянии 1 м считаем равной $\frac{gR^2}{m}$ Н, где m — масса Земли; из законов Кеплера следует, что сила притяжения Земли Солнцем равна $\frac{4\pi^2 a^3 m}{T^2 r^2}$, где r — расстояние Земли от Солнца.

Ответ $M = 1{,}966 \cdot 10^{30}$ кг.

28.16(28.16). Точка массы m, подверженная действию центральной силы F, описывает лемнискату $r^2 = a \cos 2\varphi$, где a — величина постоянная, r — расстояние точки от силового центра; в начальный момент $r = r_0$, скорость точки равна v_0 и составляет угол α с прямой, соединяющей точку с силовым центром. Определить величину силы F, зная, что она зависит только от расстояния r.

По формуле Бине $F = -\frac{mc^2}{r^2}\left(\frac{d^2(1/r)}{d\varphi^2} + \frac{1}{r}\right)$, где c — удвоенная секторная скорость точки.

Ответ: Сила притяжения $F = \frac{3ma^2}{r^7} r_0^2 v_0^2 \sin^2\alpha$.

28.17(28.17). Точка M, масса которой m, движется около неподвижного центра O под влиянием силы F, исходящей из этого центра и зависящей только от расстояния $MO = r$. Зная, что скорость точки $v = a/r$, где a — величина постоянная, найти величину силы F и траекторию точки.

Ответ Сила притяжения $F = ma^2/r^3$, траектория — логарифмическая спираль.

28.18(28.18). Определить движение точки, масса которой 1 кг, под действием центральной силы притяжения, обратно пропорциональной кубу расстояния точки от центра притяжения, при следующих данных: на расстоянии 1 м сила равна 1 Н. В начальный момент расстояние точки от центра притяжения равно 2 м, скорость $v_0 = 0{,}5$ м/с и составляет угол 45° с направлением прямой, проведенной из центра к точке.

Ответ. $r^2 = 1 + t\sqrt{2}$, $r = 2e^{\varphi}$.

28.19(28.19). Частица M массы 1 кг притягивается к неподвижному центру O силой, обратно пропорциональной пятой степени расстояния. Эта сила равна 8 Н на расстоянии 1 м. В начальный момент частица находится на расстоянии $OM_0 = 2$ м и имеет скорость, перпендикулярную к OM_0 и равную 0,5 м/с. Определить траекторию частицы.

Ответ Окружность радиуса 1 м, центр которой лежит на линии OM_0 на расстоянии 1 м от центра притяжения.

28.20(28.20). Точка массы 0,2 кг, движущаяся под влиянием силы притяжения к неподвижному центру по закону тяготения

Ньютона описывает полный эллипс с полуосями 0,1 м и 0,08 м в течение 50 с. Определить наибольшую и наименьшую величины силы притяжения F при этом движении.

Ответ. $F_{max} = 1{,}97 \cdot 10^{-3}$ Н, $F_{min} = 1{,}23 \cdot 10^{-4}$ Н.

28.21. Математический маятник, каждый размах которого длится одну секунду, называется секундным маятником и применяется для отсчета времени. Найти длину l этого маятника, считая ускорение силы тяжести равным 981 см/с². Какое время покажет этот маятник на Луне, где ускорение силы тяжести в 6 раз меньше земного? Какую длину l_1 должен иметь секундный лунный маятник?

Ответ. $l = 99{,}4$ см, $T_1 = 2{,}45$ с, $l_1 = 16{,}56$ см.

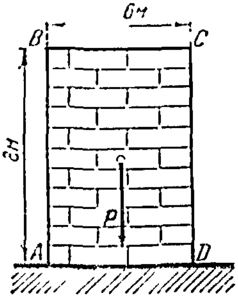
28.22. В некоторой точке Земли секундный маятник отсчитывает время правильно. Будучи перенесен в другое место, он отстает на T секунд в сутки. Определить ускорение силы тяжести в новом положении секундного маятника.

Ответ. $g_1 = g_0 \left(1 - \frac{T}{86\,400}\right)^2$, где g_0 — ускорение силы тяжести в первоначальном положении маятника.

§ 29. Работа и мощность

29.1(29.1). Бетонный блок $ABCD$, размеры которого указаны на рисунке, имеет массу 4000 кг. Определить работу, которую надо затратить на опрокидывание его вращением вокруг ребра D.

Ответ. 39,24 кДж.



К задаче 29.1

29.2(29.2). Определить наименьшую работу, которую надо затратить для того, чтобы поднять на 5 м тело массы 2 т, двигая его по наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол в 30°. Коэффициент трения 0,5.

Ответ. 183 кДж.

29.3(29.3). Для того чтобы поднять 5000 м³ воды на высоту 3 м, поставлен насос с двигателем в 2 л. с. Сколько времени потребуется для выполнения этой работы, если коэффициент полезного действия насоса 0,8?

Коэффициентом полезного действия называется отношение полезной работы, в данном случае работы, затраченной на поднятие воды, к работе движущих сил, которая должна быть больше полезной работы вследствие вредных сопротивлений.

Ответ. 34 ч 43 мин 20 с.

29.4(29.4). Какова мощность машины, поднимающей 84 раза в минуту молот массы 200 кг на высоту 0,75 м, если коэффициент полезного действия машины 0,7?

Ответ. 2,94 кВт.

29.5(29.5). Вычислить общую мощность трех водопадов, расположенных последовательно на одной реке. Высота падения воды у первого водопада — 12 м, у второго — 12,8 м, у третьего — 15 м. Средний расход воды в реке — 75,4 м³/с.

Ответ: 29,4 МВт.

29.6(29.6). Вычислить мощность турбогенераторов на станции трамвайной сети, если число вагонов на линии 15, масса каждого вагона 10 т, сопротивление трения равно 0,02 веса вагона, средняя скорость вагона 3,3 м/с и потери в сети 5%.

Ответ: 309 кВт.

29.7(29.8). Вычислить работу, которая производится при подъеме груза массы 20 кг по наклонной плоскости на расстояние 6 м, если угол, образуемый плоскостью с горизонтом, равен 30°, а коэффициент трения равен 0,01.

Ответ: 598 Дж.

29.8(29.9). Когда турбоход идет со скоростью 15 узлов, турбина его развивает мощность 3800 кВт. Определить силу сопротивления воды движению турбохода, зная, что коэффициент полезного действия турбины и винта равен 0,41 и 1 узел = 0,5144 м/с.

Ответ: 201,9 кН.

29.9(29.10). Найти мощность двигателя внутреннего сгорания, если среднее давление на поршень в течение всего хода равно 49 Н на 1 см², длина хода поршня 40 см, площадь поршня 300 см², число рабочих ходов 120 в минуту и коэффициент полезного действия 0,9.

Ответ: 10,6 кВт.

29.10(29.11). Шлифовальный круг диаметра 0,6 м делает 120 об/мин. Потребляемая мощность 1,2 кВт. Коэффициент трения шлифовального круга о деталь равен 0,2. С какой силой круг прижимает шлифуемую деталь?

Ответ: 1591,5 Н.

29.11(29.12). Определить мощность двигателя продольно-строгального станка, если длина рабочего хода 2 м, его продолжительность 10 с, сила резания 11,76 кН, коэффициент полезного действия станка 0,8. Движение считать равномерным.

Ответ: 2,94 кВт.

29.12(29.14). К концу упругой пружины подвешен груз массы M. Для растяжения пружины на 1 м надо приложить силу в c Н. Составить выражение полной механической энергии груза на пружине. Движение отнести к оси x, проведенной вертикально вниз из положения равновесия груза на пружине.

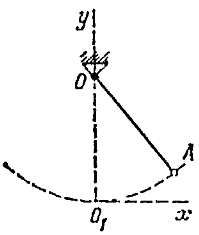
Ответ: $E = {}^1/_2 M\dot{x}^2 + {}^1/_2 cx^2 - Mgx$.

29.13(29.15). При ходьбе на лыжах на дистанцию в 20 км по горизонтальному пути центр тяжести лыжника совершал гармонические колебания с амплитудой 8 см и с периодом $T = 4$ с, масса лыжника 80 кг, а коэффициент трения лыж о снег $f = 0,05$. Определить работу лыжника на марше, если всю дистанцию он прошел за 1 час 30 мин, а также среднюю мощность лыжника.

Примечание. Считать, что работа торможения при опускании центра тяжести лыжника составляет 0,1 работы при подъеме центра тяжести на ту же высоту.

Ответ $A = 1021$ кДж, $N = 188,9$ Вт.

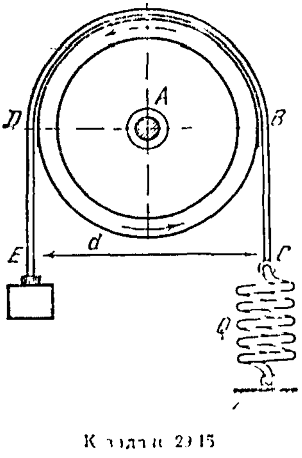
29.14(29.16). Математический маятник A веса P и длины l под действием горизонтальной силы Px/l поднялся на высоту y. Вычислить потенциальную энергию маятника двумя способами: 1) как работу силы тяжести, 2) как работу, произведенную силой Px/l, и указать, при каких условиях оба способа приводят к одинаковому результату.



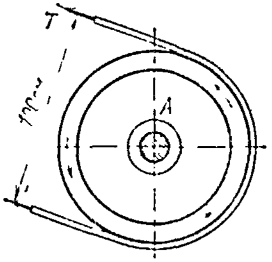
К задаче 29.14

Ответ 1) Py, 2) $\frac{1}{2}\frac{Px^2}{l}$. Оба ответа одинаковы, если можно пренебречь y^2.

29.15(29.17). Для измерения мощности двигателя на его шкив A надета лента с деревянными колодками. Правая ветвь BC ленты удерживается пружинными весами Q, а левая ее ветвь DE натягивается грузом. Определить мощность двигателя, если, вращаясь равномерно, он делает 120 об/мин, при этом пружинные весы показывают натяжение правой ветви ленты в 39,24 Н, масса груза равна 1 кг, диаметр шкива $d = 63,6$ см.



К задаче 29.15



К задаче 29.16

Разность натяжений ветвей BC и DE ленты равна силе, тормозящей шкив. Определить работу этой силы в 1 с.

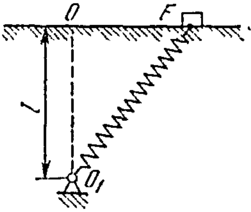
Ответ 117,5 Вт.

29.16(29.18). Посредством ремня передается мощность 14,71 кВт. Радиус ременного шкива 0,5 м, угловая скорость шкива соответствует 150 об/мин. Предполагая, что натяжение T ведущей ветви ремня вдвое больше натяжения t ведомой ветви, определить натяжения T и t.

Ответ. $t = 1873$ Н, $T = 3746$ Н.

§ 30. Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки

30.1(30.1). Тело E, масса которого равна m, находится на гладкой горизонтальной плоскости. К телу прикреплена пружина жесткости c, второй конец которой прикреплен к шарниру O_1. Длина недеформированной пружины равна l_0; $OO_1 = l$. В начальный момент тело E отклонено от положения равновесия O на конечную величину $OE = a$ и отпущено без начальной скорости. Определить скорость тела в момент прохождения положения равновесия.



К задаче 30.1

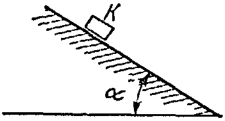
Ответ. $v = \sqrt{\frac{2c}{m}\left[\frac{a^2}{2} + l_0\left(l - \sqrt{l^2 + a^2}\right)\right]}$.

30.2(30.2). В условиях предыдущей задачи определить скорость тела E в момент прохождения положения равновесия O, предполагая, что плоскость шероховата и коэффициент трения скольжени равен f.

Ответ: $v^2 = \frac{2}{m}\left\{c\left[\frac{a^2}{2} + l_0\left(l - \sqrt{l^2 + a^2}\right)\right] - f\left[(mg + cl)a + \right.\right.$

$\left.\left. + cl_0 l \ln\frac{l}{a + \sqrt{l^2 + a^2}}\right]\right\}$

30.3(30.3). Тело K находится на шероховатой наклонной плоскости в покое. Угол наклона плоскости к горизонту α и $f_0 > \operatorname{tg}\alpha$, где f_0 — коэффициент трения покоя. В некоторый момент телу сообщена начальная скорость v_0, направленная вдоль плоскости вниз. Определить путь s, пройденный телом до остановки, если коэффициент трения при движении равен f.



К задаче 30.3

Ответ: $s = \frac{v_0^2}{2g\,(f\cos\alpha - \sin\alpha)}$

30.4(30.4). По наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол 30°, спускается без начальной скорости тяжелое тело, коэффициент трени равен 0,1. Какую скорость будет иметь тело, пройдя 2 м от начала движения?

Ответ 4,02 м/с

30.5(30.5). Снаряд массы 24 кг вылетает из ствола орудия с скоростью 500 м/с. Длина ствола орудия 2 м. Каково среднее значение давления газов на снаряд?

Ответ 1500 кН

30.6(30.6). Материальная точка массы 3 кг двигалась по горизонтальной прямой влево со скоростью 5 м/с. К точке приложил постоянную силу, направленную вправо. Действие силы прекратилось через 30 с, и тогда скорость точки оказалась равной 55 м/ и направленной вправо. Найти величину этой силы и совершенную ею работу.

Ответ $I = 6$ Н, $A = 1{,}5$ кДж

30.7(30.7). При подходе к станции поезд идет со скоростью 10 м/с под уклон, угол которого $\alpha = 0{,}008$ рад. В некоторый момент машинист начинает тормозить поезд. Сопротивление от трения в осях составляет 0,1 от веса поезда. Определить, на каком расстоянии и через какое время от начала торможения поезд остановится. Принять, что $\sin\alpha = \alpha$.

Ответ 55,3 м, 11,8 с

30.8(30.8). Поезд массы 200 т идет по горизонтальному участку пути с ускорением 0,2 м/с². Сопротивление от трения в осях составляет 0,01 веса поезда и считается не зависящим от скорости. Определить мощность, развиваемую тепловозом в момент $t = 10$ с, если в начальный момент скорость поезда равнялась 18 м/с.

Ответ 1192 кВт

30.9(30.9). Брус начинает двигаться с начальной скоростью v_0 по горизонтальной шероховатой плоскости и проходит до полной остановки расстояние s. Определить коэффициент трения скольжения, считая, что сила трения пропорциональна нормальному давлению.

Ответ $f = v_0^2/(2gs)$

30.10(30.10). Железнодорожная платформа имеет массу 6 т и при движении испытывает сопротивление от трения в осях, равное 0,0025 ее веса. Рабочий уперся в покоящуюся платформу и покатил ее по горизонтальному и прямолинейному участку пути, действуя на нее с силой 250 Н. Пройдя 20 м, он предоставил платформе катиться самой. Вычислить, пренебрегая сопротивлением воздуха и трением колес о рельсы, наибольшую скорость платформы во время движения, а также весь путь, пройденный ею до остановки.

Ответ $v_{\max} = 0{,}82$ м/с, $s = 34$ м

30.11(30.11). Гвоздь вбивается в стену, оказывающую сопротивление 700 Н. При каждом ударе молотка гвоздь углубляется в стену на длину $l = 0{,}15$ см. Определить массу молотка, если при ударе о шляпку гвоздя он имеет скорость $v = 1{,}25$ м/с.

Ответ 1,344 кг

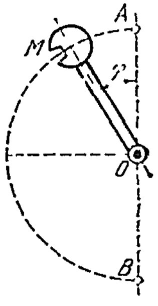
30.12(30.12). Упавший на Землю метеорит массы 39 кг углубился в почву на 1,875 м. Вычислено, что почва в месте падения метеорита оказывает проникающему в нее телу сопротивление $5 \cdot 10^5$ Н. С какой скоростью метеорит достиг поверхности Земли? С какой высоты он должен был упасть без начальной скорости, чтобы у поверхности Земли приобрести указанную скорость? Считаем силу тяжести постоянной и пренебрегаем сопротивлением воздуха.

Ответ $v = 219$ м/с, $H = 2453$ м

30.13(30.13). Незаторможенный поезд массы 500 т, двигаясь с выключенным двигателем, испытывает сопротивление $R = (7650 + 500v)$ Н, где v — скорость в м/с. Зная начальную скорость поезда $v_0 = 15$ м/с, определить, какое расстояние пройдет поезд до остановки.

Ответ. 4,5 км.

30.14(30.14). Главную часть установки для испытания материалов ударом составляет тяжелая стальная отливка M, прикрепленная к стержню, который может вращаться почти без трения вокруг неподвижной горизонтальной оси O. Пренебрегая массой стержня, рассматриваем отливку M как материальную точку, для которой расстояние $OM = 0{,}981$ м. Определить скорость v этой точки в нижнем положении B, если она падает из верхнего положения A с ничтожно малой начальной скоростью.



К задаче 30.14

Ответ: $v = 6{,}2$ м/с.

30.15(30.15). Написать выражение потенциальной энергии упругой рессоры, прогибающейся на 1 см от нагрузки в 4 кН, предполагая, что прогиб x возрастает прямо пропорционально нагрузке.

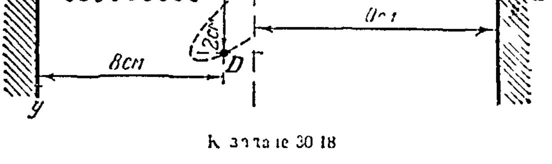
Ответ. $П = (20x^2 + C)$ Дж, если x в см.

30.16(30.16). Пружина имеет в ненапряженном состоянии длину 20 см. Сила, необходимая для изменения ее длины на 1 см, равна 1,96 Н. С какой скоростью v вылетит из трубки шарик массы 30 г, если пружина была сжата до длины 10 см? Трубка расположена горизонтально.

К задаче 30.16

Ответ: $v = 8{,}08$ м/с.

30.17(30.17). Статический прогиб балки, загруженной посередине грузом Q, равен 2 мм. Найти наибольший прогиб балки, пренебрегая ее массой, в двух случаях: 1) когда груз Q положен на неизогнутую балку и опущен без начальной скорости; 2) когда груз Q падает на середину неизогнутой балки с высоты 10 см без начальной скорости.



К задаче 30.18

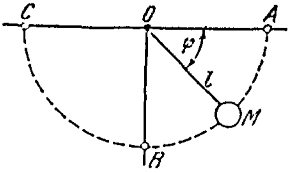
При решении задачи следует иметь в виду, что сила, действующая на груз со стороны балки, пропорциональна ее прогибу.

Ответ: 1) 4 мм, 2) 22,1 мм.

30.18(30.18). Две ненапряженные пружины AC и BC, расположенные по горизонтальной прямой Ax, прикреплены шарнирами к неподвижным точкам A и B, а в точке C — к гире массы 2 кг. Пружина AC сжимается на 1 см силой 20 Н, а пружина CB вытягивается на 1 см силой 10 Н. Расстояние $AC = BC = 10$ см. Гире C сообщена скорость $v_0 = 2$ м/с в таком направлении, что при последующем движении она проходит через точку D, координаты которой $x_D = 8$ см, $y_D = 2$ см, если за начало координат принять точку A и координатные оси направить, как указано на рисунке. Определить скорость гири в момент прохождения ее через точку D, лежащую в вертикальной плоскости xy.

Ответ: $v = 1,77$ м/с.

30.19(30.20). Груз M веса P, подвешенный в точке O на нерастяжимой нити длины l, начинает двигаться в вертикальной плоскости без начальной скорости из точки A; при отсутствии сопротивления груз M достигнет положения C, где его скорость обратится в нуль. Приняв потенциальную энергию, обусловленную силой тяжести груза M в точке B, равной нулю, построить графики изменений кинетической и потенциальной энергии, а также их суммы в зависимости от угла φ. Массой нити пренебречь.



К задаче 30.19

Ответ. Две синусоиды и прямая, имеющие уравнения

$$T = Pl\sin\varphi, \quad V = Pl(1-\sin\varphi), \quad T + V = Pl.$$

30.20(30.21). Материальная точка массы m совершает гармонические колебания по прямой Ox под действием упругой восстанавливающей силы по следующему закону: $x = a\sin(kt+\beta)$. Пренебрегая сопротивлениями, построить графики изменения кинетической энергии T и потенциальной энергии V движущейся точки в зависимости от координаты x; в начале координат $V = 0$.

Ответ. Оба графика — параболы, имеющие уравнения

$$T = \frac{mk^2}{2}(a^2 - x^2), \quad V = \frac{mk^2x^2}{2}.$$

30.21(30.22). Какую вертикальную силу, постоянную по величине и направлению, надо приложить к материальной точке, чтобы при падении точки на Землю с высоты, равной радиусу Земли, эта сила сообщила точке такую же скорость, как сила притяжения к Земле, обратно пропорциональная квадрату расстояния точки до центра Земли?

Ответ. $P/2$, где P — вес точки на поверхности Земли.

30.22(30.23). Горизонтальная пружина, на конце которой прикреплена материальная точка, сжата силой P и находится в покое. Внезапно сила P меняет направление на прямо противоположное. Определить, пренебрегая массой пружины, во сколько раз получающееся при этом наибольшее растяжение l_2 больше первоначального сжатия l_1.

Ответ. $l_2/l_1 = 3$.

30.23(30.24). Тело брошено с поверхности Земли вверх по вертикальной линии с начальной скоростью v_0. Определить высоту H поднятия тела, принимая во внимание, что сила тяжести изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния от центра Земли, сопротивлением воздуха пренебречь. Радиус Земли $R = 6370$ км, $v_0 = 1$ км/с.

Ответ. $H = \dfrac{Rv_0^2}{2gR - v_0^2} = 51{,}38$ км

30.24(30.25). Две частицы заряжены положительным электричеством, заряд первой частицы $q_1 = 100$ Кл, заряд второй частицы $q_2 = 0{,}1\,q_1$, первая частица остается неподвижной, а вторая движется вследствие силы отталкивания от первой частицы. Масса второй частицы равна 1 кг, начальное расстояние от первой частицы равно 5 м, а начальная скорость равна нулю. Определить верхний предел для скорости движущейся частицы, принимая во внимание действие только одной силы отталкивания $F = q_1q_2/r^2$, где r — расстояние между частицами.

Ответ. 20 м/с

30.25(30.26). Определить скорость v_0, которую нужно сообщить по вертикали вверх телу, находящемуся на поверхности Земли, для того, чтобы оно поднялось на высоту, равную земному радиусу, при этом нужно принять во внимание только силу притяжения Земли, которая изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния тела от центра Земли. Радиус Земли равен $6{,}37 \cdot 10^6$ м, ускорение силы притяжения на поверхности Земли равно 9,8 м/с².

Ответ. 7,9 км/с

30.26(30.27). Найти, с какой скоростью v_0 нужно выбросить снаряд с поверхности Земли по направлению к Луне, чтобы он достиг точки, где силы притяжения Земли и Луны равны, и остался в этой точке в равновесии. Движением Земли и Луны и сопротивлением воздуха пренебречь. Ускорение силы тяжести у поверхности Земли $g = 9{,}8$ м/с. Отношение массы Луны и Земли $m : M = 1 : 80$; расстояние между ними $d = 60R$, где считаем $R = 6000$ км (радиус Земли).

Коэффициент f, входящий в формулу для величины силы всемирного тяготения, находим из уравнения

$$mg = mf\left[\frac{M}{R^2} - \frac{m}{(d-R)^2}\right].$$

Ответ: $v_0^2 = \dfrac{2gR(d-R)}{d}\,\dfrac{\sqrt{\dfrac{M}{m}}\,(d-R) - R}{\sqrt{\dfrac{M}{m}}\,(d-R) + R} = \dfrac{59}{30}\,\dfrac{1-\alpha}{1+\alpha}\,gR$, где $\alpha = \dfrac{1}{59\sqrt{80}}$, или $v_0 = 10{,}75$ км/с

30.27. Грунт утрамбовывается ручной бабой массы 60 кг и с поперечным сечением 12 дм², которая падает с высоты 1 м. При последнем ударе баба входит в грунт на глубину 1 см, причем сопротивление грунта движению бабы можно считать постоянным. Какую наибольшую нагрузку выдержит грунт, не давая осадки? Допускается, что утрамбованный грунт может выдержать без осадки нагрузку, не превосходящую того сопротивления, которое встречает баба, углубляясь в грунт.

Ответ 494,9 кПа

30.28(30.28). Шахтный лифт движется вниз со скоростью $v_0 = 12$ м/с. Масса лифта 6 т. Какую силу трения между лифтом и стенками шахты должен развить предохранительный парашют, чтобы остановить лифт на протяжении пути $s = 10$ м, если канат, удерживающий лифт, оборвался? Силу трения считать постоянной.

Ответ: $F = m\left(g + \frac{v_0^2}{2s}\right) = 102$ кН.

30.29. Кольцо массы 200 г скользит вниз по проволочной дуге, имеющей форму параболы $y = x^2$. Кольцо начало двигаться из точки $x = 3$ м, $y = 9$ м с нулевой начальной скоростью. Определить скорость кольца и силу, действующую на кольцо со стороны проволоки, в момент прохождения им нижней точки параболы.

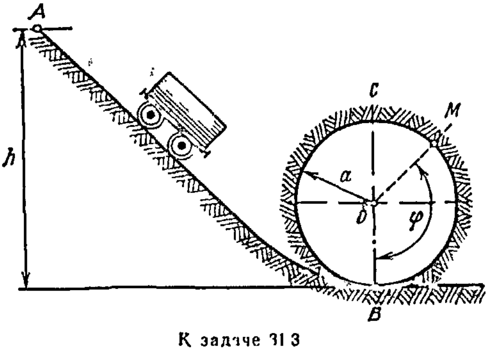
Ответ: $v_1 = 13{,}3$ м/с, $R = 72{,}5$ Н.

30.30. Математический маятник длины l вывели из положения равновесия, сообщив ему начальную скорость v_0, направленную по горизонтали. Определить длину дуги, которую он опишет в течение одного периода.

Ответ: $s = 4l \arccos\left(1 - \frac{v_0^2}{2gl}\right)$

§ 31. Смешанные задачи

31.1(31.1). Груз массы 1 кг подвешен на нити длины 0,5 м в неподвижной точке O. В начальный момент груз отклонен от вертикали на угол 60°, и ему сообщена скорость v_0 в вертикальной плоскости по перпендикуляру к нити вниз, равная 2,1 м/с. Определить натяжение нити в наинизшем положении и отсчитываемую по вертикали высоту, на которую груз поднимается над этим положением.



К задаче 31.3

Ответ: 28,4 Н, 47,5 см.

31.2(31.2). Сохраняя условия предыдущей задачи, кроме величины скорости v_0, найти, при какой величине скорости v_0 груз будет проходить всю окружность.

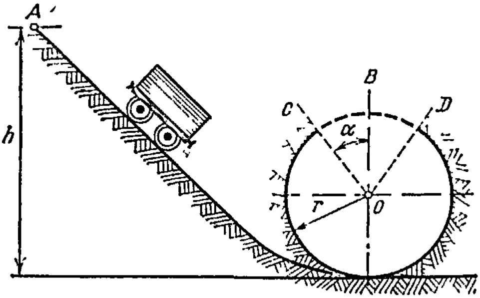
Ответ. $v_0 > 4{,}43$ м/с

31.3(31.3). По рельсам, положенным по пути AB и образующим затем петлю в виде кругового кольца BC радиуса a, скатыается вагонетка массы m С какой высоты h нужно пустить вагонетку без начальной скорости, чтобы она могла пройти всю окружность кольца, не отделяясь от него? Определить давление N вагонетки на кольцо в точке M, для которой $\angle MOB = \varphi$.

Ответ: $h \geqslant 2{,}5a$, $N = mg\left(\frac{2h}{a} - 2 + 3\cos\varphi\right)$.

31.4(31.4). Путь, по которому движется вагонетка, скатываясь из точки A, образует разомкнутую петлю радиуса r, как показано на рисунке; $\angle BOC = \angle BOD = \alpha$. Найти, с какой высоты h должна скатываться вагонетка без начальной скорости, чтобы она могла пройти всю петлю, а также то значение угла α, при котором эта высота h наименьшая

Указание На участке DC центр тяжести вагонетки совершает параболическое движение



К задаче 31 4

Ответ: $h = r\left(1 + \cos\alpha + \frac{1}{2\cos\alpha}\right)$; $h_{\min}$ при $\alpha = 45°$.

31.5(31.5). Тяжелая стальная отливка массы $M = 20$ кг прикреплена к стержню, который может вращаться без трения вокруг неподвижной оси O. Отливка падает из верхнего положения A с ничтожно малой начальной скоростью. Пренебрегая массой стержня, определить наибольшее давление на ось. (См. рисунок к задаче 30 14.)

Ответ: 980 Н.

31.6(31.6). Какой угол с вертикалью составляет вращающийся стержень (в предыдущей задаче) в тот момент, когда давление на ось равно нулю?

Ответ: $\varphi = \arccos(2/3)$.

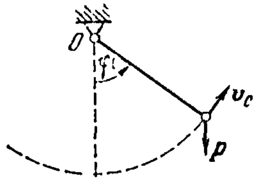
31.7(31.7). Парашютист массы 70 кг выбросился из самолета и, пролетев 100 м, раскрыл парашют. Найти силу натяжения стропов, на которых человек был подвешен к парашюту, если в течение первых пяти секунд с момента раскрытия парашюта, при постоянной силе сопротивления движению, скорость парашютиста уменьшилась до 4,3 м/с. Сопротивлением воздуха движению человека пренебречь

Ответ: 1246 Н

31.8(31.8). За 500 м до станции, стоящей на пригорке высоты 2 м, машинист поезда, идущего со скоростью 12 м/с, закрыл пар и начал тормозить. Как велико должно быть сопротивление от торможения, считаемое постоянным, чтобы поезд остановился у станции, если масса поезда равна 1000 т, а сопротивление трения 20 кН?

Ответ: 81,8 кН.

31.9(31.9) Тяжелая отливка массы m прикреплена к стержню, который может вращаться без трения вокруг неподвижной оси O и отклонен от вертикали на угол φ_0. Из этого начального положения отливке сообщают начальную скорость v_0 (см. рисунок). Определить усилие в стержне как функцию угла отклонения стержня от вертикали, пренебрегая массой стержня. Длина стержня l.

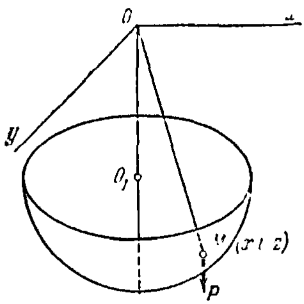


К задаче 31.9

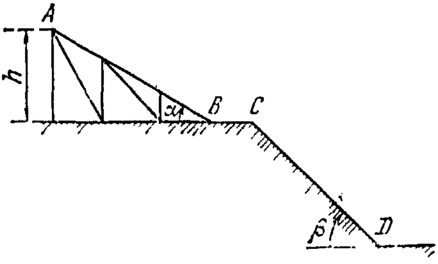
Ответ. $N = 3mg\cos\varphi - 2mg\cos\varphi_0 + mv_0^2/l$.

Если $N > 0$, стержень растянут, если $N < 0$, стержень сжат.

31.10(31.10). Сферический маятник состоит из нити OM длины l, прикрепленной одним концом к неподвижной точке O, и тяжелой точки M веса P, прикрепленной к другому концу нити. Точку M отклонили из положения равновесия так, что ее координаты стали при $t = 0$ $x = x_0$, $y = 0$, и сообщили ей начальную скорость: $\dot{x}_0 = 0$, $\dot{y}_0 = v_0$, $\dot{z}_0 = 0$. Определить, при каком соотношении начальных условий точка M будет описывать окружность в горизонтальной плоскости и каково будет время обращения точки M по этой окружности.



К задаче 31.10



К задаче 31.11

Ответ. $v_0 = x_0\sqrt{g/z_0}$, $T = 2\pi\sqrt{z_0/g}$.

31.11(31.11). Лыжник при прыжке с трамплина спускается с эстакады AB, наклоненной под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. Перед отрывом он проходит небольшую горизонтальную площадку BC, длиной которой при расчете пренебрегаем. В момент отрыва лыжник толчком сообщает себе вертикальную составляющую скорости $v_y = 1$ м/с. Высота эстакады $h = 9$ м, коэффициент трения лыж о снег $f = 0{,}08$, линия приземления CD образует угол $\beta = 45°$ с горизонтом. Определить дальность l полета лыжника, пренебрегая сопротивлением воздуха.

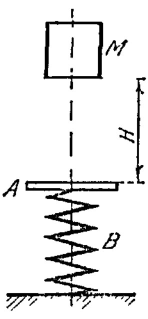
Примечание. Дальностью полета считать длину, измеряемую от точки отрыва C до точки приземления лыжника на линии CD.

Ответ. $l = 47{,}4$ м.

31.12(31.12). Груз M веса P падает без начальной скорости с высоты H на плиту A, лежащую на спиральной пружине B. От действия упавшего груза M пружина сжимается на величину h. Не учитывая веса плиты A и сопротивлений, вычислить время T сжатия пружины на величину h и импульс S упругой силы пружины за время T.

Ответ: $T = \frac{1}{k}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, $S = P\left(T + \sqrt{\frac{2H}{g}}\right)$,

где $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{h}{2\sqrt{H(H+h)}}$, $k = \frac{\sqrt{2g(H+h)}}{h}$.

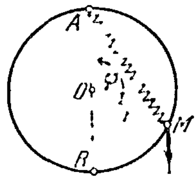


К задаче 31.12

31.13(31.13). При разрыве маховика одна из его частей, наиболее удаленная от места катастрофы, оказалась на расстоянии $s = 280$ м от первоначального положения. Пренебрегая сопротивлением воздуха при движении указанной части из первоначального положения в конечное, лежащее в той же горизонтальной плоскости, найти наименьшее возможное значение угловой скорости маховика в момент катастрофы, если радиус маховика $R = 1{,}75$ м.

Ответ. $n = 286$ об/мин, или $\omega = 30$ рад/с.

31.14(31.14). Груз M, подвешенный на пружине к верхней точке A круглого кольца, расположенного в вертикальной плоскости, падает, скользя по кольцу без трения. Найти, какова должна быть жесткость пружины для того, чтобы давление груза на кольцо в нижней точке B равнялось нулю при следующих данных: радиус кольца 20 см, масса груза 5 кг, в начальном положении груза расстояние AM равно 20 см и пружина имеет натуральную длину, начальная скорость груза равна нулю, массой пружины пренебречь.



К задаче 31.14

Ответ. Пружина должна удлиняться на 1 см при действии силы, равной 4,9 Н.

31.15(31.15). Определить давление груза M на кольцо в нижней точке B (рисунок предыдущей задачи) при следующих данных: радиус кольца 20 см, масса груза 7 кг, в начальном положении груза расстояние AM равно 20 см, причем пружина растянута и длина ее вдвое больше натуральной длины, которая равна 10 см, жесткость пружины такова, что она удлиняется на 1 см при действии силы в 1,9 Н, начальная скорость груза равна нулю, массой пружины пренебрегаем.

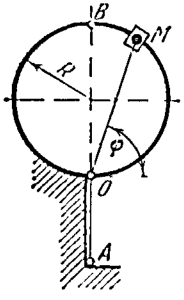
Ответ. Давление направлено вверх и равно 68,6 Н.

31.16(31.16). Гладкое тяжелое кольцо M веса Q может скользить без трения по дуге окружности радиуса R см, расположенной в вертикальной плоскости. К кольцу привязана упругая нить MOA, проходящая через гладкое неподвижное кольцо O и закрепленная в точке A. Принять, что натяжение нити равно нулю, когда кольцо M находится в точке O, и что для вытягивания нити на 1 см нужно приложить силу c. В начальный момент кольцо находится в точке

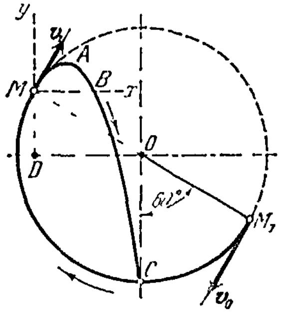
B в неустойчивом равновесии и при ничтожно малом толчке начинает скользить по окружности. Определить давление *N*, производимое кольцом на окружность.

Ответ. $N = 2Q + cR + 3(Q + cR)\cos 2\varphi$; давление направлено наружу при $N > 0$, внутрь при $N < 0$.

31.17(31.17). Груз подвешен на нити длины 0,5 м в неподвижной точке *O*. В начальном положении M_0 груз отклонен от вертикали на угол 60°, и ему сообщена скорость v_0 в вертикальной плоскости по перпендикуляру к нити вниз, равная 3,5 м/с.



К задаче 31.16



К задаче 31.17

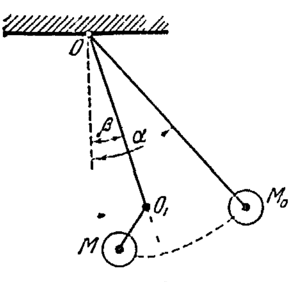
1) Найти то положение *M* груза, в котором натяжение нити будет равно нулю, и скорость v_1 в этом положении.

2) Определить траекторию последующего движения груза до того момента, когда нить будет опять натянута, и время, в течение которого точка пройдет эту траекторию.

Ответ: 1) Положение *M* находится над горизонталью точки *O* на расстоянии $MD = 25$ см, $v_1 = 156{,}5$ см/с.

2) Парабола *MABC*, уравнение которой, отнесенное к осям *Mx* и *My*, имеет вид $y = x\sqrt{3} - 0{,}08x^2$; груз описывает эту параболу в течение 0,55 с.

31.18(31.18). Математический маятник установлен на самолете, который поднимается на высоту 10 км. На какую часть надо уменьшить длину нити маятника, чтобы период малых колебаний маятника на этой высоте остался без изменений? Силу тяжести считать обратно пропорциональной квадрату расстояния до центра Земли.



К задаче 31.19

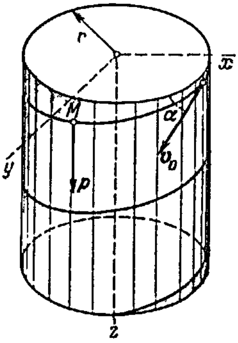
Ответ: На $0{,}00313l$, где l — длина нити на поверхности Земли.

31.19(31.19). В неподвижной точке *O* посредством нити *OM* длины *l* подвешен груз *M* массы *m*. В начальный момент нить *OM* составляет с вертикалью угол α и скорость груза *M* равна нулю. При последующем движении нить встречает тонкую проволоку O_1, направление которой перпендикулярно плоскости движения груза, а положение определяется полярными координатами: $h = OO_1$ и β. Определить наименьшее значение угла α, при котором нить *OM* после встречи с проволокой будет на нее навиваться, а также изменение натяжения нити в момент ее встречи с проволокой. Толщиной проволоки пренебречь.

Ответ: $\alpha=\arccos\left[\frac{h}{l}\left(\frac{3}{2}+\cos\beta\right)-\frac{3}{2}\right]$, натяжение нити увеличивается на величину $2mg\frac{h}{l}\left(\frac{3}{2}+\cos\beta\right)$.

31.20(31.20). Тяжелая точка M массы m движется по внутренней поверхности круглого цилиндра радиуса r. Считая поверхность цилиндра абсолютно гладкой и ось цилиндра вертикальной, определить давление точки на цилиндр. Начальная скорость точки равна по величине v_0 и составляет угол α с горизонтом.

Ответ. $N=\frac{mv_0^2\cos^2\alpha}{r}$.



К задаче 31.20

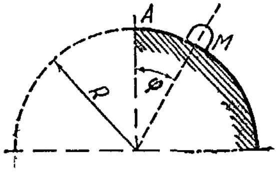
31.21(31.21). В предыдущей задаче составить уравнения движения точки, если в начальный момент точка находилась на оси x.

Ответ: $x=r\cos\left[\frac{v_0\cos\alpha}{r}t\right]$,

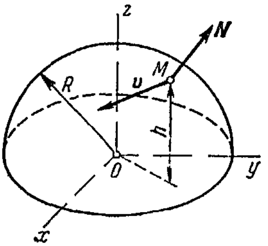
$y=r\sin\left[\frac{v_0\cos\alpha}{r}t\right]$, $z=v_0t\sin\alpha+gt^2/2$.

31.22(31.22). Камень M, находящийся на вершине A гладкого полусферического купола радиуса R, получает начальную горизонтальную скорость v_0. В каком месте камень покинет купол? При каких значениях v_0 камень сойдет с купола в начальный момент? Сопротивлением движению камня по куполу пренебречь.

Ответ. $\varphi=\arccos\left(\frac{2}{3}+\frac{v_0^2}{3gR}\right)$, $v_0\geqslant\sqrt{gR}$.



К задаче 31.22



К задаче 31.23

31.23(31.23). Точка M массы m движется по гладкой поверхности полусферического купола радиуса R. Считая, что на точку действует сила тяжести, параллельная оси z, и зная, что в начальный момент точка имела скорость v_0 и находилась на высоте h_0 от основания купола, определить давление точки на купол, когда она будет на высоте h от основания купола.

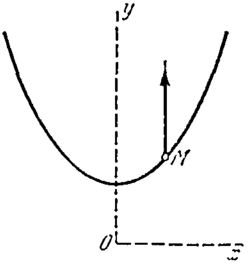
Ответ. $N=\frac{mg}{R}\left(3h-2h_0-\frac{v_0^2}{g}\right)$.

31.24(31.24). Точка M массы m движется по цепной линии

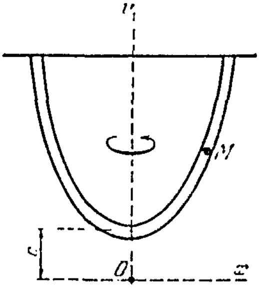
$$y = \frac{a}{2}\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right) = a \operatorname{ch}\frac{x}{a}$$

под действием силы отталкивания, параллельной оси Oy, направленной от оси Ox и равной kmy. В момент $t = 0$ $x = 1$ м, $\dot{x} = 1$ м/с. Определить давление N точки на кривую и движение точки при $k = 1$ рад/с^2 и $a = 1$ м (силой тяжести пренебрегаем). Радиус кривизны цепной линии равен y^2/a.

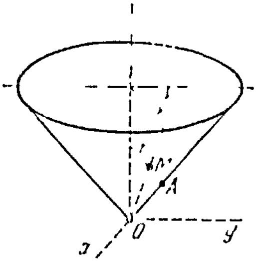
Ответ. $N = 0$, $x = (1 + t)$ м.



К задаче 31.24



К задаче 31.25



К задаче 31.26

31.25(31.25). По какой плоской кривой следует изогнуть трубку, чтобы помещенный в нее в любом месте шарик оставался по отношению к трубке в равновесии, если трубка вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси Oy?

Ответ. По параболе $y = \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{g}x^2 + c$.

31.26(31.26). Точка M массы $m = 1$ кг движется по гладкой поверхности круглого конуса, угол раствора которого $2\alpha = 90°$, под влиянием силы отталкивания от вершины O, пропорциональной расстоянию: $F = c \cdot OM$ Н, где $c = 1$ Н/м. В начальный момент точка M находится в точке A, расстояние OA равно $a = 2$ м, начальная скорость $v_0 = 2$ м/с и направлена параллельно основанию конуса.

Определить движение точки M (силой тяжести пренебречь).

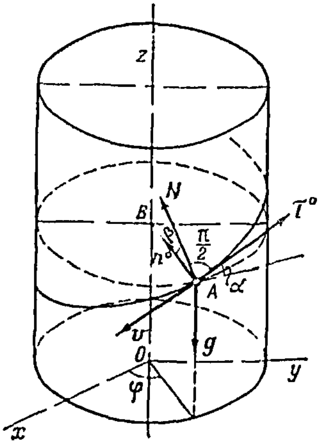
Положение точки M определяем координатой z и полярными координатами r и φ в плоскости, перпендикулярной оси Oz; уравнение поверхности конуса $r^2 - z^2 = 0$.

Ответ: $r^2 = e^{2t} + e^{-2t}$, $\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}\right) = e^{2t}$.

31.27(31.27). При условиях предыдущей задачи, считая ось конуса направленной по вертикали вверх и учитывая силу тяжести, определить давление точки на поверхность конуса.

Ответ. $N = m \sin\alpha\left[g + \frac{a^2 v_0^2 \sin\alpha}{2r^3}\right]$.

31.28(31.28). Материальная точка A под действием силы тяжести движется по шероховатой винтовой поверхности, ось которой Oz вертикальна, поверхность задана уравнением $z = a\varphi + f(r)$; коэффициент трения точки о поверхность равен k. Найти условие, при котором движение точки происходит на постоянном расстоянии от оси $AB = r_0$, т. е. происходит по винтовой линии, а также найти скорость этого движения, предполагая, что $a = \mathrm{const}$.

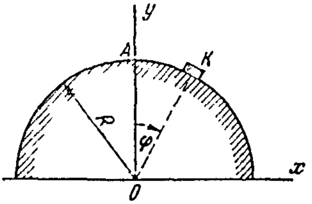


К задаче 31.28

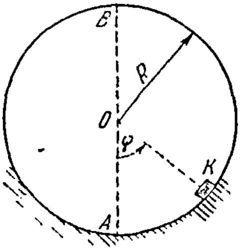
Указание. Для решения задачи целесообразно воспользоваться системой естественных осей, проектируя уравнение движения на касательную, главную нормаль и бинормаль винтовой линии в точке A. На рисунке угол между нормальной компонентой N реакции винтовой поверхности и ортом главной нормали n^0 обозначен через β.

Ответ. Движение по винтовой линии возможно при условии $\operatorname{tg}\alpha - k\sqrt{1 + f'^2(r_0)\cos^2\alpha} = 0$, где $\operatorname{tg}\alpha = a/r_0$; скорость движения $v = \sqrt{gr_0 f'(r_0)}$.

31.29(31.29). Тело K, размерами которого можно пренебречь, установлено в верхней точке A шероховатой поверхности неподвижного полуцилиндра радиуса R. Какую начальную горизонтальную скорость v_0, направленную по касательной к цилиндру, нужно сообщить телу K, чтобы оно, начав движение, остановилось на поверхности цилиндра, если коэффициенты трения скольжения при движении и покое одинаковы и равны f?



К задаче 31.29



К задаче 31.30

Ответ: $v_0 \leqslant \sqrt{\frac{2gR}{1+4f^2}\left[\sqrt{1+f^2}\,e^{-2f\varphi_0} - (1-2f^2)\right]}$, где $\varphi_0 = \operatorname{arctg} f$.

31.30(31.30). Тело K, размерами которого можно пренебречь, установлено в нижней точке A внутренней части шероховатой поверхности неподвижного цилиндра радиуса R. Какую начальную горизонтальную скорость v_0, направленную по касательной к цилиндру, нужно сообщить телу K, чтобы оно достигло верхней точки B цилиндра? Коэффициент трения скольжения равен f.

Ответ: $v_0 \geqslant \sqrt{\frac{gR}{1+4f^2}\left[2(1-2f^2)+3e^{2\pi f}\right]}$

31.31. Шарик, подвешенный на нити, описывает окружность в горизонтальной плоскости, образуя конический маятник. Найти высоту конуса, если шарик совершает 20 оборотов в минуту

Ответ: $h = 2{,}25$ м.

31.32. Материальная точка единичной массы движется в горизонтальной плоскости под действием силового поля с потенциалом $\Pi = x^2 + xy + y^2$. В начальный момент точка имеет координаты $x = 3$ см, $y = 4$ см и скорость 10 см/с, параллельную положительному направлению оси x. Определить движение точки.

Ответ: $x = 3{,}5\cos\sqrt{3}\,t + \frac{5\sqrt{3}}{3}\sin\sqrt{3}\,t - 0{,}5\cos t + 5\sin t,$

$$y = 3{,}5\cos\sqrt{3}\,t + \frac{5\sqrt{3}}{3}\sin\sqrt{3}\,t + 0{,}5\cos t - 5\sin t$$

31.33. Маленькому кольцу, надетому на проволочную горизонтальную окружность радиуса a, сообщили начальную скорость v_0. Коэффициент трения кольца о проволоку равен f. Определить, через какое время кольцо остановится.

Ответ: $t = \frac{a}{f}\int\limits_0^{v_0}\frac{dv}{\sqrt{v^4 + a^2g^2}}.$

31.34. Материальная точка массы 2 кг притягивается к некоторому центру силой $\boldsymbol{F} = (-8x\boldsymbol{i} - 8y\boldsymbol{j} - 2z\boldsymbol{k})$ Н. Начальное положение материальной точки определяется координатами $x = 4$ см, $y = 2$ см, $z = 4$ см. Начальная скорость равна нулю. Определить уравнения движения точки и ее траекторию

Ответ: $x = 4\cos 2t$, $y = 2\cos 2t$, $z = 4\cos t$. Траектория — линия пересечения двух параболических цилиндров $x = \frac{z^2}{2} - 4$ и $y = \frac{z^2}{4} - 2$. Это — парабола, лежащая в плоскости $x = 2y$. Движение по траектории осуществляется на участке от точки $x = 4$ см, $y = 2$ см, $z = 4$ см до точки $x = 4$ см, $y = 2$ см, $z = -4$ см

31.35. Конический маятник имеет длину l и описывает в горизонтальной плоскости окружность радиуса a. Определить период обращения конического маятника.

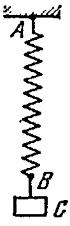
Ответ: $T = \frac{2\pi\sqrt[4]{l^2 - a^2}}{\sqrt{g}}.$

§ 32. Колебательное движение

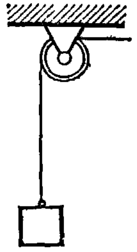
а) Свободные колебания

32.1(32.1). Пружина AB, закрепленная одним концом в точке A, такова, что для удлинения ее на 1 м необходимо приложить в точке B при статической нагрузке силу 19,6 Н. В некоторый момент к нижнему концу B недеформированной пружины подвешивают гирю C массы 0,1 кг и отпускают ее без начальной скорости. Пренебрегая массой пружины, написать уравнение дальнейшего движения гири и указать амплитуду и период ее колебаний, отнеся движение к оси, проведенной вертикально вниз из положения статического равновесия гири

Ответ. $x=-0{,}05\cos 14t$ м, $a=5$ см, $T=0{,}45$ с.



К задаче 32.1



К задаче 32.2

32.2(32.2). При равномерном спуске груза массы $M=2$ т со скоростью $v=5$ м/с произошла неожиданная задержка верхнего конца троса, на котором опускался груз, из-за защемления троса в обойме блока. Пренебрегая массой троса, определить его наибольшее натяжение при последующих колебаниях груза, если коэффициент жесткости троса $4\cdot 10^6$ Н/м

Ответ: 466,8 кН.

32.3(32.3). Определить наибольшее натяжение троса в предыдущей задаче, если между грузом и тросом введена упругая пружина с коэффициентом жесткости $c_1=4\cdot 10^5$ Н/м.

Ответ: 154,4 кН.

32.4(32.4). Груз Q, падая с высоты $h=1$ м без начальной скорости, ударяется об упругую горизонтальную балку в ее середине; концы балки закреплены. Написать уравнение дальнейшего движения груза на балке, отнеся движение к оси, проведенной вертикально вниз из положения статического равновесия груза на балке, если статический прогиб балки в ее середине при указанной нагрузке равен 0,5 см; массой балки пренебречь

Ответ: $x=(-0{,}5\cos 44{,}3t+10\sin 44{,}3t)$ см

32.5(32.5). На каждую рессору вагона приходится нагрузка P Н; под этой нагрузкой рессора при равновесии прогибается на 5 см. Определить период T собственных колебаний вагона на рессорах. Упругое сопротивление рессоры пропорционально стреле ее прогиба.

Ответ: $T=0{,}45$ с.

32.6(32.6). Определить период свободных колебаний фундамента машины, поставленного на упругий грунт, если масса фундамента с машиной $M=90$ т, площадь подошвы фундамента $S=15$ м^2, коэффициент жесткости грунта $c=\lambda S$, где $\lambda=30$ Н/см^3 — так называемая удельная жесткость грунта

Ответ: $T=0{,}089$ с

32.7(32.7). Найти период свободных вертикальных колебаний корабля на спокойной воде, если масса корабля M т, площадь его горизонтальной проекции S м^2. Плотность воды $\rho=1$ т/м^3. Силами, обусловленными вязкостью воды, пренебречь

Ответ: $T=2\pi\sqrt{\dfrac{M}{\rho g S}}$.

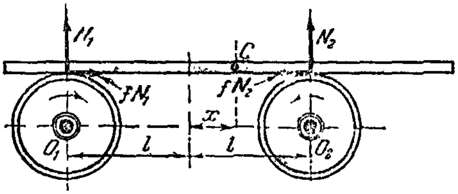
32.8(32.8). В условиях предыдущей задачи найти уравнение движения корабля, если он был спущен на воду с нулевой вертикальной скоростью.

Ответ: $y = -\frac{M}{\rho S}\cos\sqrt{\frac{\rho g S}{M}}\,t$ м.

32.9(32.9). Груз, вес которого равен P Н, подвешен на упругой нити к неподвижной точке. Выведенный из положения равновесия, груз начинает совершать колебания. Выразить длину нити x в функции времени и найти, какому условию должна удовлетворять начальная длина ее x_0, чтобы во время движения груза нить оставалась натянутой. Натяжение нити пропорционально удлинению; длина ее в нерастянутом состоянии равна l, от действия статической нагрузки, равной q Н, нить удлиняется на 1 см. Начальная скорость груза равна нулю.

Ответ: $x = l + \frac{P}{q} + \left(x_0 - l - \frac{P}{q}\right)\cos\left(\sqrt{\frac{qg}{P}}\,t\right)$, $l \leqslant x_0 \leqslant l + \frac{2P}{q}$.

32.10(32.10). На два вращающихся в противоположные стороны, указанные на рисунке, цилиндрических шкива одинакового радиуса свободно положен однородный стержень; центры шкивов O_1 и O_2 находятся на горизонтальной прямой O_1O_2, расстояние $O_1O_2 = 2l$, стержень приводится в движение силами трения, развивающимися в точках касания его со шкивами, эти силы пропорциональны давлению стержня на шкив, причем коэффициент пропорциональности (коэффициент трения) равен f.



К задаче 32.10

1) Определить движение стержня после того, как мы сдвинем его из положения симметрии на x_0 при $v_0 = 0$.

2) Найти коэффициент трения f, зная, что период колебаний T стержня при $l = 25$ см равен 2 с.

Ответ: 1) $x = x_0\cos\left(\sqrt{\frac{fg}{l}}\,t\right)$. 2) $f = \frac{4\pi^2 l}{gT^2} = 0{,}25$.

32.11(32.11). К одной и той же пружине подвесили сначала груз веса p, а во второй раз груз веса $3p$. Определить, во сколько раз изменится период колебаний. Зная коэффициент жесткости пружины c, а также начальные условия (грузы подвешивались к концу нерастянутой пружины и отпускались без начальной скорости), найти уравнения движения грузов.

Ответ: $\frac{T_2}{T_1} = \sqrt{3}$, $x_1 = -\frac{p}{c}\cos\sqrt{\frac{cg}{p}}\,t$, $x_2 = -\frac{3p}{c}\cos\sqrt{\frac{cg}{3p}}\,t$.

32.12(32.12). К пружине жесткости $c = 2$ кН/м сначала подвесили груз массы 6 кг, а затем заменили его грузом вдвое большей массы. Определить частоты и периоды колебаний грузов.

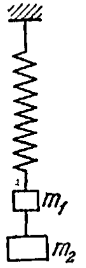
Ответ: $k_1 = 18{,}26$ рад/с, $k_2 = 12{,}9$ рад/с, $T_1 = 0{,}344$ с, $T_2 = 0{,}49$ с.

32.13(32.13). К пружине, коэффициент жесткости которой равен $c = 19{,}6$ Н/м, были подвешены два груза с массами $m_1 = 0{,}5$ кг и $m_2 = 0{,}8$ кг. Система находилась в покое в положении статического равновесия, когда груз m_2 убрали. Найти уравнение движения, частоту, круговую частоту и период колебаний оставшегося груза.

Ответ $x = 0{,}4 \cos 6{,}26t$ м; $f = 1$ Гц, $k = 2\pi$ рад/с, $T = 1$ с

32.14(32.14). Груз массы $m_1 = 2$ кг, подвешенный к пружине, коэффициент жесткости которой $c = 98$ Н/м, находится в равновесии. В некоторый момент к грузу m_1 добавили груз $m_2 = 0{,}8$ кг. Определить уравнение движения и период колебаний двух грузов

Ответ. $x_0 = -0{,}08 \cos 5{,}916t$ м, $T = 1{,}062$ с.

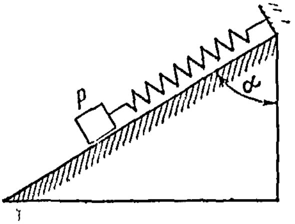


К задаче 32 13

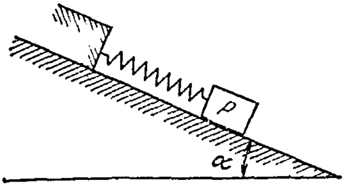
32.15(32.15). Груз подвесили сначала к пружине с жесткостью $c_1 = 2$ кН/м, а затем к пружине с жесткостью $c_2 = 1$ кН/м Найти отношение частот и отношение периодов колебаний груза в этих двух случаях

Ответ: $\frac{k_1}{k_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}7071$, $\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{2} = 1{,}4142$

32.16(32.16). Тело массы m находится на наклонной плоскости, составляющей угол α с вертикалью. К телу прикреплена пружина, жесткость которой c Пружина параллельна наклонной плоскости. Найти уравнение движения тела, если в начальный момент оно было прикреплено к концу нерастянутой пружины и ему была сообщена начальная скорость v_0, направленная вниз по наклонной плоскости. Начало координат взять в положении статического равновесия.



К задаче 32 16



К задаче 32 17

Ответ: $x = \frac{v_0}{k} \sin kt - \frac{mg \cos \alpha}{c} \cos kt$, где $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$

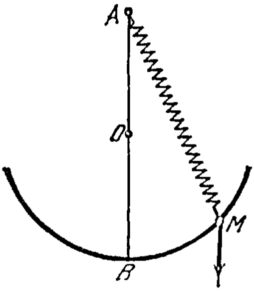
32.17(32.17). На гладкой плоскости, наклоненной к горизонту под углом α находится прикрепленный к пружине груз веса P. Статическое удлинение пружины равно f. Определить колебания груза, если в начальный момент пружина была растянута из ненапряженного состояния на длину, равную $3f$, и груз отпущен без начальной скорости.

Ответ: $x = 2f\cos\left(\sqrt{\frac{g}{f}\sin\alpha}\cdot t\right)$.

32.18(32.18). Тело массы $M = 12$ кг, прикрепленное к концу пружины, совершает гармонические колебания. При помощи секундомера установлено, что тело совершило 100 полных колебаний за 45 с. После этого к концу пружины добавочно прикрепили груз массы $M_1 = 6$ кг. Определить период колебаний двух грузов на пружине.

Ответ: $T_1 = T\sqrt{\frac{M+M_1}{M}} = 0{,}55$ с.

32.19(32.19). В условиях предыдущей задачи найти уравнение движения одного груза M и двух грузов $M + M_1$, если в обоих случаях грузы были подвешены к концу нерастянутой пружины.



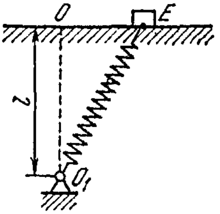
К задаче 32.20

Ответ: 1) $x = -5{,}02\cos 14t$ см, 2) $x_1 = -7{,}53\cos 11{,}4t$ см, где x и x_1 отсчитываются соответственно от каждого из двух положений статического равновесия.

32.20(32.20). Груз M, подвешенный к неподвижной точке A на пружине, совершает малые гармонические колебания в вертикальной плоскости, скользя без трения по дуге окружности, диаметр которой AB равен l, натуральная длина пружины a; жесткость пружины такова, что при действии силы, равной весу груза M, она получает удлинение, равное b. Определить период T колебаний в том случае, когда $l = a + b$; массой пружины пренебречь и считать, что при колебаниях она остается растянутой.

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{l/g}$.

32.21(32.21). В условиях предыдущей задачи найти уравнение движения груза M, если в начальный момент $\angle BAM = \varphi_0$ и точке M сообщили начальную скорость v_0, направленную по касательной к окружности вниз.



К задаче 32.22

Ответ: $\varphi = \varphi_0\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t - \frac{v_0}{\sqrt{lg}}\sin\sqrt{\frac{g}{l}}\,t$.

32.22(32.22). Тело E, масса которого равна m, находится на гладкой горизонтальной плоскости. К телу прикреплена пружина жесткости c, второй конец которой прикреплен к шарниру O_1. Длина недеформированной пружины равна l_0, в положении равновесия тела пружина имеет конечный предварительный натяг, равный $F_0 = c(l - l_0)$, где $l = OO_1$. Учитывая в горизонтальной составляющей упругой силы пружины лишь линейные члены относительно отклонения тела от положения равновесия, определить период малых колебаний тела.

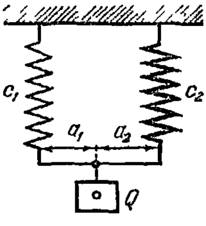
Ответ $T = 2\pi\sqrt{ml/F_0}$.

32.23(32.23) Материальная точка массы m подвешена к концу нерастянутой пружины с коэффициентом жесткости c и отпущена начальной скоростью v_0, направленной вниз. Найти уравнение движения и период колебаний точки, если в момент времени, когда точка находилась в крайнем нижнем положении, к ней прикладывают силу $Q = \text{const}$, направленную вниз.

Начало координат выбрать в положении статического равновесия, т. е. на расстоянии P/c от конца нерастянутой пружины.

Ответ $x = \frac{Q}{c} + \left[\sqrt{\left(\frac{v_0}{k}\right) + \left(\frac{mg}{c}\right)^2} - \frac{Q}{c}\right]\cos\sqrt{\frac{c}{m}}\,t$, где t отсчитывается от момента времени, когда начала действовать сила Q, $T = 2\pi\sqrt{m/c}$.

32.24(32.24) Определить период свободных колебаний груза массы m, прикрепленного к двум параллельно включенным пружинам, и коэффициент жесткости пружины, эквивалентной данной двойной пружине, если груз расположен так, что удлинения обеих пружин, обладающих заданными коэффициентами жесткости c_1 и c_2, одинаковы.



К задаче 32.24

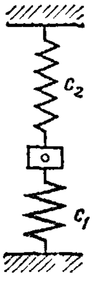
Ответ $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{(c_1 + c_2)}}$, $c = c_1 + c_2$, расположение груза таково, что $a_1/a_2 = c_2/c_1$.

32.25(32.25) В условиях предыдущей задачи найти уравнение движения груза, если его подвесили к нерастянутым пружинам и сообщили ему начальную скорость v_0, направленную вверх.

Ответ

$$x = -\frac{mg}{c_1 + c_2}\cos\sqrt{\frac{(c_1 + c_2)}{m}}\,t - v_0\sqrt{\frac{m}{(c_1 + c_2)}}\sin\sqrt{\frac{(c_1 + c_2)}{m}}\,t.$$

32.26(32.26) Определить период свободных колебаний груза массы m, зажатого между двумя пружинами с разными коэффициентами жесткости c_1 и c_2.



К задаче 32.26

Ответ $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{(c_1 + c_2)}}$.

32.27(32.27) В условиях предыдущей задачи найти уравнение движения груза, если в положении равновесия ему сообщили скорость v_0, направленную вниз.

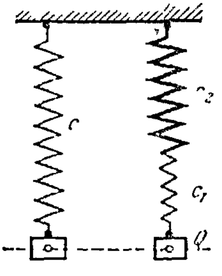
Ответ $x = v_0\sqrt{\frac{m}{(c_1 + c_2)}}\sin\sqrt{\frac{(c_1 + c_2)}{m}}\,t$.

32.28(32.28) Определить коэффициент жесткости c пружины, эквивалентной двойной пружине, состоящей из двух последовательно включенных пружин с разными коэффициентами жесткости

c_1 и c_2, и указать также период колебаний груза массы m, подвешенного на указанной двойной пружине.

Ответ: $c = \dfrac{c_1c_2}{c_1+c_2}$, $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m(c_1+c_2)}{c_1c_2}}$.

32.29(32.29). В условиях предыдущей задачи найти уравнение движения груза, если в начальный момент он находился ниже положения равновесия на расстоянии x_0 и ему сообщили скорость v_0, направленную вверх.



К задаче 32.28.

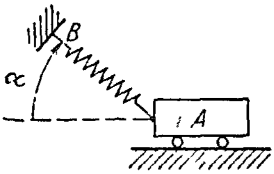
Ответ:

$$x = x_0\cos\sqrt{\frac{c_1c_2}{(c_1+c_2)m}}\,t - v_0\sqrt{\frac{(c_1+c_2)m}{c_1c_2}}\sin\sqrt{\frac{c_1c_2}{(c_1+c_2)m}}\,t.$$

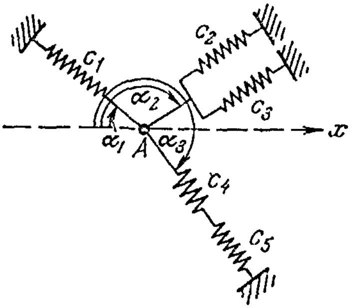
32.30(32.30). Определить коэффициент жесткости составной пружины, состоящей из двух последовательно соединенных пружин с разными коэффициентами жесткости $c_1 = 9,8$ Н/см и $c_2 = 29,4$ Н/см. Найти период колебаний, амплитуду и уравнения движения груза массы 5 кг, подвешенного к указанной составной пружине, если в начальный момент груз был смещен из положения статического равновесия на 5 см вниз и ему была сообщена начальная скорость 19 см/с, направленная также вниз.

Ответ: $c = \dfrac{c_1c_2}{c_1+c_2} = 7,35$ Н/см, $T = 0,517$ с, $a = 6,43$ см, $x = 5\cos 12,13t + 1,04\sin 12,13t$ дм.

32.31(32.31). Тело A, масса которого равна m, может перемещаться по горизонтальной прямой. К телу прикреплена пружина, коэффициент жесткости которой c. Второй конец пружины укреплен в неподвижной точке B. При угле $\alpha = \alpha_0$ пружина не деформирована. Определить частоту и период малых колебаний тела.



К задаче 32.31.



К задаче 32.32.

Ответ: $k = \sqrt{\dfrac{c\cos^2\alpha_0}{m}}$, $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{c\cos^2\alpha_0}}$.

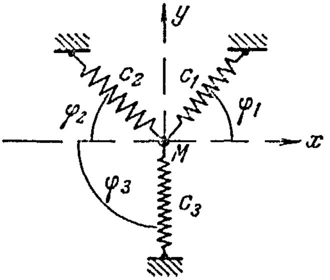
32.32(32.32). Точка A, масса которой равна m, прикреплена пружинами, как указано на рисунке. В исходном положении точка находится в равновесии и все пружины не напряжены. Определить коэффициент жесткости эквивалентной пружины при малых колебаниях точки вдоль оси x в абсолютно гладких направляющих и частоту свободных колебаний точки

Ответ: $c = c_1\cos^2\alpha_1 + (c_2+c_3)\cos^2\alpha_2 + \frac{c_4c_5}{c_4+c_5}\cos^2\alpha_3$, $k=\sqrt{\frac{c}{m}}$.

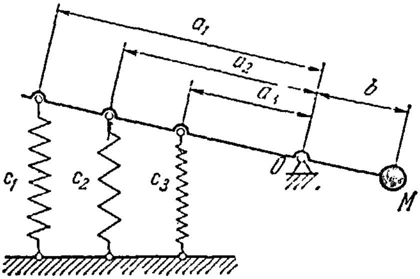
32.33(32.33). Определить коэффициент жесткости пружины, эквивалентной трем пружинам, показанным на рисунке, при колебаниях точки M в абсолютно гладких направляющих вдоль оси x. Решить ту же задачу, если направляющие расположены вдоль оси y. Определить частоты этих колебаний

Ответ: $c_x = c_1\cos^2\varphi_1 + c_2\cos^2\varphi_2$; $c_y = c_1\sin^2\varphi_1 + c_2\sin^2\varphi_2 + c_3$; $k_x = \sqrt{c_x/m}$, $k_y = \sqrt{c_y/m}$.

В исходном положении пружины не напряжены и точка M находится в равновесии



К задаче 32.33



К задаче 32.34

32.34(32.34). Определить коэффициент жесткости эквивалентной пружины, если груз M массы m прикреплен к стержню, массой которого можно пренебречь Стержень шарнирно закреплен в точке O и прикреплен тремя вертикальными пружинами к фундаменту Коэффициенты жесткости пружин c_1, c_2, c_3 Пружины прикреплены к стержню на расстояниях a_1, a_2, a_3 от шарнира Груз M прикреплен к стержню на расстоянии b от шарнира В положении равновесия стержень горизонтален. Эквивалентная пружина крепится к стержню на расстоянии b от шарнира Найти частоту малых колебаний груза

Ответ: $c = \frac{c_1a_1^2 + c_2a_2^2 + c_3a_3^2}{b^2}$, $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$.

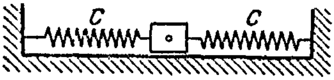
32.35(32.36). Винтовая пружина состоит из n участков, коэффициенты жесткости которых соответственно равны c_1, c_2, $\ldots$, c_n. Определить коэффициент жесткости c однородной пружины, эквивалентной данной, и период свободных колебаний точки, масса которой равна m

Ответ: $c = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{c_i}}$, $T = \frac{2\pi}{k}$, где $k=\sqrt{\frac{c}{m}}$.

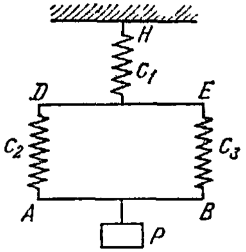
32.36(32.35). Груз массы 10 кг, лежащий на абсолютно гладкой горизонтальной плоскости зажат между двумя пружинами одинаковой жесткости $c = 19{,}6$ Н/см. В некоторый момент груз был сдвинут на 4 см от положения равновесия вправо и отпущен без начальной скорости. Найти уравнение движения, период колебаний, а также максимальную скорость груза.

Ответ. $x = 4\cos 19{,}8t$ см, $T = 0{,}317$ с, $x_{max} = 79{,}2$ см/с

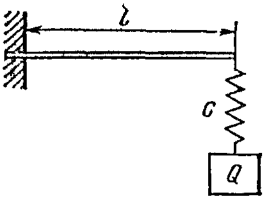
32.37(32.37). Груз P массы m подвешен к стержню AB, который соединен двумя пружинами, с коэффициентами жесткости c_2 и c_3, со стержнем DE. Последний прикреплен к потолку в точке H пружиной, коэффициент жесткости которой c_1. При колебаниях стержни AB и DE остаются горизонтальными. Определить коэффициент жесткости одной эквивалентной пружины, при которой груз P будет колебаться с той же частотой. Найти период свободных колебаний груза. Массой стержней пренебречь.



К задаче 32.36



К задаче 32.37



К задаче 32.38

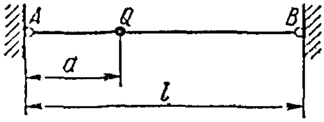
Ответ $c = \dfrac{c_1(c_2 + c_3)}{c_1 + c_2 + c_3}$, $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m(c_1 + c_2 + c_3)}{c_1(c_2 + c_3)}}$.

32.38(32.38). Определить собственную частоту колебаний груза Q массы m, подвешенного на конце упругой консоли длины l. Пружина, удерживающая груз, имеет жесткость c. Жесткость на конце консоли определяется формулой $c_1 = 3EJ/l^3$ (E — модуль упругости, J — момент инерции). Массой консоли пренебречь.

Ответ: $k = \sqrt{\dfrac{3EJc}{m(3EJ + cl^3)}}$

32.39(32.39). Колебания груза массы $M = 10$ кг, лежащего на середине упругой балки жесткости $c = 20$ Н/см, происходят с амплитудой 2 см. Определить величину начальной скорости груза, если в момент времени $t = 0$ груз находился в положении равновесия.

Ответ $v_0 = 28{,}3$ см/с



К задаче 32.40

32.40(32.40). Груз Q массы m закреплен горизонтально натянутым тросом $AB = l$. При малых вертикальных колебаниях груза натяжение троса S можно считать постоянным. Определить частоту свободных колебаний груза, если расстояние груза от конца троса A равно a.

Ответ. $k = \sqrt{\dfrac{Sl}{ma(l - a)}}$ рад/с.

32.41(32.41). Груз веса 490,5 Н лежит посередине балки AB. Момент инерции поперечного сечения балки $J = 80$ см^4. Определить длину балки l из условия, чтобы период свободных колебаний груза на балке был равен $T = 1$ с.

К задаче 32.41

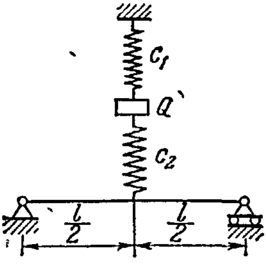
Примечание. Статический прогиб балки определяется формулой $f = \dfrac{Pl^3}{48EJ}$, где модуль упругости $E = 2{,}05\cdot 10^{11}$ Н/м^2.

Ответ: $l = 15{,}9$ м.

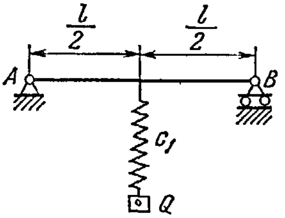
32.42(32.42). Груз Q массы m зажат между двумя вертикальными пружинами с коэффициентами жесткости c_1 и c_2. Верхний конец первой пружины закреплен неподвижно, а нижний конец второй пружины прикреплен к середине балки. Определить длину балки l так, чтобы период колебаний груза был равен T. Момент инерции поперечного сечения балки J, модуль упругости E.

$$\text{Ответ: } l = \sqrt[3]{\frac{48EJ\left(c_1 + c_2 - \dfrac{4\pi^2 m}{T^2}\right)}{c_2\left(\dfrac{4\pi^2 m}{T^2} - c_1\right)}}.$$

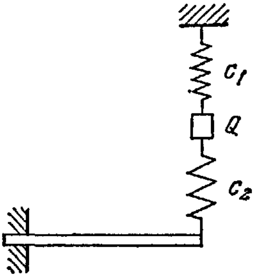
32.43(32.43). Найти уравнение движения и период колебаний груза Q массы m, подвешенного к пружине с коэффициентом жесткости c_1, если пружина прикреплена к середине балки длины l. Жесткость балки на изгиб EJ. В начальный момент груз находился в положении статического равновесия и ему была сообщена скорость v_0, направленная вниз.



К задаче 32.42



К задаче 32.43



К задаче 32.44

$$\text{Ответ: } x = v_0\sqrt{\frac{m\,(c_1 l^3 + 48EJ)}{48EJc_1}}\sin\sqrt{\frac{48EJc_1}{(c_1 l^3 + 48EJ)\,m}}\,t,$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(c_1 l^3 + 48EJ)\,m}{c_1\,48EJ}}.$$

32.44(32.44). Груз веса Q зажат между двумя вертикальными пружинами, коэффициенты жесткости которых равны c_1 и c_2. Верхний конец первой пружины закреплен неподвижно. Нижний конец второй пружины прикреплен к свободному концу балки, заделанной другим концом в стене. Зная, что свободный конец заделанной балки под действием силы P, приложенной к свободному концу балки, дает прогиб

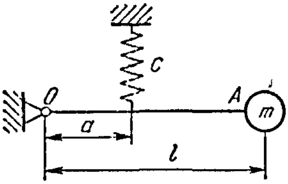
$$f=\frac{Pl^3}{3EJ},$$

где EJ — заданная жесткость балки при изгибе, определить длину балки l, при которой груз будет колебаться с данным периодом T. Найти уравнение движения груза, если в начальный момент он был подвешен к концам нерастянутых пружин и отпущен без начальной скорости.

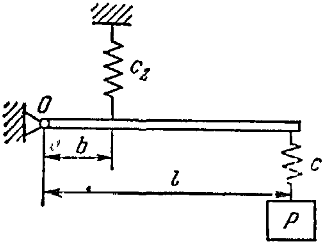
Ответ. $l=\sqrt[3]{\dfrac{3EJ\left(c_1+c_2-\dfrac{4\pi^2}{T^2}\cdot\dfrac{Q}{g}\right)}{c_2\left(\dfrac{4\pi^2}{T^2}\cdot\dfrac{Q}{g}-c_1\right)}}$,

$$x=-Q\frac{c_2l^3+3EJ}{c_1c_2l^3+(c_1+c_2)\,3EJ}\cos\sqrt{\frac{[c_1c_2l^3+(c_1+c_2)\,3EJ]\,g}{(c_2l^3+3EJ)\,Q}}\;t.$$

32.45(32.45). Стержень OA длины l, на конце которого помещен груз массы m, может поворачиваться вокруг оси O. На расстоянии a от оси O к стержню прикреплена пружина с коэффициентом жесткости c. Определить собственную частоту колебаний груза, если стержень OA в положении равновесия занимает горизонтальное положение. Массой стержня пренебречь.



К задаче 32.45



К задаче 32.46

Ответ: $k=\dfrac{a}{l}\sqrt{\dfrac{c}{m}}$ рад/с.

32.46(32.46). Груз P массы m подвешен на пружине к концу стержня длины l, который может поворачиваться вокруг оси O. Коэффициент жесткости пружины c_1. Пружина, поддерживающая стержень, установлена на расстоянии b от точки O и имеет коэффициент жесткости c_2. Определить собственную частоту колебаний груза P. Массой стержня пренебречь.

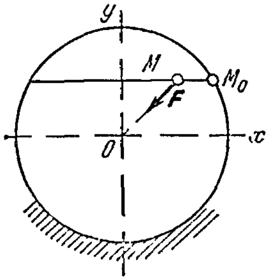
Ответ: $k=\sqrt{\dfrac{c_1c_2}{m\,[c_2+(l/b)^2\,c_1]}}$ рад/с.

32.47(32.47). Для определения ускорения силы тяжести в данном месте земного шара производят два опыта. К концу пружины подвешивают груз P_1 и наблюдают статическое удлинение пружины l_1. Затем к концу этой же пружины подвешивают другой груз P_2

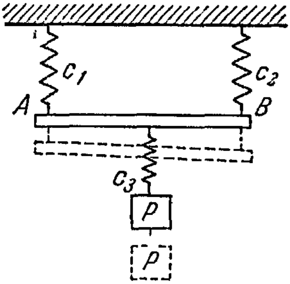
и опять измеряют статическое удлинение l_2. После этого повторяют оба опыта, заставляя оба груза по очереди совершать свободные колебания, и измеряют при этом периоды колебаний T_1 и T_2. Второй опыт делают для того, чтобы учесть влияние массы самой пружины, считая, что при движении груза это влияние эквивалентно прибавлению к колеблющейся массе некоторой добавочной массы. Найти формулу для определения ускорения силы тяжести по этим опытным данным.

Ответ: $g = \dfrac{4\pi^2 (l_1 - l_2)}{T_1^2 - T_2^2}$.

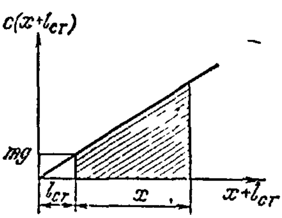
32.48(32.48). По горизонтальной хорде (пазу) вертикально расположенного круга движется без трения точка M массы 2 кг под действием силы притяжения F, пропорциональной по величине расстоянию до центра O, причем коэффициент пропорциональности 98 Н/м. Расстояние от центра круга до хорды равно 20 см, радиус окружности 40 см. Определить закон движения точки, если в начальный момент она находилась в правом крайнем положении M_0 и отпущена без начальной скорости. С какой скоростью точка проходит через середину хорды?



К задаче 32.48



К задаче 32.49



К задаче 32.50

Ответ: $x = 34{,}6 \cos 7t$ см, $\dot{x} = \pm 242$ см/с.

32.49(32.49). К стержню AB, массой которого пренебречь, прикреплены три пружины. Две, с жесткостью c_1 и c_2, удерживают стержень и расположены на его концах. Третья пружина, жесткость которой c_3, прикреплена к середине стержня и несет груз P массы m. Определить собственную частоту колебаний груза.

Ответ: $k = \sqrt{\dfrac{4c_1 c_2 c_3}{m(4c_1 \cdot c_2 + c_1 c_3 + c_2 c_3)}}$ рад/с.

32.50(32.50). Груз массы 10 кг, прикрепленный к пружине с коэффициентом жесткости $c = 1{,}96$ кН/м, совершает колебания. Определить полную механическую энергию груза и пружины, пренебрегая массой пружины, построить график зависимости упругой силы от перемещения и показать на нем потенциальную энергию пружины. Принять положение статического равновесия за начало отсчета потенциальной энергии.

Ответ. $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}cx^2 = (5\dot{x}^2 + 980x^2)$ Дж, если x — в м, $\dot{x}$ — в м/с. Заштрихованная на рисунке площадь равна потенциальной энергии пружины.

32.51. Материальная точка массы m находится в поле действия силы с потенциалом

$$\Pi = \frac{1}{2}k(x^2 + 4y^2 + 16z^2)$$

Доказать, что при движении точки из любого (ненулевого) начального положения через некоторое время точка снова придет в это положение. Определить это время. Будет ли скорость при возвращении равна начальной скорости?

Ответ. $T = 2\pi\sqrt{m/k}$. Скорость точки через промежуток времени T станет равной своему начальному значению.

32.52. Материальная точка массы m находится в поле действия силы, потенциал которой

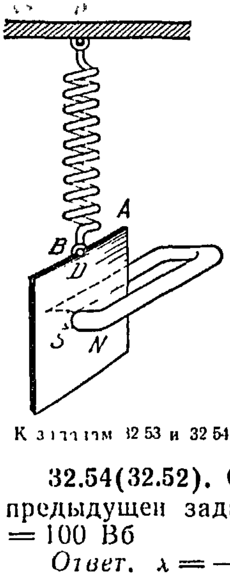
$$\Pi = \frac{1}{2}k(x^2 + 2y^2 + 5z^2)$$

Вернется ли точка в этом случае в исходное положение по прошествии некоторого времени?

Ответ: Нельзя указать момента времени, когда все три координаты примут исходные значения. Точка в процессе сложения трех колебательных движений не вернется в исходное положение.

б) Влияние сопротивления на свободные колебания

32.53(32.51). Пластина D массы 100 г, подвешенная на пружине AB в неподвижной точке A, движется между полюсами магнита. Вследствие вихревых токов движение тормозится силой, пропорциональной скорости. Сила сопротивления движению равна $kv\Phi^2$ Н, где $k = 0{,}001$, v — скорость в м/с, Φ — магнитный поток между полюсами N и S. В начальный момент скорость пластинки равна нулю и пружина не растянута. Удлинение ее на 1 м получается при статическом действии силы в 19,6 Н, приложенной в точке B. Определить движение пластинки в том случае, когда $\Phi = 10\sqrt{5}$ Вб (вебер — единица магнитного потока в СИ).



К задачам 32.53 и 32.54

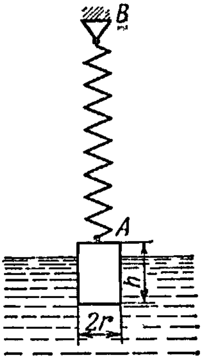
Ответ. $x = -e^{-2{,}5t}(0{,}05\cos 13{,}77t + 0{,}00907\sin 13{,}77t)$ м, где ось x направлена вниз из положения статического равновесия центра тяжести пластинки.

32.54(32.52). Определить движение пластинки D при условиях предыдущей задачи в том случае, когда магнитный поток $\Phi = 100$ Вб.

Ответ. $x = -0{,}051e^{-2t} + 0{,}001e^{-98t}$.

32.55(32.53). Цилиндр веса P, радиуса r и высоты h подвешен на пружине AB, верхний конец которой B закреплен; цилиндр погружен в воду. В положении равновесия цилиндр погружается в воду на половину своей высоты. В начальный момент времени цилиндр был погружен в воду на $^2/_3$ своей высоты и затем без начальной скорости пришел в движение по вертикальной прямой. Считая жесткость пружины равной c и предполагая, что действие воды сводится к добавочной архимедовой силе, определить движение цилиндра относительно положения равновесия. Принять удельный вес воды равным γ.

Ответ: $x=\frac{1}{6}h\cos kt$, где $k^2=\frac{g}{P}(c+\pi\gamma r^2)$.



К задаче 32.55

32.56(32.54). В предыдущей задаче определить колебательное движение цилиндра, если сопротивление воды пропорционально первой степени скорости и равно αv.

Ответ. Движение цилиндра будет колебательным, если

$$\left(\frac{c}{m}+\frac{\pi r^2}{m}\gamma\right)-\left(\frac{\alpha}{2m}\right)^2>0.$$

Тогда

$$x=\frac{h}{6}\sqrt{\frac{k^2}{k^2-n^2}}\,e^{-nt}\sin\left(\sqrt{k^2-n^2}\,t+\beta\right),$$

где $k^2=\frac{c}{m}+\frac{\pi r^2}{m}\gamma$, $\quad n=\frac{\alpha}{2m}$, $\quad \operatorname{tg}\beta=\frac{\sqrt{k^2-n^2}}{n}$, $\quad m=\frac{P}{g}$.

32.57(32.55). Тело A массы 0,5 кг лежит на негладкой горизонтальной плоскости и соединено с неподвижной точкой B пружиной, ось которой BC горизонтальна. Коэффициент трения тела о плоскость 0,2, пружина такова, что для удлинения ее на 1 см требуется сила 2,45 Н. Тело A отодвинуто от точки B так, что пружина вытянулась на 3 см, и затем отпущено без начальной скорости. Найти: 1) число размахов, которые совершит тело A, 2) величины размахов и 3) продолжительность T каждого из них.

К задаче 32.57

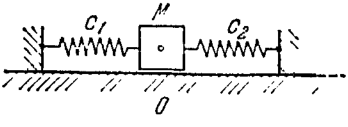
Тело остановится, когда в положении, где скорость его равна нулю, сила упругости пружины будет равна силе трения или меньше ее.

Ответ: 1) 4 размаха; 2) 5,2 см, 3,6 см, 2 см, 0,4 см; 3) $T=0{,}14$ с.

32.58(32.56). Груз массы $M=20$ кг, лежащий на наклонной негладкой плоскости, прикрепили к нерастянутой пружине и сообщили ему начальную скорость $v_0=0{,}5$ м/с, направленную вниз. Коэффициент трения скольжения $f=0{,}08$, коэффициент жесткости пружины $c = 20$ Н/см. Угол, образованный наклонной плоскостью с горизонтом, $\alpha = 45°$. Определить: 1) период колебаний, 2) число максимальных отклонений от положения равновесия, которые совершит груз, 3) величины этих отклонений.

Ответ: 1) $T = 0{,}628$ с, 2) 7 отклонений, 3) 7,55 см; 6,45 см; 5,35 см, 4,25 см, 3,15 см, 2,05 см, 0,95 см.

32.59(32.57). Тело массы $M = 0{,}5$ кг совершает колебания на горизонтальной плоскости под действием двух одинаковых пружин, прикрепленных к телу одним концом и к неподвижной стойке — другим, оси пружин лежат на одной горизонтальной прямой. Коэффициенты жесткости пружин $c_1 = c_2 = 1{,}225$ Н/см, коэффициент трения при движении тела $f = 0{,}2$, при покое $f_0 = 0{,}25$. В начальный момент тело было отодвинуто от своего среднего положения O вправо в положение $x_0 = 3$ см и отпущено без начальной скорости. Найти: 1) область возможных равновесных положений тела — «область застоя», 2) величину размахов тела, 3) число его размахов, 4) продолжительность каждого из них, 5) положение тела после колебаний.



К задаче 32.59

Ответ: 1) $-0{,}5$ см $< x < 0{,}5$ см, 2) 5,2 см, 3,6 см, 2 см, 0,4 см; 3) 4 размаха, 4) $T = 0{,}141$ с, 5) $x = -0{,}2$ см.

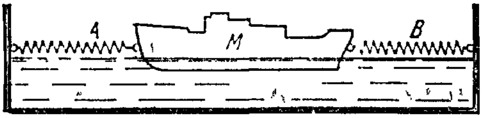
32.60(32.58). Под действием силы сопротивления R, пропорциональной первой степени скорости ($R = \alpha v$), тело массы m, подвешенное к пружине жесткости c, совершает затухающие колебания. Определить, во сколько раз период затухающих колебаний T превосходит период незатухающих колебаний T_0, если отношение $n/k = 0{,}1$ ($k^2 = c/m$, $n = \alpha/(2m)$).

Ответ: $T \approx 1{,}005T_0$.

32.61(32.59). В условиях предыдущей задачи определить, через сколько полных колебаний амплитуда уменьшится в сто раз.

Ответ: через 7,5 полных колебаний.

32.62(32.60). Для определения сопротивления воды движению модели судна при очень малых скоростях модель M пустили плавать в сосуде, привязав нос и корму посредством двух одинаковых пружин A и B, силы натяжения которых пропорциональны удлинениям. Результаты наблюдений показали, что отклонения модели от положения равновесия после каждого размаха уменьшаются, составляя геометрическую прогрессию, знаменатель которой равен 0,9, а продолжительность каждого размаха $T = 0{,}5$ с. Определить силу R сопротивления воды, приходящуюся на каждый килограмм массы модели, при скорости ее равной 1 м/с, предполагая, что сопротивление воды пропорционально первой степени скорости.



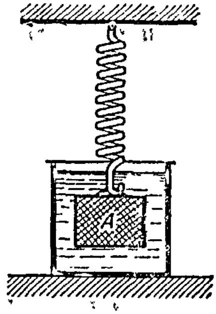
К задачам 32.62 и 32.63

Ответ $R = 0,42$ Н

32.63(32.61). В условиях предыдущей задачи найти уравнение движения модели, если в начальный момент пружина A была растянута, а пружина B сжата на величину $\Delta l = 4$ см и модель была отпущена без начальной скорости.

Ответ $x = e^{-0,21t}(4\cos 6,28t + 0,134\sin 6,28t)$ см

32.64(32.62). Для определения вязкости жидкости Кулон употреблял следующий метод: подвесив на пружине тонкую пластинку A, он заставлял ее колебаться сначала в воздухе, а затем в той жидкости, вязкость которой надлежало определить, и находил продолжительность одного размаха: T_1 — в первом случае и T_2 — во втором. Сила трения между пластинкой и жидкостью может быть выражена формулой $2Skv$, где $2S$ — поверхность пластинки, v — ее скорость, k — коэффициент вязкости. Пренебрегая трением между пластинкой и воздухом, определить коэффициент k по найденным из опыта величинам T_1 и T_2, если масса пластинки равна m.



К задаче 32.64

Ответ $k = \frac{\pi m}{ST_1T_2}\sqrt{T_2^2 - T_1^2}$.

32.65(32.63). Тело массы 5 кг подвешено на пружине, коэффициент жесткости которой равен 2 кН/м. Сопротивление среды пропорционально скорости. Амплитуда после четырех колебаний уменьшилась в 12 раз. Определить период и логарифмический декремент колебаний.

Ответ $T = 0,316$ с, $\lambda = nT/2 = 0,3106$

32.66(32.64). В условиях предыдущей задачи найти уравнение движения тела, если его подвесили к концу нерастянутой пружины и отпустили без начальной скорости.

Ответ: $x = e^{-1,97t}(-2,45\cos 19,9t - 0,242\sin 19,9t)$ см

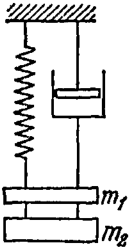
32.67(32.65). Тело массы 6 кг, подвешенное на пружине, при отсутствии сопротивления колеблется с периодом $T = 0,4\pi$ с, а если действует сопротивление, пропорциональное первой степени скорости, с периодом $T_1 = 0,5\pi$ с. Найти коэффициент пропорциональности α в выражении силы сопротивления $R = -\alpha v$ и определить движение тела, если в начальный момент пружина была растянута из положения равновесия на 4 см и тело представлено самому себе.

Ответ: $\alpha = 36\,\frac{\text{Н}\cdot\text{с}}{\text{м}}$, $x = 5e^{-3t}\sin\left(4t + \operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)$ см.

32.68(32.66). Тело массы 1,96 кг, подвешенное на пружине, которая силой 4,9 Н растягивается на 10 см, при движении встречает сопротивление, пропорциональное первой степени скорости и при скорости 1 м/с равное 19,6 Н. В начальный момент пружина растянута из положения равновесия на 5 см и тело пришло в движение без начальной скорости. Найти закон этого движения.

Ответ: $x = 5e^{-5t}(5t + 1)$ см.

32.69(32.67). Грузы массы $m_1 = 2$ кг и $m_2 = 3$ кг подвешены в положении статического равновесия к пружине, коэффициент жесткости которой $c = 392$ Н/м Масляный демпфер вызывает силу сопротивления, пропорциональную первой степени скорости и равную $R = -\alpha v$, где $\alpha = 98$ Н·с/м Груз m_2 сняли. Найти после этого уравнение движения груза m_1



К задаче 32 69

Ответ: $x = 8{,}32e^{-4\,4t} - 0{,}82e^{-44\,6t}$ см.

32.70(32.68). Статическое удлинение пружины под действием груза веса P равно f На колеблющийся груз действует сила сопротивления среды, пропорциональная скорости Определить наименьшее значение коэффициента сопротивления α, при котором процесс движения будет апериодическим. Найти период затухающих колебаний, если коэффициент сопротивления меньше найденного значения

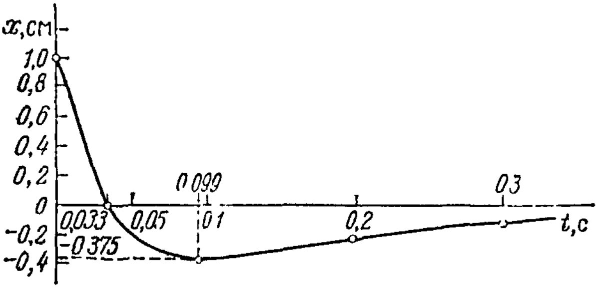
Ответ: $\alpha = 2P/\sqrt{gf}$ При $\alpha < 2P/\sqrt{gf}$ движение будет колебательным с периодом $T = 2\pi/\sqrt{\frac{g}{f} - \frac{\alpha^2}{4m^2}}$

32.71. Груз массы 100 г, подвешенный к концу пружины, движется в жидкости. Коэффициент жесткости пружины $c = 19{,}6$ Н/м. Сила сопротивления движению пропорциональна первой степени скорости груза: $R = \alpha v$, где $\alpha = 3{,}5$ Н·с/м

Найти уравнение движения груза, если в начальный момент груз был смещен из положения равновесия на $x_0 = 1$ см и отпущен без начальной скорости

Ответ: $x = 1{,}32e^{-7t} - 0{,}33e^{-28t}$ см.

32.72. В условиях предыдущей задачи найти уравнение движения груза и построить график зависимости перемещения от времени, если в начальный момент груз смещен из положения статического равновесия на расстояние $x_0 = 1$ см и ему сообщена начальная скорость 50 см/с в направлении, противоположном смещению

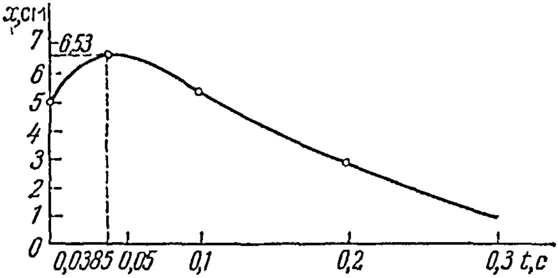


К задаче 32 72

Ответ: $x = -e^{-7t} + 2e^{-28t}$ см.

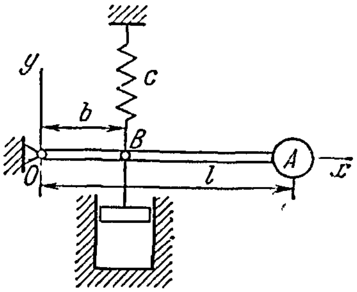
32.73. В условиях задачи 32 71 в начальный момент груз смещен из положения равновесия на расстояние $x_0 = 5$ см и ему сообщена начальная скорость $v_0 = 100$ см/с в том же направлении. Найти уравнение движения груза и построить график зависимости перемещения от времени.

Ответ: $x = 11{,}4e^{-7t} - 6{,}4e^{-28t}$ см.



К задаче 32.73

32.74(32.72). Составить дифференциальное уравнение малых колебаний тяжелой точки A, находящейся на конце стержня, закрепленного шарнирно в точке O, считая силу сопротивления среды пропорциональной первой степени скорости с коэффициентом пропорциональности α, и определить частоту затухающих колебаний. Вес точки A равен P, коэффициент жесткости пружины c, длина стержня l, расстояние $OB = b$. Массой стержня пренебречь. В положении равновесия стержень горизонтален. При каком значении коэффициента α движение будет апериодическим?



К задаче 32.74

Ответ: $\frac{P}{g}\ddot{y} + \alpha\frac{b^2}{l^2}y + c\frac{b^2}{l^2}y = 0$,

$$k = \frac{b}{l}\sqrt{\frac{cg}{P} - \left(\frac{\alpha bg}{2Pl}\right)^2}\ \text{рад/с},$$

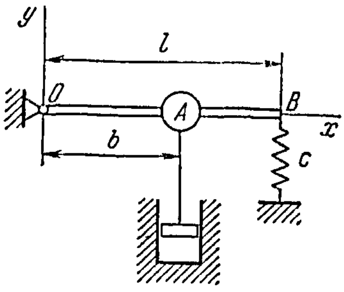
$$\alpha \geqslant \frac{2l}{b}\sqrt{\frac{cP}{g}}.$$

32.75(32.73). При колебаниях груза массы 20 кг, подвешенного на пружине, было замечено, что наибольшее отклонение после 10 полных колебаний уменьшилось вдвое. Груз совершил 10 полных колебаний за 9 с. Как велик коэффициент сопротивления α (при сопротивлении среды, пропорциональном первой степени скорости) и каково значение коэффициента жесткости c?

Ответ: $\alpha = 3{,}08$ Н · с/м, $c = 974{,}8$ Н/м.

32.76(32.74). Составить дифференциальное уравнение малых колебаний точки A и определить частоту затухающих колебаний. Вес точки A равен P, коэффициент жесткости пружины c, расстояние $OA = b$, $OB = l$. Сила сопротивления среды пропорциональна первой степени скорости, коэффициент пропорциональности равен

α. Массой стержня OB, шарнирно закрепленного в точке O, пренебречь. В положении равновесия стержень горизонтален. При каком значении коэффициента α движение будет апериодическим?



К задаче 32.76

Ответ: $\frac{P}{g}\ddot{y} + \alpha\dot{y} + \frac{cl^2}{b^2}y = 0$,

$$k_1 = \sqrt{\frac{cl^2g}{Pb^2} - \frac{\alpha^2g^2}{4P^2}} \text{ рад/с},$$

$$\alpha \geqslant \frac{2l}{b}\sqrt{\frac{cP}{g}}$$

32.77. Тело массы 5 кг подвешено к концу пружины жесткости 20 Н/м и помещено в вязкую среду. Период его колебаний в этом случае равен 10 с. Найти постоянную демпфирования, логарифмический декремент колебаний и период свободных колебаний.

Ответ: $\alpha = 19$ Н·с/м, $\lambda = nT/2 = 9{,}5$, $T = 3{,}14$ с.

в) Вынужденные колебания

32.78(32.75). Найти уравнение прямолинейного движения точки массы m, находящейся под действием восстанавливающей силы $Q = -cx$ и постоянной силы F_0. В начальный момент $t = 0$, $x_0 = 0$ и $\dot{x}_0 = 0$. Найти также период колебаний.

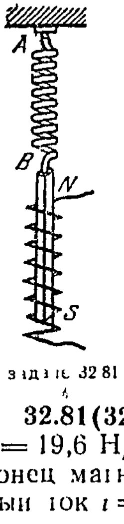
Ответ: $x = \frac{F_0}{c}(1 - \cos kt)$, где $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$, $T = 2\pi/k$.

32.79(32.76). Определить уравнение прямолинейного движения точки массы m, находящейся под действием восстанавливающей силы $Q = -cx$ и силы $F = \alpha t$. В начальный момент точка находится в положении статического равновесия и скорость ее равна нулю.

Ответ. $x = \frac{\alpha}{mk^3}(kt - \sin kt)$, где $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$

32.80(32.77). Найти уравнение прямолинейного движения точки массы m, на которую действует восстанавливающая сила $Q = -cx$ и сила $F = F_0e^{-\alpha t}$, если в начальный момент точка находилась в положении равновесия в состоянии покоя.

Ответ. $x = \frac{F_0}{m(k^2 + \alpha^2)}\left(e^{-\alpha t} - \cos kt + \frac{\alpha}{k}\sin kt\right)$; где $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$



К задаче 32.81

32.81(32.78). На пружине, коэффициент жесткости которой $c = 19{,}6$ Н/м, подвешен магнитный стержень массы 100 г. Нижний конец магнита проходит через катушку, по которой идет переменный ток $i = 20\sin 8\pi t$ А. Ток идет с момента времени $t = 0$, втягивая стержень в соленоид, до этого момента магнитный стержень висел на пружине неподвижно. Сила взаимодействия между магнитом и катушкой определяется равенством $F = 0{,}016\pi i$ Н. Определить вынужденные колебания магнита.

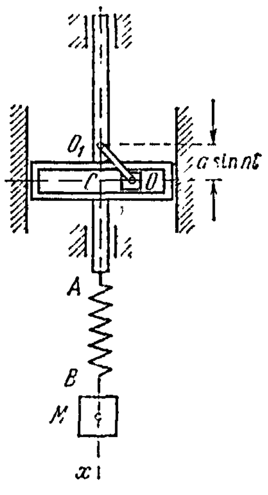
Ответ. $x = -2{,}3 \sin 8\pi t$ см.

32.82(32.79). В условиях предыдущей задачи найти уравнение движения магнитного стержня, если его подвесили к концу нерастянутой пружины и отпустили без начальной скорости.

Ответ. $x = -5 \cos 14t + 4{,}13 \sin 14t - 2{,}3 \sin 8\pi t$ см.

32.83(32.80). В условиях задачи 32.81 найти уравнение движения магнитного стержня, если ему в положении статического равновесия сообщили начальную скорость $v_0 = 5$ см/с.

Ответ. $x = 4{,}486 \sin 14t - 2{,}3 \sin 8\pi t$ см.



К задаче 32.81

32.84(32.81). Гиря M подвешена на пружине AB, верхний конец которой совершает гармонические колебания по вертикальной прямой амплитуды a и частоты n, так что $O_1C = a \sin nt$ см. Определить вынужденные колебания гири M при следующих данных: масса гири равна 400 г, от действия силы 39,2 Н пружина удлиняется на 1 м, $a = 2$ см, $n = 7$ рад/с.

Ответ. $x = 4 \sin 7t$ см.

32.85(32.82). Определить движение гири M (см. задачу 32.84), подвешенной на пружине AB, верхний конец которой A совершает гармонические колебания по вертикали амплитуды a и круговой частоты k, статическое растяжение пружины под действием веса гири равно δ. В начальный момент точка A занимает свое среднее положение, а гиря M находится в покое; начальное положение гири принять за начало координат, а ось Ox направить по вертикали вниз.

$$\text{Ответ: } x = \frac{ag}{k^2\delta - g}\left[k\sqrt{\frac{\delta}{g}} \sin \sqrt{\frac{g}{\delta}}\, t - \sin kt\right] \text{ при } k \gtrless \sqrt{\frac{g}{\delta}};$$

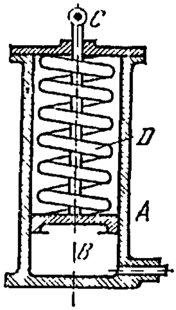
$$x = \frac{a}{2}\left[\sin \sqrt{\frac{g}{\delta}}\, t - \sqrt{\frac{g}{\delta}}\, t \cos kt\right] \text{ при } k = \sqrt{\frac{g}{\delta}}.$$

32.86(32.83). Статический прогиб рессор груженого товарного вагона $\Delta l_{\text{ст}} = 5$ см. Определить критическую скорость движения вагона, при которой начнется «галопирование» вагона, если на стыках рельсов вагон испытывает толчки, вызывающие вынужденные колебания вагона на рессорах, длина рельсов $L = 12$ м.

Ответ. $v = 96$ км/ч.

32.87(32.84). Индикатор машины состоит из цилиндра A, в котором ходит поршень B, упирающийся в пружину D, с поршнем соединен стержень BC, к которому прикреплен пишущий штифт C.

Предполагая, что давление пара, выраженное в паскалях, изменяется согласно формуле $p = 10^5\left(1 + 3\sin\frac{2\pi t}{T}\right)$, где T — время одного оборота вала, определить амплитуду вынужденных колебаний штифта C, если вал совершает 180 об/мин, при следующих данных, площадь поршня индикатора $\sigma = 4$ см², масса подвижной части индикатора 1 кг, пружина сжимается на 1 см силой 29,4 Н



К задаче 32.87

Ответ: $a = 4{,}64$ см.

32.88(32.85). В условиях предыдущей задачи найти уравнение движения штифта C, если в начальный момент система находилась в покое в положении статического равновесия

Ответ. $x = -1{,}61\sin 54{,}22t + 4{,}64\sin 6\pi t$ см.

32.89(32.86). Груз массы $m = 200$ г, подвешенный к пружине, коэффициент жесткости которой 9,8 Н/см находится под действием силы $S = H\sin pt$, где $H = 20$ Н, $p = 50$ рад/с В начальный момент $x_0 = 2$ см, $v_0 = 10$ см/с Начало координат выбрано в положении статического равновесия. Найти уравнение движения груза.

Ответ. $x = 2\cos 70t - 2{,}83\sin 70t + 4{,}17\sin 50t$ см

32.90(32.87). В условиях предыдущей задачи изменилась частота возмущающей силы, получив значение $p = 70$ рад/с Определить уравнение движения груза.

Ответ $x = 2\cos 70t + 1{,}16\sin 70t - 71{,}4t\cos 70t$ см

32.91. Груз массы 24,5 кг висит на пружине жесткости 392 Н/м. На груз начинает действовать сила $F(t) = 156{,}8\sin 4t$ Н. Определить закон движения груза.

Ответ $x = 0{,}2\sin 4t - 0{,}8t\cos 4t$ м.

32.92. Груз массы 24,5 кг висит на пружине жесткости 392 Н/м. Определить движение груза, если на него начинает действовать сила $F = 39{,}2\cos 6t$ Н.

Ответ: $x = 16\sin t\sin 5t$ см Колебания носят характер биении.

32.93. Груз на пружине колеблется так, что его движение описывается дифференциальным уравнением

$$m\ddot{x} + cx = 5\cos\omega t + 2\cos 3\omega t.$$

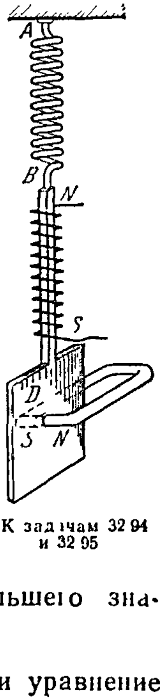
Найти закон движения груза, если в начальный момент его смещение и скорость были равны нулю, а также определить, при каких значениях ω наступит резонанс.

Ответ: $x = \frac{17m\omega^2 - 7c}{(c - m\omega^2)(c - 9m\omega^2)}\cos\sqrt{\frac{c}{m}}t + \frac{5}{c - m\omega^2}\cos\omega t + \frac{2}{c - 9m\omega^2}\cos 3\varphi t$. Резонанс наступит в двух случаях: $\omega_{1\,кр} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{c}{m}}$ и $\omega_{2\,кр} = \sqrt{\frac{c}{m}}$.

г) Влияние сопротивления на вынужденные колебания

32.94(32.88). На пружине, коэффициент жесткости которой $c = 19{,}6$ Н/м, подвешены магнитный стержень массы 50 г, проходящий через соленоид, и медная пластинка массы 50 г, проходящая между полюсами магнита. По соленоиду течет ток $i = 20 \sin 8\pi t$ А, который развивает силу взаимодействия с магнитным стержнем $0{,}016\pi i$ Н. Сила торможения медной пластинки вследствие вихревых токов равна $kv\Phi^2$, где $k = 0{,}001$, $\Phi = 10\sqrt{5}$ Вб и v — скорость пластинки в м/с. Определить вынужденные колебания пластинки.

Ответ: $x = 0{,}022 \sin(8\pi t - 0{,}91\pi)$ м.



К задачам 32.94 и 32.95

32.95(32.89). В условиях предыдущей задачи найти уравнение движения пластинки, если ее подвесили вместе с магнитным стержнем к концу нерастянутой пружины и сообщили им начальную скорость 5 см/с, направленную вниз.

Ответ: $x = e^{-2{,}5t}(-4{,}39 \cos 13{,}77t + 3{,}42 \sin 13{,}77t) + 2{,}2 \sin(8\pi t - 0{,}91\pi)$ см.

32.96(32.90). Материальная точка массы $m = 2$ кг подвешена к пружине, коэффициент жесткости которой 4 кН/м. На точку действуют возмущающая сила $S = 120 \sin(pt + \delta)$ Н и сила сопротивления движению, пропорциональная первой степени скорости и равная $R = 0{,}5\sqrt{mc}\, v$ Н. Чему равно наибольшее значение $A_{\max}$ амплитуды вынужденных колебаний? При какой частоте p амплитуда вынужденных колебаний достигает наибольшего значения?

Ответ: $A_{\max} = 6{,}2$ см, $p = 41{,}83$ рад/с.

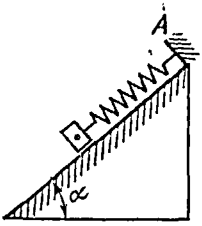
32.97(32.91). В условиях предыдущей задачи найти уравнение движения точки, если в начальный момент времени ее положение и скорость были равны: $x_0 = 2$ см, $v_0 = 3$ см/с. Частота возмущающей силы $p = 30$ рад/с, начальная фаза возмущающей силы $\delta = 0$. Начало координат выбрано в положении статического равновесия.

Ответ: $x = e^{-11{,}18t}(4{,}422 \cos 43{,}3t - 1{,}547 \sin 43{,}3t) + 4{,}66 \sin(30t - 0{,}174\pi)$ см.

32.98(32.92). Материальная точка массы 3 кг подвешена на пружине с коэффициентом жесткости $c = 117{,}6$ Н/м. На точку действуют возмущающая сила $F = H \sin(6{,}26t + \beta)$ Н и сила вязкого сопротивления среды $R = -\alpha v$ (R в Н). Как изменится амплитуда вынужденных колебаний точки, если вследствие изменения температуры вязкость среды (коэффициент α) увеличится в три раза?

Ответ: Амплитуда вынужденных колебаний уменьшится в три раза

32.99(32.93). Тело массы 2 кг, прикрепленное пружиной к неподвижной точке A, движется по гладкой наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом, под действием возмущающей силы $S = 180 \sin 10t$ Н и силы сопротивления, пропорциональной скорости $R = -29{,}4v$ (R в Н). Коэффициент жесткости пружины $c = 5$ кН/м В начальный момент тело находилось в покое в положении статического равновесия Найти уравнение движения тела, периоды T свободных и T_1 вынужденных колебаний, сдвиг фазы вынужденных колебаний и возмущающей силы



К задаче 32.99

Ответ $x = e^{-7{,}35t}(0{,}228 \cos 49{,}46t - 0{,}72 \sin 49{,}46t) + 3{,}74 \sin(10t - 3^\circ 30')$ см, $T = 0{,}127$ с, $T_1 = 0{,}628$ с, $\varepsilon = 3^\circ 30'$

32.100(32.94). На тело массы 0,4 кг, прикрепленное к пружине с коэффициентом жесткости $c = 4$ кН/м, действуют сила $S = 40 \sin 50t$ Н и сила сопротивления среды $R = -\alpha v$, где $\alpha = 25$ Н·с/м, v — скорость тела (v в м/с). В начальный момент тело покоится в положении статического равновесия Найти закон движения тела и определить значение частоты возмущающей силы, при котором амплитуда вынужденных колебаний будет максимальной

Ответ. 1) $x = 0{,}647e^{-31{,}25t} \sin(95t - 46^\circ 55') + 1{,}23 \sin(50t - 22^\circ 36')$ см,

2) максимальная амплитуда вынужденных колебаний получается при $p = 89{,}7$ рад/с и равна 1,684 см

32.101(32.95). На тело массы M кг, прикрепленное к пружине с коэффициентом жесткости c Н/м, действуют возмущающая сила $S = H \sin pt$ Н и сила сопротивления $R = -\alpha v$ (R в Н), где v — скорость тела. В начальный момент тело находилось в положении статического равновесия и не имело начальной скорости. Найти уравнение движения тела, если $c > \alpha^2/(4M)$

Ответ: $x = \dfrac{hpe^{-nt}}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}\left(2n \cos \sqrt{k^2 - n^2}\, t + \dfrac{2n^2 + p^2 - k^2}{\sqrt{k^2 - n^2}} \times \sin \sqrt{k^2 - n^2}\, t\right) + \dfrac{h}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}\left[(k^2 - p^2) \sin pt - 2np \cos pt\right]$, где $h = H/M$, $k^2 = c/M$, $n = \alpha/(2M)$.

32.102(32.96). На тело массы 6 кг, подвешенное к пружине с жесткостью $c = 17{,}64$ кН/м, действует возмущающая сила $P_0 \sin pt$ Сопротивление жидкости пропорционально скорости Каким должен быть коэффициент сопротивления α вязкой жидкости, чтобы максимальная амплитуда вынужденных колебаний равнялась утроенному значению статического удлинения пружины? Чему равняется коэффициент расстройки z (отношение круговой частоты вынужденных колебаний к круговой частоте свободных колебаний)? Найти сдвиг фазы вынужденных колебаний и возмущающей силы.

Ответ: $\alpha = 110$ Н·с/м, $z = 0{,}97$, $\varepsilon = 80°\,7'$.

32.103(32.97). На тело массы 0,1 кг, прикрепленное к пружине с коэффициентом жесткости $c = 5$ кН/м, действует сила $S = H\sin pt$, где $H = 100$ Н, $p = 100$ рад/с, и сила сопротивления $R = \beta v$ Н, где $\beta = 50$ Н·с/м Написать уравнение вынужденных колебаний и определить значение частоты p, при котором амплитуда вынужденных колебаний будет максимальной

Ответ: $x_2 = 0{,}98\sin 100t - 1{,}22\cos 100t$ см; максимума амплитуды не существует, так как $n > k/\sqrt{2}$.

32.104(32.98). В условиях предыдущей задачи определить сдвиг фазы вынужденных колебаний и возмущающей силы.

Ответ. $\varepsilon = \operatorname{arctg} 1{,}25 = 51°\,20'$.

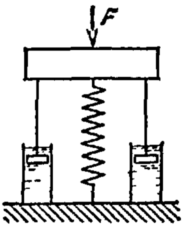
32.105(32.99). Груз массы 0,2 кг подвешен на пружине, коэффициент жесткости которой равен $c = 19{,}6$ Н/м. На груз действуют возмущающая сила $S = 0{,}2\sin 14t$ Н и сила сопротивления $R = 49v$ Н. Определить сдвиг фаз вынужденных колебаний и возмущающей силы.

Ответ: $\varepsilon = 91°\,38'$.

32.106(32.100). В условиях предыдущей задачи найти коэффициент жесткости c_1 новой пружины, которой нужно заменить данную пружину, чтобы сдвиг фаз вынужденных колебаний и возмущающей силы стал равным $\pi/2$.

Ответ: $c_1 = 39{,}2$ Н/м.

32.107(32.101). Для уменьшения действия на тело массы m возмущающей силы $F = F_0\sin(pt + \delta)$ устанавливают пружинный амортизатор с жидкостным демпфером. Коэффициент жесткости пружины c. Считая, что сила сопротивления пропорциональна первой степени скорости ($F_{\text{сопр}} = \alpha v$), найти максимальное динамическое давление всей системы на фундамент при установившихся колебаниях.



К задаче 32 107

Ответ: $N = F_0\sqrt{\dfrac{k^4 + 4n^2p^2}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}}$, где $k^2 = \dfrac{c}{m}$, $n = \dfrac{\alpha}{2m}$.

§ 33. Относительное движение

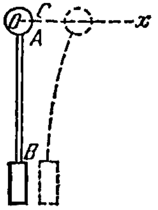
33.1(33.1). К концу A вертикального упругого стержня AB прикреплен груз C массы 2,5 кг. Груз C, будучи выведен из положения равновесия, совершает гармонические колебания под влиянием силы, пропорциональной расстоянию от положения равновесия Стержень AB таков, что для отклонения конца его A на 1 см нужно приложить силу 1 Н. Найти амплитуду вынужденных колебаний груза C в том случае, когда точка закрепления стержня B совершает по горизонтальной прямой гармонические колебания амплитуды 1 мм и периода 1,1 с.

Ответ. 5,42 мм

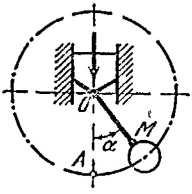
33.2(33.2). Точка привеса математического маятника длины l движется по вертикали равноускоренно Определить период T малых колебаний маятника в двух случаях: 1) когда ускорение точки привеса направлено вверх и имеет какую угодно величину p, 2) когда это ускорение направлено вниз и величина его $p < g$.

Ответ: 1) $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{p+g}}$; 2) $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g-p}}$

33.3(33.3). Математический маятник OM длины l в начальный момент отклонен от положения равновесия OA на некоторый угол α и имеет скорость, равную нулю; точка привеса его в этот момент имеет также скорость, равную нулю, но затем опускается с постоянным ускорением $p \geqslant g$. Определить длину s дуги окружности, описываемой точкой M в относительном движении вокруг точки O.



К задаче 33.1



К задаче 33.3

Ответ: 1) При $p = g$ $s = 0$, 2) при $p > g$ $s = 2l(\pi - \alpha)$.

33.4(33.4). Железнодорожный поезд идет со скоростью 15 м/с по рельсам, проложенным по меридиану с юга на север. Масса поезда 2000 т.

1) Определить боковое давление поезда на рельсы, если он пересекает в данный момент северную широту 60°. 2) Определить боковое давление поезда на рельсы, если он идет в этом же месте с севера на юг

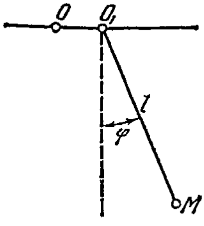
Ответ. 1) 3778,7 Н на правый восточный рельс; 2) 3778,7 Н на правый западный рельс.

33.5(33.5). Материальная точка свободно падает в северном полушарии с высоты 500 м на Землю. Принимая во внимание вращение Земли вокруг своей оси и пренебрегая сопротивлением воздуха, определить, насколько отклонится на восток точка при падении. Географическая широта места равна 60°.

Ответ. На 12 см

33.6(33.6). В вагоне, движущемся по прямому горизонтальному пути, маятник совершает малые гармонические колебания, причем среднее его положение остается отклоненным от вертикали на угол 6°.

1) Определить ускорение w вагона. 2) Найти разность периодов колебаний маятника: T — в случае неподвижного вагона и T_1 — в данном случае



К задаче 33.7

Ответ: 1) $w = 1{,}03$ м/с^2, 2) $T - T_1 = 0{,}0028T$.

33.7(33.7). Точка O_1 привеса маятника длины l совершает прямолинейные горизонтальные гармонические колебания около неподвижной точки O: $OO_1 = a\sin pt$. Определить малые колебания маятника, считая, что в момент, равный нулю, $\varphi = 0$, $\dot\varphi = 0$

Ответ: $\varphi = \frac{ap^2}{l(k^2-p^2)}\left(\sin pt - \frac{p}{k}\sin kt\right)$, $k = \sqrt{\frac{g}{l}}$.

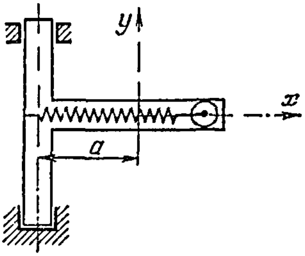
33.8. Точка, находящаяся на широте λ, брошена в западном направлении под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0. Определить время и дальность полета точки.

Ответ: $t = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g + 2\omega v_0 \cos\lambda \cos\alpha} \approx \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}\left(1 - \frac{2\omega v_0 \cos\lambda \cos\alpha}{g}\right)$,

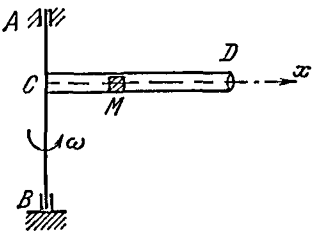
$$L = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} + \frac{v_0^3 \omega \cos\lambda \sin\alpha \left(16 \sin^2\alpha - 12\right)}{3g^2},$$

где ω — угловая скорость вращения Земли.

33.9(33.9). Шарик массы m, прикрепленный к концу горизонтальной пружины, коэффициент жесткости которой c, находится в положении равновесия в трубке на расстоянии a от вертикальной оси. Определить относительное движение шарика, если трубка, образующая с осью прямой угол, начинает вращаться вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω.



К задаче 33 9



К задаче 33 10

Ответ. В системе координат, начало которой совпадает с точкой равновесия шарика,

$$x = 2\frac{\omega^2 a}{k^2 - \omega^2} \sin^2 \frac{\sqrt{k^2 - \omega^2}}{2} t \quad \text{при} \quad k = \sqrt{\frac{c}{m}} > \omega;$$

$$x = \frac{\omega^2 a}{\omega^2 - k^2} \left(\operatorname{ch} \sqrt{\omega^2 - k^2}\, t - 1\right) \quad \text{при} \quad k = \sqrt{\frac{c}{m}} < \omega.$$

33.10(33.10). Горизонтальная трубка CD равномерно вращается вокруг вертикальной оси AB с угловой скоростью ω. Внутри трубки находится тело M. Определить скорость v тела относительно трубки в момент его вылета, если в начальный момент $v = 0$, $x = x_0$, длина трубки равна L. Трением пренебречь.

Ответ: $v = \sqrt{L^2 - x_0^2}\,\omega$.

33.11(33.11). В условиях предыдущей задачи определить время движения тела в трубке

Ответ: $T = \frac{1}{\omega} \ln \frac{L + \sqrt{L^2 - x_0^2}}{x_0}$

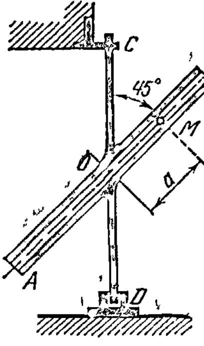
33.12(33.12). В условиях задачи 33.10 составить дифференциальное уравнение движения тела в трубке, если коэффициент трения скольжения между телом и трубкой равен f.

Ответ: $\ddot{x} = \omega^2 x \pm f\sqrt{g^2 + 4\omega^2 x^2}$ верхнему знаку соответствует $\dot{x} < 0$, нижнему $x > 0$

33.13(33.13). Кольцо движется по гладкому стержню AB, который равномерно вращается в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через конец A, делая один оборот в секунду; длина стержня 1 м, в момент $t = 0$ кольцо находилось на расстоянии 60 см от конца A и имело скорость, равную нулю. Определить момент t_1, когда кольцо сойдет со стержня

Ответ: $t_1 = \frac{1}{2\pi}\ln 3 = 0{,}175$ с

33.14(33.14). Трубка AB вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси CD, составляя с ней неизменный угол 45° В трубке находится тяжелый шарик M Определить движение этого шарика относительно трубки, если начальная скорость его равна нулю и начальное расстояние от точки O равно a. Трением пренебречь



К задаче 33 14

Ответ: $OM = \frac{1}{2}\left(a - \frac{g\sqrt{2}}{\omega^2}\right)\left(e^{0,5\omega t\sqrt{2}} + e^{-0,5\omega t\sqrt{2}}\right) + \frac{g\sqrt{2}}{\omega^2}$.

33.15(33.15). Определить, как меняется ускорение силы тяжести в зависимости от широты места φ вследствие вращения Земли вокруг своей оси Радиус Земли $R = 6370$ км.

Ответ Если пренебречь членом с ω^4 ввиду его малости, то $g_1 = g\left(1 - \frac{\omega^2 R\cos^2\varphi}{g}\right)$, или $g_1 = 9{,}81\left(1 - \frac{\cos^2\varphi}{289}\right)$, где g — ускорение силы тяжести на полюсе, φ — географическая широта места

33.16(33.16). Во сколько раз надо увеличить угловую скорость вращения Земли вокруг своей оси, чтобы тяжелая точка, находящаяся на поверхности Земли на экваторе, не имела бы веса? Радиус Земли $R = 6370$ км

Ответ. В 17 раз

33.17(33.17). Артиллерийский снаряд движется по настильной траектории (т. е. по траектории, которую приближенно можно считать горизонтальной прямой). Горизонтальная скорость снаряда во время движения $v_0 = 900$ м/с Снаряд должен поразить цель, отстоящую от места выстрела на расстоянии 18 км Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить, насколько отклонится снаряд от цели вследствие вращения Земли Стрельба происходит на северной широте $\lambda = 60°$

Ответ Снаряд отклонится вправо (если смотреть на него сверху перпендикулярно к скорости) на величину $s = \omega v_0 t^2 \sin\lambda = 22{,}7$ м независимо от направления стрельбы.

33.18(33.18). Маятник на длинной нити получает небольшую начальную скорость в плоскости север-юг. Считая отклонения маятника малыми по сравнению с длиной нити и принимая во внимание вращение Земли вокруг оси, найти время, по истечении которого плоскость качаний маятника совпадает с плоскостью запад-восток Маятник расположен на 60° северной широты.

Ответ. $T = 13{,}86(0{,}5 + k)$ часов, где $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

33.19. Тяжелая точка может двигаться без трения по вертикальному проволочному кольцу, которое вращается вокруг своего вертикального диаметра с постоянной угловой скоростью ω. Радиус кольца равен R. Найти положение равновесия точки и определить, как будет двигаться точка, если в положении равновесия она получит малую скорость v_0 по касательной вверх

Ответ: Положение равновесия соответствует углу $\varphi_0 = \arccos \frac{g}{\omega^2 R}$, отсчитываемому от нижнего положения точки на круге Точка, получившая малую скорость v_0, будет совершать малые колебания около положения равновесия согласно уравнению: $\varphi = \frac{v_0}{Rk} \sin kt$, где $k = \frac{\sqrt{\omega^4 R^2 - g^2}}{\omega R}$.

33.20. Пружинный вибродатчик используется для измерения вертикального ускорения поезда, круговая частота вертикальных колебаний которого равна 10 рад/с. База прибора составляет одно целое с корпусом одного из вагонов поезда. К базе прибора крепится пружина с коэффициентом жесткости $c = 17{,}64$ кН/м. К пружине прикреплен груз массы $m = 1{,}75$ кГ. Амплитуда относительного движения груза вибродатчика равна 0,125 см по записи прибора. Найти максимальное вертикальное ускорение поезда. Какова амплитуда вибрации поезда?

Ответ: Максимальное вертикальное ускорение поезда равно $w_{\max} = 1237$ см/с². Амплитуда вертикальных колебаний поезда равна: $a = 12{,}37$ см.

33.21. Виброметр используется для определения вертикальных колебаний одной из частей машины. В подвижной системе прибора демпфер отсутствует. Относительное смещение датчика виброметра (массивного груза) равно 0,005 см. Собственная частота колебаний виброметра — 6 Гц, частота колебаний вибрирующей части машины — 2 Гц. Чему равны амплитуда колебаний, максимальная скорость и максимальное ускорение вибрирующей части машины?

Ответ: Амплитуда колебаний равна $a = 0{,}04$ см, максимальная скорость равна $v_m = 0{,}5$ см/с, максимальное ускорение равно $w_m = 6{,}316$ см/с².

33.22. Груз массы $m = 1{,}75$ кг подвешен внутри коробки на вертикальной пружине, коэффициент жесткости которой $c = 0{,}88$ кН/м. Коробка установлена на столе, вибрирующем в вертикальном направлении. Уравнение колебаний стола $x = 0{,}225 \sin 3t$ см. Найти абсолютную амплитуду колебаний груза

Ответ: $x = 0{,}2254$ см.

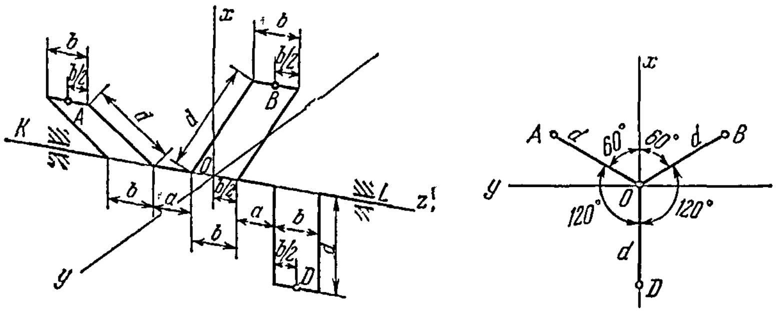
ГЛАВА X

ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

§ 34. Геометрия масс: центр масс материальной системы, моменты инерции твердых тел

34.1(34.1). Коленчатый вал трехцилиндрового двигателя, изображенный на рисунке, состоит из трех колен, расположенных под углом 120° друг к другу. Определить положение центра масс коленчатого вала, считая, что массы колен сосредоточены в точках A, B и D, причем $m_A = m_B = m_D = m$, и пренебрегая массами остальных частей вала. Размеры указаны на рисунке.

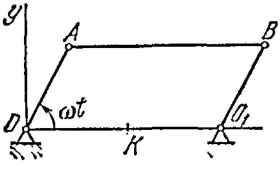
Ответ: Центр масс совпадает с началом координат O.



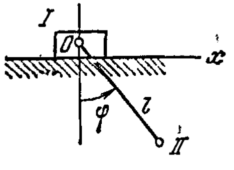
К задаче 34.1

34.2(34.2). Найти уравнения движения центра масс шарнирного параллелограмма $OABO_1$, а также уравнение траектории его центра масс при вращении кривошипа OA с постоянной угловой скоростью ω. Звенья параллелограмма — однородные стержни, причем $OA = O_1B = AB/2 = a$.

Ответ: $x_C = a + \frac{3}{4}a\cos\omega t$, $y_C = \frac{3}{4}a\sin\omega t$; уравнение траектории $(x_C - a)^2 + y_C^2 = \left(\frac{3}{4}a\right)^2$ — окружность радиуса $\frac{3}{4}a$ с центром в точке K с координатами $(a, 0)$.



К задаче 34.2



К задаче 34.3

34.3(34.3). К ползуну I массы M_1 посредством тонкой невесомой нити прикреплен груз II массы M_2. При колебаниях груза по закону $\varphi = \varphi_0 \sin\omega t$ ползун скользит по неподвижной горизонтальной гладкой поверхности. Найти уравнение движения ползуна

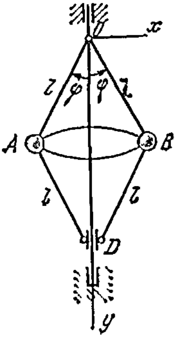
$x_1 = f(t)$, считая, что в начальный момент $(t=0)$ ползун находился в начале отсчета O оси x. Длина нити равна l.

Ответ: $x_1 = -\dfrac{M_2}{M_1+M_2}\, l \sin(\varphi_0 \sin \omega t)$

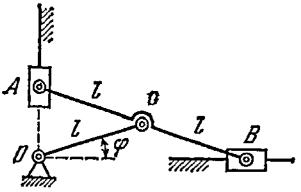
34.4(34.4). Определить положение центра масс центробежного регулятора, изображенного на рисунке, если масса каждого из шаров A и B равна M_1, масса муфты D равна M_2. Шары A и B считать точечными массами Массой стержней пренебречь.

Ответ: $x_C = 0$, $y_C = 2\dfrac{M_1+M_2}{2M_1+M_2}\, l \cos\varphi$

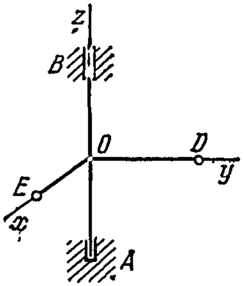
34.5(34.5). Определить траекторию центра масс механизма эллипсографа, состоящего из муфт A и B массы M_1 каждая, кривошипа OC массы M_2 и линейки AB массы $2M_2$; дано: $OC = AC = CB = l$. Считать, что линейка и кривошип представляют однородные стержни, а муфты — точечные массы.



К задаче 34.4



К задаче 34.5



К задаче 34.6

Ответ: Окружность с центром в точке O и радиусом, равным

$$\frac{4M_1+5M_2}{2M_1+3M_2}\cdot\frac{l}{2}.$$

34.6. К вертикальному валу AB прикреплены два одинаковых груза E и D с помощью двух перпендикулярных оси AB и притом взаимно перпендикулярных стержней $OE = OD = r$. Массами стержней и вала пренебречь. Грузы считать точечными массами. Найти положение центра масс C системы, а также центробежные моменты инерции J_{xz}, J_{yz}, J_{xy}.

Ответ: $C(^1/_2 r,\ ^1/_2 r,\ 0)$, $J_{xz} = J_{yz} = J_{xy} = 0$

34.7(34.8). Вычислить момент инерции стального вала радиуса 5 см и массы 100 кг относительно его образующей. Вал считать однородным сплошным цилиндром.

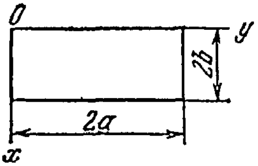
Ответ: 3750 кг·см^2.

34.8(34.9). Вычислить момент инерции тонкого однородного полудиска массы M и радиуса r относительно оси, проходящей вдоль диаметра, ограничивающего полудиск.

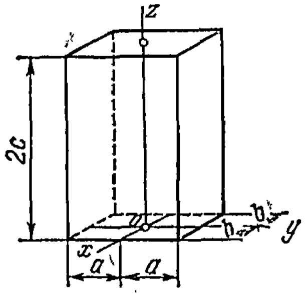
Ответ: $Mr^2/4$.

34.9(34.10). Вычислить осевые J_x и J_y моменты инерции изображенной на рисунке однородной прямоугольной пластинки массы M относительно осей x и y

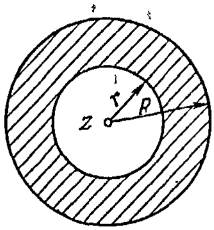
Ответ: $J_x = {}^4/_3 Ma^2$, $J_y = {}^4/_3 Mb^2$.



К задаче 34.9



К задаче 34.10



К задаче 34.11

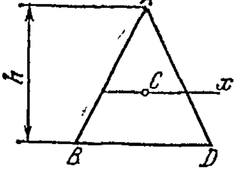
34.10(34.11). Вычислить моменты инерции изображенного на рисунке однородного прямоугольного параллелепипеда массы M относительно осей x, y и z

Ответ: $J_x = \frac{M}{3}(a^2 + 4c^2)$, $J_y = \frac{M}{3}(b^2 + 4c^2)$, $J_z = \frac{M}{3}(a^2 + b^2)$.

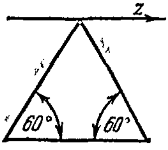
34.11(34.12). В тонком однородном круглом диске радиуса R высверлено концентрическое отверстие радиуса r. Вычислить момент инерции этого диска массы M относительно оси z, проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости диска.

Ответ: $J_z = \frac{M}{2}(R^2 + r^2)$.

34.12(34.13). Вычислить момент инерции тонкой однородной пластинки массы M, имеющей форму равнобедренного треугольника с высотой h, относительно оси, проходящей через ее центр масс C параллельно основанию.



К задаче 34.12



К задаче 34.13

Ответ: $\frac{1}{18}Mh^2$.

34.13. Однородная металлическая пластинка выполнена в виде равностороннего треугольника. Масса пластинки равна M, l — длина ее стороны. Вычислить момент инерции пластинки относительно оси z, проходящей через ее вершину параллельно основанию.

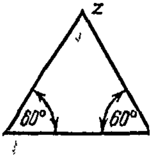
Ответ: $I_z = \frac{3}{8}Ml^2$.

34.14. Однородная равносторонняя треугольная пластина имеет массу M и длину стороны l. Вычислить момент инерции пластины относительно оси z, проходящей через вершину пластины перпендикулярно ее плоскости.

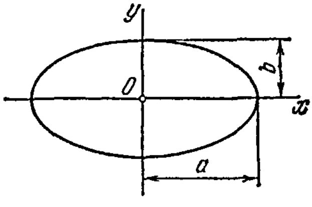
Ответ: $I_z = \frac{5}{12} Ml^2$.

34.15(34.16). Вычислить моменты инерции относительно трех взаимно перпендикулярных осей x, y и z тонкой однородной эллиптической пластинки массы M, ограниченной контуром $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Ответ: $J_x = \frac{M}{4} b^2$, $J_y = \frac{M}{4} a^2$, $J_z = \frac{M}{4}(a^2 + b^2)$.



К задаче 34.14

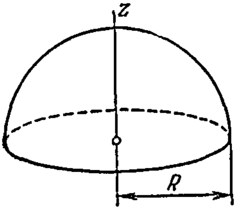


К задаче 34.15

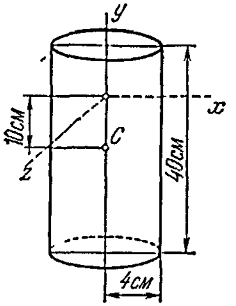
34.16(34.17). Определить момент инерции однородного полого шара массы M относительно оси, проходящей через его центр тяжести. Внешний и внутренний радиусы соответственно равны R и r.

Ответ: $\frac{2}{5} M \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}$

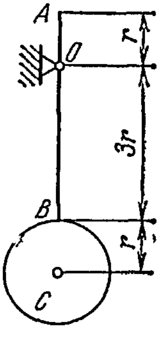
34.17(34.18). Вычислить момент инерции однородной тонкой оболочки, выполненной в виде полусферы радиуса R, относительно оси, проходящей через центр полусферы перпендикулярно к ограничивающей ее плоскости. Масса M оболочки равномерно распределена по поверхности полусферы.



К задаче 34.17



К задаче 34.18



К задаче 34.19

Ответ: $\frac{2}{3} MR^2$.

34.18(34.19). Вычислить радиус инерции сплошного однородного цилиндра относительно оси z, перпендикулярной оси цилиндра и отстоящей от его центра масс C на расстоянии 10 см, если радиус цилиндра равен 4 см, а высота 40 см.

Ответ: 15,4 см.

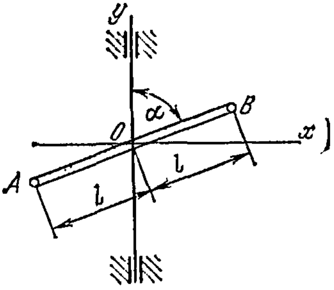
34.19(34.21). Маятник состоит из тонкого однородного стержня AB массы M_1, к концу которого прикреплен однородный диск C массы M_2. Длина стержня равна $4r$, где r — радиус диска. Вычислить момент инерции маятника относительно его оси привеса O, перпендикулярной плоскости маятника и отстоящей на расстоянии r от конца стержня

Ответ: $\frac{4M_1 + 99M_2}{6} r^2$.

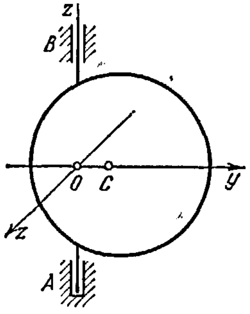
34.20(34.23). Тонкий однородный стержень AB длины $2l$ и массы M прикреплен в центре O к вертикальной оси, образуя с ней угол α. Вычислить моменты инерции стержня J_x, J_y и центробежный момент инерции J_{xy}. Оси координат показаны на рисунке.

Ответ: $J_x = \frac{Ml^2}{3}\cos^2\alpha$, $J_y = \frac{Ml^2}{3}\sin^2\alpha$, $J_{xy} = \frac{Ml^2}{6}\sin 2\alpha$

34.21. Однородный круглый диск массы M и радиуса r прикреплен к оси AB, отстоящей от центра масс C на расстоянии $OC = r/2$. Вычислить осевые и центробежные моменты инерции диска.



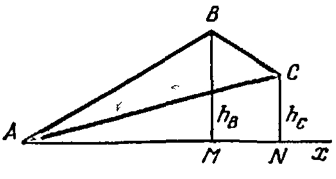
К задаче 34.20



К задаче 34.21

Ответ: $J_x = \frac{3}{4}Mr^2$, $J_y = \frac{Mr^2}{4}$, $J_z = \frac{Mr^2}{2}$, $J_{xy} = J_{xz} = J_{yz} = 0$

34.22. Вычислить момент инерции однородной треугольной пластинки ABC массы M относительно оси x, проходящей через ее вершину A в плоскости пластинки, если даны расстояния от точек B и C до оси x, $BM = h_B$, $CN = h_C$.



К задаче 34.22

Ответ: $J_x = \frac{M}{6}(h_B^2 + h_Bh_C + h_C^2)$

34.23(34.24). По данным задачи 34.1 определить центробежные моменты инерции J_{xz}, J_{yz}, J_{xy} коленчатого вала.

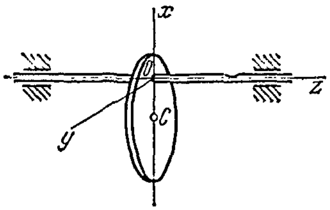
Ответ: $J_{xz} = -\frac{3}{2}md(a+b)$, $J_{yz} = -\frac{\sqrt{3}}{2}md(a+b)$, $J_{xy} = 0$

34.24(34.25). Однородный круглый диск массы M эксцентрично насажен на ось z, перпендикулярную его плоскости. Радиус диска равен r, эксцентриситет $OC = a$, где C — центр масс диска. Вычислить осевые J_x, J_y, J_z и центробежные J_{xy}, J_{xz}, J_{yz} моменты инерции диска. Оси координат показаны на рисунке.

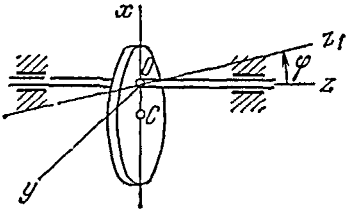
Ответ: $J_x = \frac{Mr^2}{4}$, $J_y = M\left(\frac{r^2}{4} + a^2\right)$, $J_z = M\left(\frac{r^2}{2} + a^2\right)$, $J_{xy} = J_{xz} = J_{yz} = 0$.

34.25(34.27). По данным задачи 34 24 вычислить момент инерции диска относительно оси z_1, лежащей в вертикальной плоскости xz и образующей с осью z угол φ.

Ответ: $J_{z_1} = \frac{Mr^2}{4}\sin^2\varphi + M\left(\frac{r^2}{2} + a^2\right)\cos^2\varphi$.

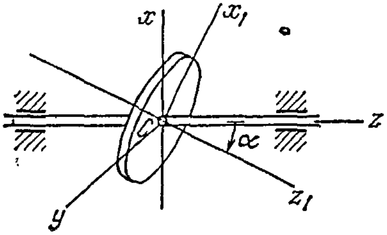


К задаче 34 24

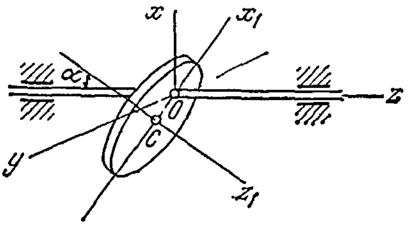


К задаче 34 25

34.26(34.28). Однородный круглый диск массы M насажен на ось z, проходящую через его центр масс C. Ось симметрии диска z_1 лежит в вертикальной плоскости симметрии xz и образует с осью z угол α. Радиус диска равен r. Вычислить центробежные моменты инерции диска J_{xz}, J_{yz}, J_{xy} (оси координат показаны на рисунке).



К задаче 34 26



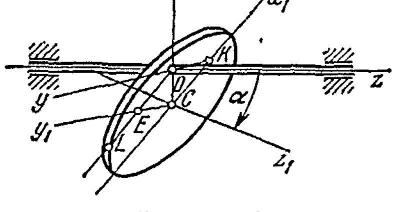
К задаче 34 27

Ответ: $J_{xy} = J_{zy} = 0$, $J_{xz} = (J_{z_1} - J_{x_1})\frac{\sin 2\alpha}{2} = \frac{Mr^2}{8}\sin 2\alpha$.

34.27(34.29). Решить предыдущую задачу в предположении, что диск эксцентрично насажен на ось z, причем эксцентриситет $OC = a$.

Ответ: $J_{xy} = J_{yz} = 0$,

$$J_{xz} = \frac{M}{2}\left(\frac{r^2}{4} + a^2\right)\sin 2\alpha$$



К задаче 34 28

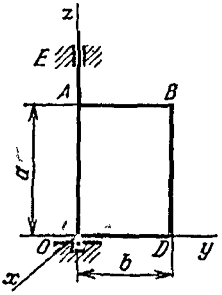
34.28(34.30). Однородный круглый диск радиуса R насажен на ось вращения z, проходящую через точку O и составляющую с осью симметрии диска Cz_1 угол α Масса диска равна M. Определить момент инерции J_z диска относительно оси вращения z и центробежные моменты инерции J_{xz} и J_{yz}, если OL — проекция оси z на плоскость диска, $OE = a$, $OK = b$

Ответ: $J_z = M\left[\left(a^2 + \frac{1}{2}R^2\right)\cos^2\alpha + \frac{1}{4}R^2\sin^2\alpha + b^2\right]$,

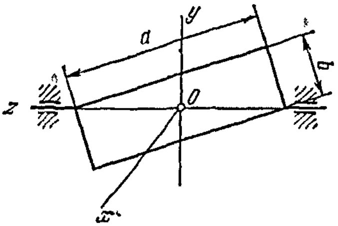
$$J_{xz} = M\left(\frac{1}{4}R^2 + a^2\right)\sin\alpha\cos\alpha,\quad J_{yz} = Mab\sin\alpha$$

34.29. Однородная прямоугольная пластинка $OABD$ массы M со сторонами a и b прикреплена стороной OA к оси OE. Вычислить центробежные моменты инерции пластинки J_{xz}, J_{yz} и J_{xy}

Ответ: $J_{xz} = J_{xy} = 0$, $J_{yz} = \frac{Mab}{4}$.



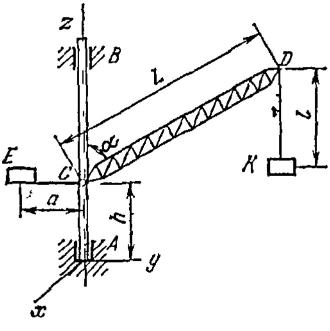
К задаче 34.29



К задаче 34.30

34.30(34.31). Однородная прямоугольная пластинка массы M со сторонами длины a и b прикреплена к оси z, проходящей через одну из ее диагоналей Вычислить центробежный момент инерции J_{yz} пластинки относительно осей y и z, лежащих вместе с пластинкой в плоскости рисунка Начало координат совмещено с центром масс пластинки

Ответ: $J_{yz} = \frac{M}{12}\,\frac{ab\,(a^2 - b^2)}{a^2 + b^2}$



К задаче 34.31

34.31(34.34). Вращающаяся часть подъемного крана состоит из стрелы CD длины L и массы M_1, противовеса E массы M_2 и груза K массы M_3 Рассматривая стрелу как однородную тонкую балку, а противовес E и груз K как точечные массы, определить момент инерции J_z крана относительно вертикальной оси вращения z и центробежные моменты инерции относительно осей координат x, y, z, связанных с краном Центр масс всей системы находится на оси z, стрела CD расположена в плоскости yz

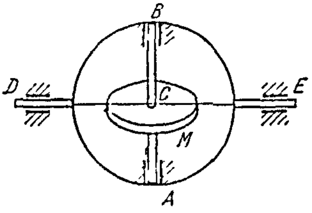
Ответ: $J_z = M_2a^2 + \left(M_3 + \frac{1}{3}M_1\right)L^2\sin^2\alpha$,

$$J_{yz} = \frac{M_3 + {}^1/_3 M_1}{2}L^2\sin 2\alpha - M_3Ll\sin\alpha,\quad J_{xy} = J_{xz} = 0.$$

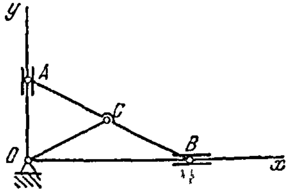
§ 35. Теорема о движении центра масс материальной системы

35.1(35.1). Определить главный вектор внешних сил, действующих на маховик M, вращающийся вокруг оси AB. Ось AB, укрепленная в круговой раме, в свою очередь вращается вокруг оси DE. Центр масс C маховика находится в точке пересечения осей AB и DE.

Ответ. Главный вектор внешних сил равен нулю.



К задаче 35.1

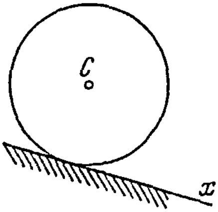


К задаче 35.2

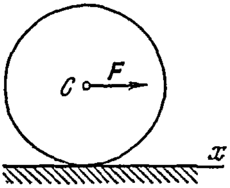
35.2(35.2). Определить главный вектор внешних сил, приложенных к линейке AB эллипсографа, изображенного на рисунке. Кривошип OC вращается с постоянной угловой скоростью ω, масса линейки AB равна M, $OC = AC = BC = l$.

Ответ. Главный вектор внешних сил параллелен CO и равен по модулю $Ml\omega^2$

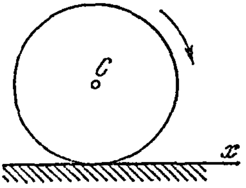
35.3(35.3). Определить главный вектор внешних сил, действующих на колесо массы M, скатывающееся с наклонной плоскости вниз, если его центр масс C движется по закону $x_C = at^2/2$.



К задаче 35.3



К задаче 35.4



К задаче 35.5

Ответ: Главный вектор внешних сил параллелен оси x, направлен в сторону движения и равен по модулю Ma

35.4(35.4). Колесо катится со скольжением по горизонтальной прямой под действием силы F, изображенной на рисунке. Найти закон движения центра масс C колеса, если коэффициент трения скольжения равен f, а $F = 5fP$, где P — вес колеса. В начальный момент колесо находилось в покое.

Ответ. $x_C = 2fgt^2$.

35.5(35.5). Колесо катится со скольжением по горизонтальной прямой под действием приложенного к нему вращающего момента. Найти закон движения центра масс C колеса, если коэффициент трения скольжения равен f. В начальный момент колесо находилось в покое.

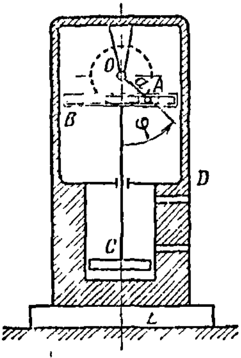
Ответ: $x_C = fgt^2/2$.

35.6(35.6). Вагон трамвая совершает вертикальные гармонические колебания на рессорах амплитуды 2,5 см и периода $T = 0{,}5$ с. Масса кузова с нагрузкой 10 т, масса тележки и колес 1 т. Определить силу давления вагона на рельсы.

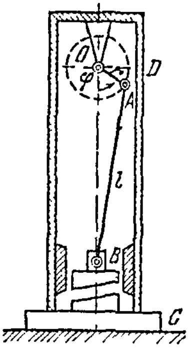
Ответ: от 68,0 до 147,6 кН.

35.7(35.7). Определить силу давления на грунт насоса для откачки воды при его работе вхолостую, если масса неподвижных частей корпуса D и фундамента E равна M_1, масса кривошипа $OA = a$ равна M_2, масса кулисы B и поршня C равна M_3. Кривошип OA, вращающийся равномерно с угловой скоростью ω, считать однородным стержнем.

Ответ: $N = (M_1 + M_2 + M_3)g + \frac{a\omega^2}{2}(M_2 + 2M_3)\cos\omega t$.



К задаче 35.7



К задаче 35.9

35.8(35.8). Использовав данные предыдущей задачи, считать, что насос установлен на упругом основании, коэффициент упругости которого равен c. Найти закон движения оси O кривошипа OA по вертикали, если в начальный момент ось O находилась в положении статического равновесия и ей была сообщена по вертикали вниз скорость v_0. Взять начало отсчета оси x, направленной вертикально вниз, в положении статического равновесия оси O. Силами сопротивления пренебречь.

Ответ. 1) При $\frac{c}{M_1 + M_2 + M_3} \neq \omega^2$ $\quad x_O = -\frac{h}{k^2 - \omega^2}\cos kt +$

$$+ \frac{v_0}{k}\sin kt + \frac{h}{k^2 - \omega^2}\cos\omega t,$$

где $k = \sqrt{\frac{c}{M_1 + M_2 + M_3}}$, $h = \frac{M_2 + 2M_3}{M_1 + M_2 + M_3}\,\frac{a\omega^2}{2}$;

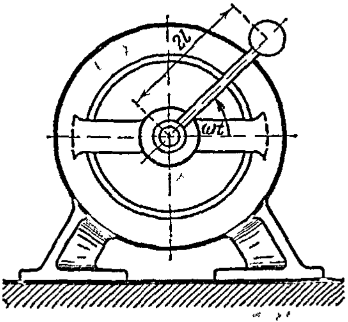
2) при $\frac{c}{M_1 + M_2 + M_3} = \omega^2$ $\quad x_O = \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t + \frac{h}{2\omega}t\sin\omega t$.

35.9(35.9). Ножницы для резки металла состоят из кривошипно-ползунного механизма OAB, к ползуну B которого прикреплен подвижный нож. Неподвижный нож укреплен на фундаменте C. Определить давление фундамента на грунт, если длина кривошипа r, масса кривошипа M_1, длина шатуна l, масса ползуна B с подвижным ножом M_2, масса фундамента C и корпуса D равна M_3. Массой шатуна пренебречь. Кривошип OA, равномерно вращающийся с угловой скоростью ω, считать однородным стержнем, Указание. Выражение $\sqrt{1-(r/l)^2\sin^2\omega t}$ следует разложить в ряд и отбросить все члены ряда, содержащие отношение r/l в степени выше второй.

Ответ: $N=(M_1+M_2+M_3)g+\frac{r\omega^2}{2}\Big[(M_1+2M_2)\cos\omega t+$
$$+\,2M_2\frac{r}{l}\cos 2\omega t\Big].$$

35.10(35.10). Электрический мотор массы M_1 установлен без креплений на гладком горизонтальном фундаменте; на валу мотора под прямым углом закреплен одним концом однородный стержень длины $2l$ и массы M_2, на другой конец стержня насажен точечный груз массы M_3; угловая скорость вала равна ω.

Определить: 1) горизонтальное движение мотора; 2) наибольшее горизонтальное усилие R, действующее на болты, если ими будет закреплен кожух электромотора на фундаменте.



К задаче 35.10

Ответ: 1) Гармонические колебания с амплитудой $\frac{l(M_2+2M_3)}{M_1+M_2+M_3}$ и периодом $2\pi/\omega$;

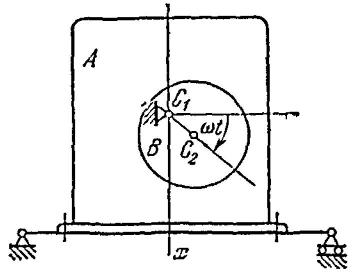
2) $R=(M_2+2M_3)l\omega^2$.

35.11(35.11). По условиям предыдущей задачи вычислить ту угловую скорость ω вала электромотора, при которой электромотор будет подпрыгивать над фундаментом, не будучи к нему прикреплен болтами.

Ответ: $\omega>\sqrt{\frac{(M_1+M_2+M_3)g}{(M_2+2M_3)l}}$.

35.12(35.12). При сборке электромотора его ротор B был эксцентрично насажен на ось вращения C_1 на расстоянии $C_1C_2=a$, где C_1 — центр масс статора A, а C_2 — центр масс ротора B. Ротор равномерно вращается с угловой скоростью ω. Электромотор установлен посередине упругой балки, статический прогиб которой равен Δ, M_1 — масса статора, M_2 — масса ротора.

Найти уравнение движения точки C_1 по вертикали, если в начальный момент она находилась в покое в положении статического равновесия. Силами сопротивления пренебречь. Начало отсчета оси x взять в положении статического равновесия точки C_1.



К задаче 35.12

Ответ: 1) При $\sqrt{\frac{g}{\Delta}}\neq\omega$ $x_1=-\frac{\omega}{k}\frac{h}{k^2-\omega^2}\sin kt+\frac{h}{k^2-\omega^2}\sin\omega t$,

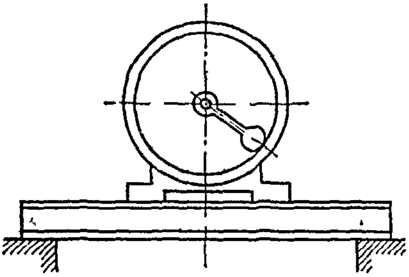
где $k=\sqrt{\frac{g}{\Delta}}$, $h=\frac{M_2}{M_1+M_2}a\omega^2$;

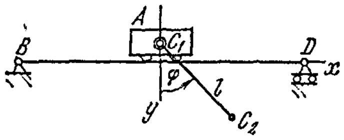
2) при $\sqrt{\frac{g}{\Delta}} = \omega$ $x_1 = \frac{h}{2\omega^2}\sin\omega t - \frac{h}{2\omega} t\cos\omega t$.

35.13(35.13). Электрический мотор массы M_1 установлен на балке, жесткость которой равна c. На вал мотора насажен груз массы M_2 на расстоянии l от оси вала. Угловая скорость мотора $\omega = \text{const}$. Определить амплитуду вынужденных колебаний мотора и критическое число его оборотов в минуту, пренебрегая массой балки и сопротивлением движению.

Ответ: $a = \frac{M_2 l\omega^2}{c - (M_1 + M_2)\omega^2}$, $n_{кр} = \frac{30}{\pi}\sqrt{\frac{c}{M_1 + M_2}}$.

35.14(35.15). На рисунке изображена крановая тележка A массы M_1, которая заторможена посередине балки BD. В центре масс C_1 тележки подвешен трос длины l с привязанным к нему грузом C_2 массы M_2. Трос с грузом совершает гармонические колебания в вертикальной плоскости. Определить: 1) суммарную вертикальную реакцию балки BD, считая ее жесткой; 2) закон движения точки C_1 в вертикальном направлении, считая балку упругой с коэффициентом упругости, равным c.


К задаче 35 13



К задаче 35 14

В начальный момент балка, будучи недеформированной, находилась в покое в горизонтальном положении. Считая колебания троса малыми, принять: $\sin\varphi \approx \varphi$, $\cos\varphi \approx 1$. Начало отсчета оси y взять в положении статического равновесия точки C_1. Массой троса и размерами тележки по сравнению с длиной балки пренебречь.

Ответ: 1) $R_y = (M_1 + M_2)g$, 2) точка C_1 совершает свободные колебания по закону $y_1 = -\frac{(M_1 + M_2)g}{c}\cos\sqrt{\frac{c}{M_1 + M_2}}\,t$.

35.15(35.16). Сохранив данные предыдущей задачи и считая балку BD жесткой, определить: 1) суммарную горизонтальную реакцию рельсов; 2) в предположении, что тележка не заторможена, закон движения центра масс C_1 тележки A вдоль оси x.

В начальный момент точка C_1 находилась в покое в начале отсчета оси x. Трос совершает колебания по закону $\varphi = \varphi_0\cos\omega t$.

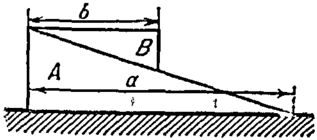
Ответ: 1) $R_x = -M_2 l\varphi_0\omega^2\cos\omega t$; 2) точка C_1 совершает колебания с амплитудой $\frac{M}{M_1 + M_2} l\varphi_0$ и круговой частотой ω по закону,

$x_1 = -\frac{M_2}{M_1 + M_2} l\varphi_0(1 - \cos\omega t)$.

35.16(35.17). На средней скамейке лодки, находившейся в покое, сидели два человека. Один из них, массы $M_1 = 50$ кг, переместился вправо на нос лодки. В каком направлении и на какое расстояние должен переместиться второй человек массы $M_2 = 70$ кг для того, чтобы лодка осталась в покое? Длина лодки 4 м. Сопротивлением воды движению лодки пренебречь.

Ответ: Влево на корму лодки на расстояние 1,43 м.

35.17(35.18). На однородную призму A, лежащую на горизонтальной плоскости, положена однородная призма B; поперечные сечения призм — прямоугольные треугольники, масса призмы A втрое больше массы призмы B. Предполагая, что призмы и горизонтальная плоскость идеально гладкие, определить длину l, на которую передвинется призма A, когда призма B, спускаясь по A, дойдет до горизонтальной плоскости.



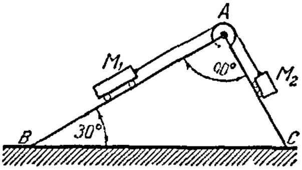
К задаче 35 17

Ответ: $l = (a - b)/4$

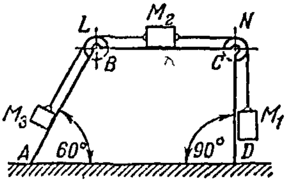
35.18(35.19). По горизонтальной товарной платформе длины 6 м и массы 2700 кг, находившейся в начальный момент в покое, двое рабочих перекатывают тяжелую отливку из левого конца платформы в правый. В какую сторону и насколько переместится при этом платформа, если общая масса груза и рабочих равна 1800 кг? Силами сопротивления движению платформы пренебречь.

Ответ: Налево на 2,4 м.

35.19(35.20). Два груза M_1 и M_2, соответственно массы M_1 и M_2, соединенные нерастяжимой нитью, переброшенной через блок A, скользят по гладким боковым сторонам прямоугольного клина, опирающегося основанием BC на гладкую горизонтальную плоскость. Найти перемещение клина по горизонтальной плоскости при опускании груза M_1 на высоту $h = 10$ см. Масса клина $M = 4M_1 = 16M_2$; массой нити и блока пренебречь.



К задаче 35 19



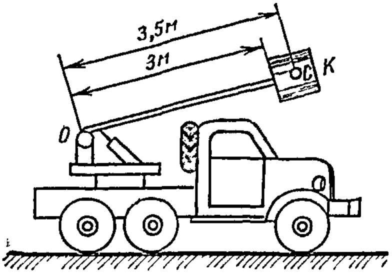
К задаче 35 20

Ответ: Клин переместится вправо на 3,77 см.

35.20(35.21). Три груза массы $M_1 = 20$ кг, $M_2 = 15$ кг и $M_3 = 10$ кг соединены нерастяжимой нитью, переброшенной через неподвижные блоки L и N. При опускании груза M_1 вниз груз M_2 перемещается по верхнему основанию четырехугольной усеченной пирамиды $ABCD$ массы $M = 100$ кг вправо, а груз M_3 поднимается по боковой грани AB вверх. Пренебрегая трением между усеченной пирамидой $ABCD$ и полом, определить перемещение усеченной пирамиды $ABCD$ относительно пола, если груз M_1 опустится вниз на 1 м. Массой нити пренебречь.

Ответ: Влево на 14 см.

35.21. Подвижной поворотный кран для ремонта уличной электросети установлен на автомашине массы 1 т. Люлька K крана, укрепленная на стержне L, может поворачиваться вокруг горизонтальной оси O, перпендикулярной плоскости рисунка. В начальный момент кран, занимавший горизонтальное положение, и автомашина находились в покое. Определить перемещение незаторможенной автомашины, если кран повернулся на 60°. Масса однородного стержня L длины 3 м равна 100 кг, а люльки K — 200 кг. Центр масс C люльки K отстоит от оси O на расстоянии $OC = 3{,}5$ м. Сопротивлением движению пренебречь.



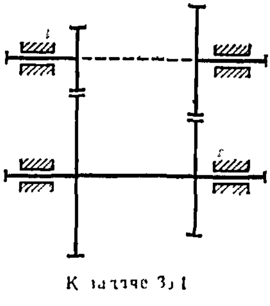
К задаче 35.21

Ответ: Направо на 32,7 см.

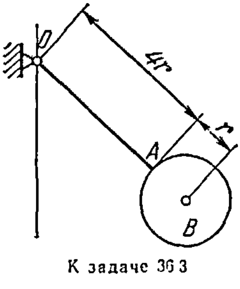
§ 36. Теорема об изменении главного вектора количеств движения материальной системы. Приложение к сплошным средам

36.1 (36.1). Определить главный вектор количеств движения работающего редуктора скоростей, изображенного на рисунке, если центры тяжести каждого из четырех вращающихся зубчатых колес лежат на осях вращения.

Ответ: Главный вектор количеств движения равен нулю.



К задаче 36.1



К задаче 36.3

36.2 (36.2). Определить сумму импульсов внешних сил, приложенных к редуктору, рассмотренному в предыдущей задаче, за произвольный конечный промежуток времени.

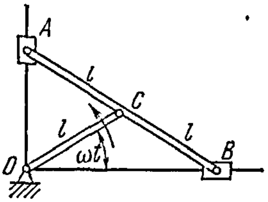
Ответ: Сумма импульсов внешних сил равна нулю.

36.3 (36.3). Определить главный вектор количеств движения маятника, состоящего из однородного стержня OA массы M_1, длины $4r$ и однородного диска B массы M_2, радиуса r, если угловая скорость маятника в данный момент равна ω.

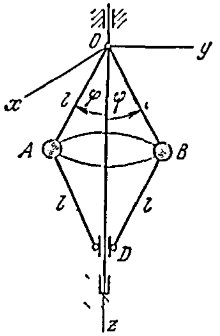
Ответ. Главный вектор количеств движения направлен перпендикулярно стержню OA и по модулю равен $(2M_1+5M_2)r\omega$

36.4(36.4). Определить модуль и направление главного вектора количеств движения механизма эллипсографа, если масса кривошипа равна M_1, масса линейки AB эллипсографа равна $2M_1$, масса каждой из муфт A и B равна M_2; даны размеры: $OC = AC = CB = l$. Центры масс кривошипа и линейки расположены в их серединах. Кривошип вращается с угловой скоростью ω.

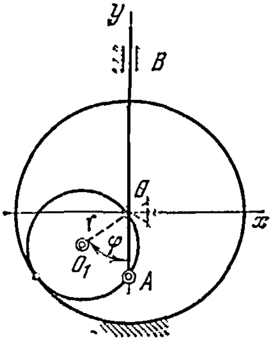
Ответ: Модуль главного вектора равен $Q=\frac{\omega l}{2}(5M_1+4M_2)$; направление главного вектора перпендикулярно кривошипу.



К задаче 36.4



К задаче 36.5



К задаче 36.6

36.5(36.5). Определить главный вектор количеств движения центробежного регулятора, ускоренно вращающегося вокруг вертикальной оси. При этом углы φ изменяются по закону $\varphi=\varphi(t)$ и верхние стержни, поворачиваясь, поднимают шары A и B. Длины стержней: $OA = OB = AD = BD = l$. Центр масс муфты D массы M_2 лежит на оси z. Шары A и B считать точечными массами массы M_1 каждый. Массой стержней пренебречь.

Ответ: $Q_x = Q_y = 0$, $Q_z = -2(M_1+M_2)l\dot{\varphi}\sin\varphi$, где Q — главный вектор количеств движения, плоскость yz совпадает с плоскостью расположения стержней регулятора.

36.6(36.7). В механизме, изображенном на рисунке, движущееся колесо радиуса r имеет массу M, причем центр масс колеса находится в точке O_1, центр масс прямолинейного стержня AB массы kM находится в его середине. Кривошип OO_1 вращается вокруг оси O с постоянной угловой скоростью ω. Определить главный вектор количеств движения системы, пренебрегая массой кривошипа.

Ответ. Проекции главного вектора количеств движения системы на оси координат: 1) на ось Ox: $-Mr\omega\cos\omega t$, 2) на ось Oy: $Mr\omega(1+2k)\sin\omega t$.

36.7(36.8). Масса ствола орудия равна 11 т. Масса снаряда равна 54 кг. Скорость снаряда у дульного среза $v_0 = 900$ м/с.

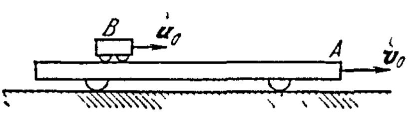
Определить скорость свободного отката ствола орудия в момент вылета снаряда

Ответ: Скорость отката ствола орудия равна 4,42 м/с и направлена в сторону, противоположную движению снаряда

36.8(36.9). Граната массы 12 кг, летевшая со скоростью 15 м/с, разорвалась в воздухе на две части Скорость осколка массы 8 кг возросла в направлении движения до 25 м/с Определить скорость второго осколка.

Ответ. 5 м/с в направлении, противоположном движению первого осколка

36.9(36.11). По горизонтальной платформе A, движущейся по инерции со скоростью v_0, перемещается тележка B с постоянной относительной скоростью u_0 В некоторый момент времени тележка была заторможена Определить общую скорость v платформы с тележкой после ее остановки, если M — масса платформы, а m — масса тележки



К задаче 36.9

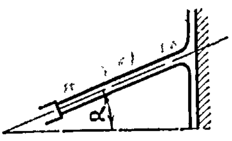
Ответ: $v = v_0 + \frac{m}{M+m} u_0$

36.10(36.12). Сохранив условие предыдущей задачи, определить путь s, который пройдет тележка B по платформе A с момента начала торможения до полной остановки, и время торможения τ, если считать, что при торможении возникает постоянная по величине сила сопротивления F

Указание В дифференциальном уравнении движения тележки использовать соотношение $Mv + m(u+v) = \text{const}$ где u и v — переменные скорости

Ответ: $s = \frac{1}{2} \frac{mM}{M+m} \frac{u_0^2}{F}, \quad \tau = \frac{mM}{m+M} \frac{u_0}{F}.$

36.11(36.13). Из наконечника пожарного рукава с поперечным сечением 16 см² бьет струя воды под углом $\alpha = 30°$ к горизонту со скоростью 8 м/с Определить силу давления струи на вертикальную стену, пренебрегая действием силы тяжести на форму струи и считая, что частицы жидкости после встречи со стеною приобретут скорости, направленные вдоль стены



К задаче 36.11

Ответ. 88,8 Н

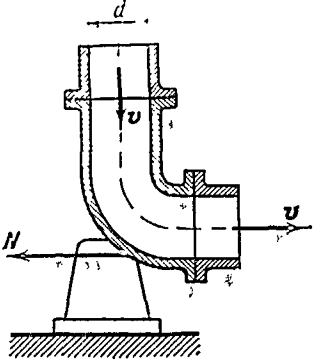
36.12(36.14). Определить горизонтальную составляющую N возникающей при движении воды силы давления на опору колена трубы диаметра $d = 300$ мм, по которой течет вода со скоростью $v = 2$ м/с.

Ответ: $N = 284$ Н

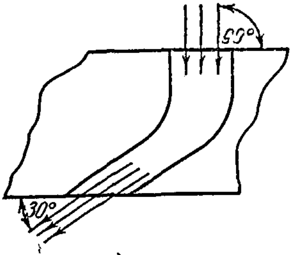
36.13(36.15). Вода входит в неподвижный канал переменного сечения, симметричный относительно вертикальной плоскости, со скоростью $v_0 = 2$ м/с под углом $\alpha_0 = 90°$ к горизонту; сечение канала при входе 0,02 м², скорость воды у выхода из канала $v_1 =$

$=4$ м/с и направлена под углом $\alpha_1=30^\circ$ к горизонту. Определить модуль горизонтальной составляющей силы, с которой вода действует на стенки канала.

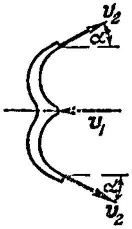
Ответ: 138 Н.



К задаче 36.12



К задаче 36.13



К задаче 36.14

36.14(36.17). Определить модуль горизонтальной составляющей силы давления струи воды на неподвижную лопатку турбинного колеса, если объемный расход воды Q, плотность γ, скорость подачи воды на лопатку v_1 горизонтальна, скорость схода воды v_2 образует угол α с горизонтом.

Ответ: $N=\gamma Q(v_1+v_2\cos\alpha)$.

§ 37. Теорема об изменении главного момента количеств движения материальной системы. Дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси

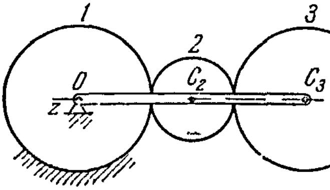
37.1(37.1). Однородный круглый диск массы $M=50$ кг и радиуса $R=30$ см катится без скольжения по горизонтальной плоскости, делая вокруг своей оси 60 об/мин. Вычислить главный момент количеств движения диска относительно осей: 1) проходящей через центр диска перпендикулярно плоскости движения; 2) относительно мгновенной оси.

Ответ: 1) 14,1 кг·м^2/с, 2) 42,3 кг·м^2/с.

37.2(37.2). Вычислить главный момент количеств движения линейки AB эллипсографа в абсолютном движении относительно оси z, совпадающей с осью вращения кривошипа OC, а также в относительном движении по отношению к оси, проходящей через центр масс C линейки параллельно оси z. Кривошип вращается с угловой скоростью, проекция которой на ось z равна ω_z; масса линейки равна m; $OC=AC=BC=l$ (см. рисунок к задаче 34.5).

Ответ: $L_{Oz}=\frac{2}{3}ml^2\omega_z$, $L_{Cz}=-\frac{ml^2}{3}\omega_z$.

37.3(37.3). Вычислить главный момент количеств движения планетарной передачи относительно неподвижной оси z, совпадающей с осью вращения кривошипа OC_3. Неподвижное колесо *1* и подвижное колесо 3 — одинакового радиуса r. Масса колеса 3 равна m. Колесо 2 массы m_2 имеет радиус r_2. Кривошип вращается с угловой скоростью, проекция которой на ось z равна ω_z. Массой кривошипа пренебречь. Колеса считать однородными дисками.



К задаче 37.3

Ответ: $L_{Oz} = \frac{m_2(2r+3r_2)+8m(r+r_2)}{2}(r+r_2)\,\omega_z$.

37.4(37.4). Натяжения ведущей и ведомой ветвей ремня, приводящего во вращение шкив радиуса $r = 20$ см, массы $M = 3{,}27$ кг, соответственно равны $T_1 = 100$ Н, $T_2 = 50$ Н. Чему должен быть равен момент сил сопротивления для того, чтобы шкив вращался с угловым ускорением $\varepsilon = 1{,}5$ рад/с^2? Шкив считать однородным диском.

Ответ: 9,8 Н·м.

37.5(37.5). Для определения момента трения в цапфах на вал насажен маховик массы 500 кг, радиус инерции маховика $\rho = 1{,}5$ м. Маховику сообщена угловая скорость, соответствующая $n = 240$ об/мин, предоставленный самому себе, он остановился через 10 мин. Определить момент трения, считая его постоянным.

Ответ: 47,1 Н·м.

37.6(37.7). Для быстрого торможения больших маховиков применяется электрический тормоз, состоящий из двух диаметрально расположенных полюсов, несущих на себе обмотку, питаемую постоянным током. Токи, индуцируемые в массе маховика при его движении мимо полюсов, создают тормозящий момент M_1, пропорциональный скорости v на ободе маховика: $M_1 = kv$, где k — коэффициент, зависящий от магнитного потока и размеров маховика. Момент M_2 от трения в подшипниках можно считать постоянным; диаметр маховика D, момент инерции его относительно оси вращения J. Найти, через какой промежуток времени остановится маховик, вращающийся с угловой скоростью ω_0.

Ответ: $T = \frac{2J}{kD}\ln\left(1+\frac{kD\omega_0}{2M_2}\right)$.

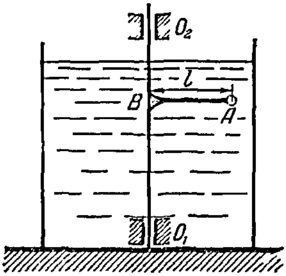
37.7(37.8). Твердое тело, находившееся в покое, приводится во вращение вокруг неподвижной вертикальной оси постоянным моментом, равным M; при этом возникает момент сил сопротивления M_1, пропорциональный квадрату угловой скорости вращения твердого тела: $M_1 = \alpha\omega^2$. Найти закон изменения угловой скорости; момент инерции твердого тела относительно оси вращения равен J.

Ответ: $\omega = \sqrt{\frac{M}{\alpha}}\,\frac{e^{\beta t}-1}{e^{\beta t}+1}$, где $\beta = \frac{2}{J}\sqrt{\alpha M}$.

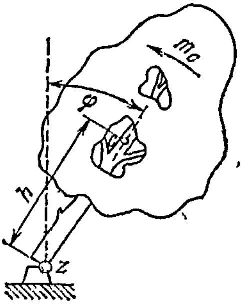
37.8(37.9). Решить предыдущую задачу в предположении, что момент сил сопротивления M_1 пропорционален угловой скорости вращения твердого тела: $M_1 = \alpha\omega$.

Ответ: $\omega = \frac{M}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha t/J}\right)$.

37.9(37.10). Шарик A, находящийся в сосуде с жидкостью и прикрепленный к концу стержня AB длины l, приводится во вращение вокруг вертикальной оси O_1O_2 с начальной угловой скоростью ω_0. Сила сопротивления жидкости пропорциональна угловой скорости вращения: $R = \alpha m\omega$, где m — масса шарика, α — коэффициент пропорциональности. Определить, через какой промежуток времени угловая скорость вращения станет в два раза меньше начальной, а также число оборотов n, которое сделает стержень с шариком за этот промежуток времени. Массу шарика считать сосредоточенной в его центре, массой стержня пренебречь.



К задаче 37.9



К задаче 37.10

Ответ. $T = \frac{l}{\alpha}\ln 2, \quad n = \frac{l\omega_0}{4\pi\alpha}$.

37.10(37.11). Определить, с какой угловой скоростью ω упадет на землю спиленное дерево массы M, если его центр масс C расположен на расстоянии h от основания, а силы сопротивления воздуха создают момент сопротивления m_c, причем $m_{cz} = -\alpha\dot{\varphi}^2$, где $\alpha = \mathrm{const}$. Момент инерции дерева относительно оси z, совпадающей с осью, вокруг которой поворачивается дерево при падении, равен J.

Ответ: $\omega = \sqrt{\frac{2MghJ}{J^2 + 4\alpha^2}\left(e^{-\frac{\alpha\pi}{J}} + 2\frac{\alpha}{J}\right)}$.

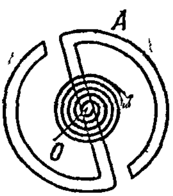
37.11(37.12). Вал радиуса r приводится во вращательное движение вокруг горизонтальной оси гирей, подвешенной посредством троса. Для того чтобы угловая скорость вала через некоторое время после начала движения имела величину, близкую к постоянной, с валом соединены n одинаковых пластин, сопротивление воздуха, испытываемое пластиной, приводится к силе, нормальной к пластине, приложенной на расстоянии R от оси вала и пропорциональной квадрату ее угловой скорости, причем коэффициент пропорциональности равен k. Масса гири m, момент инерции всех вращающихся частей относительно оси вращения равен J; массой троса и трением в опорах пренебречь.

Определить угловую скорость ω вала, предполагая, что в начальный момент она равна нулю.

Ответ: $\omega = \sqrt{\frac{mgr}{knR}}\,\frac{e^{\alpha t}-1}{e^{\alpha t}+1}$, где $\alpha = \frac{2}{J+mr^2}\sqrt{mgnkrR}$; при достаточно большом значении t угловая скорость ω близка к постоянной величине $\sqrt{\frac{mgr}{knR}}$.

37.12(37.15). Упругую проволоку, на которой подвешен однородный шар с радиусом r и массой m, закручивают на угол φ_0, а затем предоставляют ей свободно раскручиваться. Момент, необходимый для закручивания проволоки на один радиан, равен c. Определить движение, пренебрегая сопротивлением воздуха и считая момент силы упругости закрученной проволоки пропорциональным углу кручения φ.

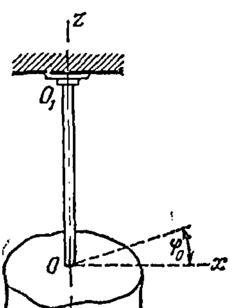
Ответ: $\varphi = \varphi_0 \cos\sqrt{\frac{5c}{2mr^2}}\,t$.



К задаче 37.13

37.13(37.16). Часовой балансир A может вращаться вокруг оси, перпендикулярной его плоскости и проходящей через центр тяжести O, имея относительно этой оси момент инерции J. Балансир приводится в движение спиральной пружиной, один конец которой с ним скреплен, а другой присоединен к неподвижному корпусу часов. При повороте балансира возникает момент сил упругости пружины, пропорциональный углу поворота. Момент, необходимый для закручивания пружины на один радиан, равен c. Определить закон движения балансира, если в начальный момент в условиях отсутствия сил упругости балансиру сообщили начальную угловую скорость ω_0.

Ответ: $\varphi = \omega_0\sqrt{\frac{J}{c}}\sin\sqrt{\frac{c}{J}}\,t$.



К задаче 37.14

37.14(37.17). Для определения момента инерции J_z тела A относительно вертикальной оси Oz его прикрепили к упругому вертикальному стержню OO_1, закрутили этот стержень, повернув тело A вокруг оси Oz на малый угол φ_0, и отпустили; период возникших колебаний оказался равным T_1, момент сил упругости относительно оси Oz равен $m_z = -c\varphi$. Для определения коэффициента c проделали второй опыт: на стержень в точке O был надет однородный круглый диск радиуса r массы M, и тогда период колебаний оказался равным T_2. Определить момент инерции тела J_z.

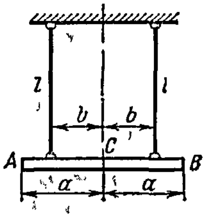
Ответ: $J_z = \frac{Mr^2}{2}\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2$.

37.15(37.18). Решить предыдущую задачу в предположении, что для определения коэффициента c второй опыт проделывают иначе: однородный круглый диск массы M и радиуса r прикрепляется к телу, момент инерции которого требуется определить Найти момент инерции тела J_z, если период колебаний тела τ_1, а период колебаний тела с прикрепленным к нему диском τ_2.

Ответ: $J_z = \dfrac{Mr^2}{2}\dfrac{\tau_1^2}{\tau_2^2 - \tau_1^2}$

37.16(37.19). Бифилярный подвес состоит из однородного стержня AB длины $2a$, подвешенного горизонтально посредством двух вертикальных нитей длины l, отстоящих друг от друга на расстоянии $2b$. Определить период крутильных колебаний стержня, полагая, что стержень в течение всего времени движения остается в горизонтальном положении и натяжение каждой из нитей равно половине веса стержня

Указание При определении горизонтальной составляющей натяжения каждой из нитей считая колебания бифиляра малыми, заменить синус угла между направлением нити и вертикалью самим углом



К задаче 37.16

Ответ: $T = \dfrac{2\pi a}{b}\sqrt{\dfrac{l}{3g}}$

37.17(37.20). Диск, подвешенный к упругой проволоке, совершает крутильные колебания в жидкости. Момент инерции диска относительно оси проволоки равен J. Момент, необходимый для закручивания проволоки на один радиан, равен c Момент сопротивления движению равен $\alpha S\omega$, где α — коэффициент вязкости жидкости, S — сумма площадей верхнего и нижнего оснований диска, ω — угловая скорость диска Определить период колебаний диска в жидкости

Ответ: $T = \dfrac{4\pi J}{\sqrt{4cJ - \alpha^2 S^2}}$.

37.18(37.22). Твердое тело, подвешенное на упругой проволоке, совершает крутильные колебания под действием внешнего момента $m_в$, причем $m_{вz} = m_1 \sin \omega t + m_3 \sin 3\omega t$, где m_1, m_3 и ω — постоянные, а z — ось, направленная вдоль проволоки. Момент сил упругости проволоки равен $m_{упр}$, причем $m_{упр\,z} = -c\varphi$, где c — коэффициент упругости, а φ — угол закручивания. Определить закон вынужденных крутильных колебаний твердого тела, если его момент инерции относительно оси z равен J_z Силами сопротивления движению пренебречь Считать, что $\sqrt{c/J_z} \neq \omega$ и $\sqrt{c/J_z} \neq 3\omega$,

Ответ: $\varphi = \dfrac{h_1}{k^2 - \omega^2}\sin \omega t + \dfrac{h_3}{k^2 - 9\omega^2}\sin 3\omega t$, где $k^2 = c/J_z$; $h_1 = m_1/J_z$, $h_3 = m_3/J_z$.

37.19(37.23). Решить предыдущую задачу с учетом момента сил сопротивления m_c, пропорционального угловой скорости твердого тела, причем $m_{cz} = -\beta\dot{\varphi}$, где β — постоянный коэффициент.

Ответ: $\varphi = A_1 \sin(\omega t - \varepsilon_1) + A_3 \sin(3\omega t - \varepsilon_3)$, где

$$A_1 = \frac{h_1}{\sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}}, \qquad A_3 = \frac{h_3}{\sqrt{(k^2 - 9\omega^2)^2 + 36n^2\omega^2}},$$

$$\varepsilon_1 = \operatorname{arctg}\frac{2n\omega}{k^2 - \omega^2}, \qquad \varepsilon_3 = \operatorname{arctg}\frac{6n\omega}{k^2 - 9\omega^2}, \qquad n = \frac{\beta}{2J_z}.$$

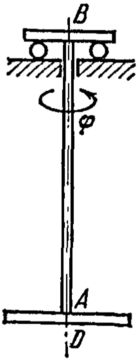
37.20. Диск D, радиус которого равен R, а масса — M, подвешен на упругом стержне AB, имеющем жесткость на кручение c. Конец стержня B вращается по закону $\varphi_B = \omega_0 t + \Phi \sin pt$, где ω_0, Φ, p — постоянные величины. Пренебрегая силами сопротивления, определить движение диска D: 1) при отсутствии резонанса, 2) при резонансе. В начальный момент диск был неподвижен, а стержень — недеформирован.

Ответ: 1) $\varphi_A(t) = \omega_0 t -$

$$- \frac{\omega_0}{k}\sin kt + \frac{h}{k^2 - p^2}\left(\sin pt - \frac{p}{k}\sin kt\right),$$

где $k = \sqrt{\frac{2c}{MR^2}}$, $h = \frac{2c\Phi}{MR^2}$;

2) $\varphi_A(t) = \omega_0 t - \frac{\omega_0}{k}\sin kt + \frac{h}{2k}\left(\frac{1}{k}\sin kt - t\cos kt\right)$.



К задаче 37.20

37.21. Твердое тело, подвешенное к упругой проволоке, совершает крутильные колебания в жидкости. Момент инерции тела относительно оси проволоки z равен J_z. Момент сил упругости проволоки $m_{\text{упр}\,z} = -c\varphi$, где c — коэффициент упругости, а φ — угол закручивания; момент сопротивления движению $m_{cz} = -\beta\dot{\varphi}$, где $\dot{\varphi}$ — угловая скорость твердого тела, а $\beta > 0$. В начальный момент твердое тело было закручено на угол φ_0 и отпущено без начальной скорости. Найти уравнение движения твердого тела, если $\frac{\beta}{2J_z} < \sqrt{\frac{c}{J_z}}$.

Ответ: Затухающие крутильные колебания по закону

$$\varphi = \varphi_0 e^{-nt}\left(\cos\sqrt{k^2 - n^2}\,t + \frac{n}{\sqrt{k^2 - n^2}}\sin\sqrt{k^2 - n^2}\,t\right),$$

где $k^2 = c/J_z$, $n = \beta/(2J_z)$

37.22. Однородный круглый диск массы M и радиуса R, подвешенный к упругой проволоке, может совершать крутильные колебания в жидкости. Момент сил упругости проволоки $m_{\text{упр}\,z} = -c\varphi$, где ось z проведена вдоль проволоки, c — коэффициент упругости, а φ — угол закручивания; момент сопротивления движению $m_{c\,z} = -\beta\dot{\varphi}$, где $\dot{\varphi}$ — угловая скорость диска, а $\beta > 0$. В начальный момент диск был закручен на угол φ_0 и отпущен без начальной скорости. Найти уравнение движения диска, если:

1) $\frac{\beta}{MR^2} = \sqrt{\frac{2c}{MR^2}}$, 2) $\frac{\beta}{MR^2} > \sqrt{\frac{2c}{MR^2}}$.

Ответ: Апериодическое движение по закону

1) $\frac{\beta}{MR^2} = \sqrt{\frac{2c}{MR^2}}$, $\varphi = \varphi_0 e^{-nt}(1+nt)$, где $n = \frac{\beta}{MR^2}$,

2) $\frac{\beta}{MR^2} > \sqrt{\frac{2c}{MR^2}}$, $\varphi = \frac{\varphi_0}{2\sqrt{n^2-k^2}} e^{-nt}\left[\left(\sqrt{n^2-k^2}-n\right)\times\right.$

$$\left.\times e^{-\sqrt{n^2-k^2}\,t} + \left(\sqrt{n^2-k^2}+n\right)e^{\sqrt{n^2-k^2}\,t}\right],$$

где $k^2 = 2c/(MR^2)$, $n = \beta/(MR^2)$.

37.23. Твердое тело, подвешенное на упругой проволоке, совершает крутильные колебания под действием внешнего момента $m_{\text{в}\,z} = m_0 \cos pt$, где m_0 и p — положительные постоянные, а z — ось, направленная вдоль проволоки. Момент сил упругости проволоки $m_{\text{упр}\,z} = -c\varphi$, где c — коэффициент упругости, а φ — угол закручивания. Момент инерции твердого тела относительно оси z равен J_z. Силами сопротивления движению пренебречь. Определить уравнение движения твердого тела в случаях: 1) $\sqrt{c/J_z} \neq p$, 2) $\sqrt{c/J_z} = p$, если в начальный момент при ненапряженной проволоке твердому телу была сообщена угловая скорость ω_0.

Ответ: 1) $\sqrt{\frac{c}{J_z}} \neq p$, $\varphi = \frac{\omega_0}{k}\sin kt + \frac{h}{k^2-p^2}(\cos pt - \cos kt)$, где $k = \sqrt{c/J_z}$, $h = m_0/J_z$;

2) $\sqrt{\frac{c}{J_z}} = p$, $\varphi = \frac{\omega_0}{k}\sin kt + \frac{h}{2k}t\sin kt$, где $k = \sqrt{\frac{c}{J_z}} = p$, $h = m_0/J_z$.

37.24. Однородный круглый диск массы M и радиуса R, подвешенный на упругой проволоке, совершает резонансные крутильные колебания в жидкости под действием внешнего момента $m_{\text{в}\,z} = m_0 \sin pt$, где m_0 и p — положительные постоянные, а z — ось, направленная вдоль проволоки, момент сил упругости проволоки $m_{\text{упр}\,z} = -c\varphi$, где c — коэффициент упругости, а φ — угол закручивания; момент сопротивления движению $m_{cz} = -\beta\dot{\varphi}$, где $\dot{\varphi}$ — угловая скорость диска, а $\beta > 0$. Найти уравнение вынужденных резонансных колебаний диска.

Ответ: При $p = \sqrt{\frac{2C}{MR^2}}$ $\varphi = -\frac{h}{2np}\cos pt$, где $h = \frac{2m_0}{MR^2}$, $n = \frac{\beta}{MR^2}$.

37.25(37.24). Для определения коэффициента вязкости жидкости наблюдают колебания диска, подвешенного к упругой проволоке в жидкости. К диску приложен внешний момент, равный $M_0 \sin pt$ ($M_0 = \text{const}$), при котором наблюдается явление резонанса. Момент сопротивления движению диска в жидкости равен $\alpha S\omega$, где α — коэффициент вязкости жидкости, S — сумма площадей верхнего и нижнего оснований диска, ω — угловая скорость диска. Определить коэффициент α вязкости жидкости, если амплитуда вынужденных колебаний диска при резонансе равна φ_0.

Ответ $a = \frac{M_0}{4 S p}$.

37.26(37.26). При полете снаряда вращение его вокруг оси симметрии замедляется действием момента силы сопротивления воздуха, равного $k\omega$, где ω — угловая скорость вращения снаряда, k — постоянный коэффициент пропорциональности. Определить закон убывания угловой скорости, если начальная угловая скорость равна ω_0, а момент инерции снаряда относительно оси симметрии равен J.

Ответ: $\omega = \omega_0 e^{-\frac{k}{J} t}$.

37.27(37.27). Для определения ускорения силы тяжести пользуются оборотным маятником, который представляет собой стержень, снабженный двумя трехгранными ножами A и B. Один из ножей неподвижен, а второй может перемещаться вдоль стержня. Подвешивая стержень то на один, то на другой нож и меняя расстояние AB между ними, можно добиться равенства периодов качаний маятника вокруг каждого из ножей. Чему равно ускорение силы тяжести, если расстояние между ножами, при котором периоды качаний маятника равны, $AB = l$, а период качаний равен T?

К задаче 37.27

Ответ: $g = 4\pi^2 l/T^2$.

37.28(37.28). Два твердых тела могут качаться вокруг одной и той же горизонтальной оси как отдельно друг от друга, так и скрепленные вместе. Определить приведенную длину сложного маятника, если массы твердых тел M_1 и M_2, расстояния от их центров тяжести до общей оси вращения a_1 и a_2, а приведенные длины при отдельном качании каждого l_1 и l_2.

Ответ: $l_{\text{пр}} = \frac{M_1 a_1 l_1 + M_2 a_2 l_2}{M_1 a_1 + M_2 a_2}$.

37.29. Часть прибора представляет собой однородный стержень длины L, свободно подвешенный одним концом на горизонтальной оси O. Для регистрации качаний стержня к его нижнему концу приклеивается небольшое зеркало массы m. При этом, чтобы частота колебаний стержня не изменилась, на нем в другом месте укрепляется груз A. Рассматривая зеркало и груз как материальные точки, найти минимальную массу, которую должен иметь груз A. На каком расстоянии от оси O его следует прикрепить?

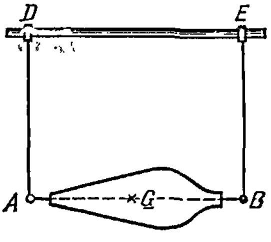
Ответ $m_A = 3m$, $OA = {}^1\!/_3 L$.

37.30(37.29). Для регулирования хода часов к маятнику массы M_1, приведенной длины l с расстоянием a от его центра тяжести до оси подвеса прикрепляют добавочный груз массы M_2 на расстоянии x от оси подвеса. Принимая добавочный груз за материальную точку, определить изменение Δl приведенной длины маятника при данных значениях M_2 и x и значение $x = x_1$, при котором заданное изменение Δl приведенной длины маятника достигается при помощи добавочного груза наименьшей массы.

Ответ. Приведенную длину маятника надо уменьшить на

$$\Delta l = \frac{M_2 x (x - l)}{M_1 a + M_2 x}, \qquad x_1 = \frac{1}{2}(l + \Delta l)$$

37.31(37.30). Для определения момента инерции J данного тела относительно некоторой оси AB, проходящей через центр масс G тела, его подвесили жестко скрепленными с ним стержнями AD и BE, свободно насаженными на неподвижную горизонтальную ось DE, так, что ось AB параллельна DE; приведя затем тело в колебательное движение, определили продолжительность T одного размаха. Как велик момент инерции J, если масса тела M и расстояние между осями AB и DE равно h? Массами стержней пренебречь



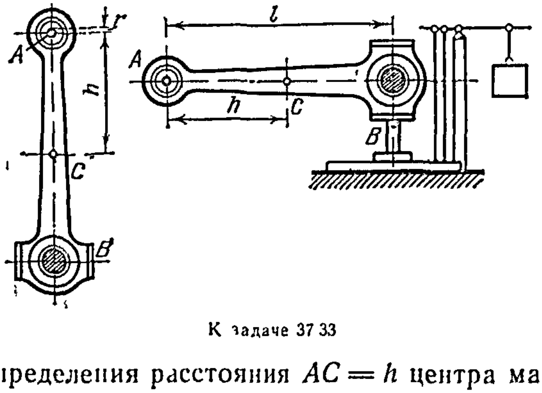
К задаче 37.31

Ответ. $J = hMg\left(\frac{T^2}{\pi^2} - \frac{h}{g}\right)$

37.32(37.31). Решить предыдущую задачу с учетом массы тонких однородных прямолинейных стержней AD и BE, если масса каждого из них равна M_1

Ответ: $J = h\left[\frac{(M + M_1) g T^2}{\pi^2} - \frac{3M + 2M_1}{3} h\right]$.

37.33(37.32). Для определения момента инерции шатуна его заставляют качаться вокруг горизонтальной оси, продев через втулку цапфы крейцкопфа тонкий цилиндрический стержень. Продолжительность ста размахов $100T = 100$ с, где T — половина периода.

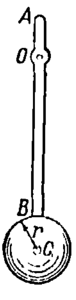


К задаче 37.33

Затем для определения расстояния $AC = h$ центра масс C от центра A отверстия шатун положили горизонтально, подвесив его в точке A к талям и оперев точкой B на платформу десятичных весов; давление на нее оказалось при этом равным P. Определить центральный момент инерции J шатуна относительно оси, перпендикулярной плоскости рисунка, имея следующие данные: масса шатуна M, расстояние между вертикалями, проведенными через точки A и B (см. правый рисунок) равно l, радиус цапфы крейцкопфа r.

Ответ: $J = \frac{Pl + Mgr}{g}\left(\frac{g}{\pi^2}T^2 - \frac{P}{Mg}l - r\right)$.

37.34(37.33). Маятник состоит из стержня AB с прикрепленным к нему шаром массы m и радиуса r, центр которого C находится на продолжении стержня Определить, пренебрегая массой стержня, в какой точке стержня нужно поместить ось подвеса для того, чтобы продолжительность одного размаха при малых качаниях имела данную величину T.



К задаче 37.34

Ответ: $OC = \frac{1}{2\pi^2}\left(gT^2 + \sqrt{g^2T^4 - 1{,}6\pi^4r^2}\right)$.

Так как должно быть $OC \geqslant r$, то решение возможно, если $T^2 \geqslant 1{,}4\frac{\pi^2}{g}r$ решение, соответствующее знаку минус перед радикалом, невозможно

37.35(37.34). На каком расстоянии от центра масс должен быть подвешен физический маятник, чтобы период его качаний был наименьшим?

Ответ. На расстоянии, равном радиусу инерции маятника относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости качаний.

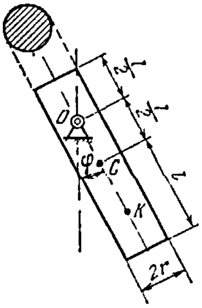
37.36(37.35). Маятник состоит из стержня с двумя закрепленными на нем грузами, расстояние между которыми равно l; верхний груз имеет массу m_1, нижний — массу m_2 Определить, на каком расстоянии x от нижнего груза нужно поместить ось подвеса для того, чтобы период малых качаний маятника был наименьшим, массой стержня пренебречь и грузы считать материальными точками.

Ответ: $x = l\sqrt{m_1}\,\frac{\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2}}{m_1 + m_2}$.

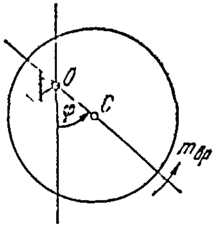
37.37(37.36). На каком расстоянии от оси подвеса должен быть присоединен к физическому маятнику добавочный груз, чтобы период качаний маятника не изменился?

Ответ. На расстоянии приведенной длины физического маятника.

37.38(37.37). Круглый цилиндр массы M, длины $2l$ и радиуса $r = l/6$ качается около оси O, перпендикулярной плоскости рисунка Как изменится период качании цилиндра, если прикрепить к нему на расстоянии $OK = {}^{85}/_{72}l$ точечную массу m?



К задаче 37.38



К задаче 37.39

Ответ: Период качаний не изменится, так как точечная масса добавлена в центре качании цилиндра

37.39(37.38). Найти уравнение малых колебаний однородного диска массы M и радиуса r, совершающего колебания вокруг горизонтальной оси Oz, перпендикулярной его плоскости и отстоящей от центра масс C диска на расстоянии $OC = r/2$. К диску приложен вращающий момент $m_{вр}$, причем $m_{вр\,z} = m_0 \sin pt$, где m_0 и p — постоянные В начальный момент диску, находившемуся в нижнем положении, была сообщена угловая скорость ω_0. Силами сопротивления пренебречь. Считая колебания малыми, принять $\sin\varphi \approx \varphi$.

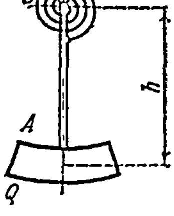
Ответ: 1) При $p \neq \sqrt{\frac{2g}{3r}}$ $\varphi = \frac{1}{k}\left(\omega_0 - \frac{hp}{k^2 - p^2}\right)\sin kt + \frac{h}{k^2 - p^2}\sin pt$, где $k = \sqrt{\frac{2g}{3r}}$, $h = \frac{4m_0}{3Mr^2}$;

2) при $p = \sqrt{\frac{2g}{3r}}$ $\varphi = \frac{1}{p}\left(\omega_0 + \frac{h}{2p}\right)\sin pt - \frac{h}{2p}t\cos pt$, где $h = \frac{4m_0}{3Mr^2}$.

37.40(37.39). В сейсмографах — приборах для регистрации землетрясений — применяется физический маятник, ось подвеса которого образует угол α с вертикалью Расстояние от оси подвеса до центра масс маятника равно a, момент инерции маятника относительно оси, проходящей через его центр масс параллельно оси подвеса, равен J_C, масса маятника равна M. Определить период колебаний маятника

Ответ. $T = 2\pi\sqrt{\frac{J_C + Ma^2}{Mag\sin\alpha}}$

37.41(37.40). В вибрографе для записи горизонтальных колебаний фундаментов машин маятник OA, состоящий из рычага с грузом на конце, может качаться вокруг своей горизонтальной оси O, удерживаясь в вертикальном положении устойчивого равновесия собственной массой и спиральной пружиной. Определить период собственных колебаний маятника при малых углах отклонения, если максимальный статический момент силы тяжести маятника относительно его оси вращения равен Mgh, момент инерции относительно той же оси равен J_z, коэффициент жесткости пружины, сопротивление которой пропорционально углу закручивания, равен c; при равновесном положении маятника пружина находится в ненапряженном состоянии. Сопротивлениями пренебречь



К задаче 37 41

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{\frac{J_z}{c + Mgh}}$.

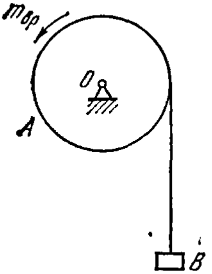
37.42(37.41). Виброграф (см. предыдущую задачу) закреплен на фундаменте, совершающем горизонтальные гармонические колебаний по закону $x = a\sin\omega t$. Определить амплитуду a колебаний фундамента, если амплитуда вынужденных колебаний маятника вибрографа оказалась равной φ_0.

Ответ: $a = \dfrac{\varphi_0 (c + Mgh - J_z\omega^2)}{Mh\omega^2}$.

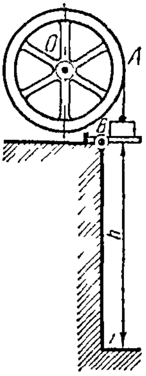
37.43(37.42). При пуске в ход электрической лебедки к барабану A приложен вращающий момент $m_{\text{вр}}$, пропорциональный времени, причем $m_{\text{вр}} = at$, где a — постоянная. Груз B массы M_1 поднимается посредством каната, навитого на барабан A радиуса r и массы M_2. Определить угловую скорость барабана, считая его сплошным цилиндром. В начальный момент лебедка находилась в покое.

Ответ: $\omega = \dfrac{(at - 2M_1gr)\,t}{r^2\,(2M_1 + M_2)}$.

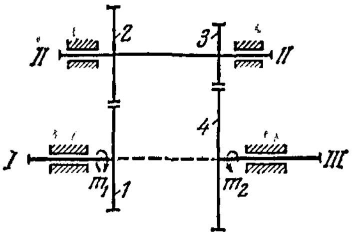
37.44(37.43). Для определения момента инерции J махового колеса A радиуса R относительно оси, проходящей через центр масс, колесо обмотали тонкой проволокой, к которой привязали гирю B массы M_1 и наблюдали продолжительность T_1 опускания гири с высоты h. Для исключения трения в подшипниках проделали второй опыт с гирей массы M_2, причем продолжительность опускания оказалась равной T_2 при прежней высоте. Считая момент силы трения постоянным и не зависящим от массы гири, вычислить момент инерции J.



К задаче 37.43



К задаче 37.44



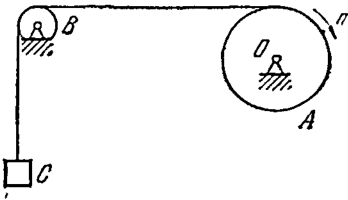
К задаче 37.45

Ответ: $J = R^2 \dfrac{\dfrac{g}{2h}(M_1 - M_2) - \left(\dfrac{M_1}{T_1^2} - \dfrac{M_2}{T_2^2}\right)}{\dfrac{1}{T_1^2} - \dfrac{1}{T_2^2}}$.

37.45(37.44). К валу I присоединен электрический мотор, вращающий момент которого равен m_1. Посредством редуктора скоростей, состоящего из четырех зубчатых колес 1, 2, 3 и 4, этот вращающий момент передается на шпиндель III токарного станка, к которому приложен момент сопротивления m_2 (этот момент возникает при снятии резцом стружки с обтачиваемого изделия). Определить угловое ускорение шпинделя III, если моменты инерции всех вращающихся деталей, насаженных на валы *I*, *II* и *III*, соответственно равны J_{I}, J_{II}, J_{III} Радиусы колес равны r_1, r_2, r_3 и r_4.

Ответ: $\varepsilon_{III}=\dfrac{m_1 k_{1,2}\cdot k_{3,4}-m_2}{\left(J_I k_{1,2}^2+J_{II}\right)k_{3,4}^2+J_{III}}$, где $k_{1,2}=\dfrac{r_2}{r_1}$, $k_{3,4}=\dfrac{r_4}{r_3}$

37.46(37.45). Барабан *A* массы M_1 и радиуса r приводится во вращение посредством груза *C* массы M_2, привязанного к концу нерастяжимого троса Трос переброшен через блок *B* и намотан на барабан *A*. К барабану *A* приложен момент сопротивления m_c, пропорциональный угловой скорости барабана, коэффициент пропорциональности равен α Определить угловую скорость барабана, если в начальный момент система находилась в покое Массами каната и блока *B* пренебречь Барабан считать сплошным однородным цилиндром



К задаче 37.46

Ответ: $\omega=\dfrac{M_2 g r}{\alpha}\left(1-e^{-\beta t}\right)$, где $\beta=\dfrac{2\alpha}{r^2\left(M_1+2M_2\right)}$; $\lim\limits_{t\to\infty}\omega=$ $=\dfrac{M_2 g r}{\alpha}=\text{const}$

37.47(37.46). Определить угловое ускорение ведущего колеса автомашины массы *M* и радиуса *r*, если к колесу приложен вращающий момент $m_{вр}$. Момент инерции колеса относительно оси, проходящей через центр масс *C* перпендикулярно плоскости материальной симметрии, равен J_C; $f_к$ — коэффициент трения качения, $F_{тр}$ — сила трения Найти также значение вращающего момента, при котором колесо катится с постоянной угловой скоростью.

Ответ: $\varepsilon=\dfrac{m_{вр}-Mgf_к-F_{тр}r}{J_C}$, $m_{вр}=Mgf_к+F_{тр}r$

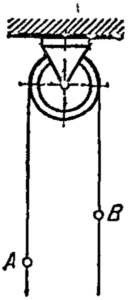
37.48(37.47). Определить угловую скорость ведомого автомобильного колеса массы *M* и радиуса *r*. Колесо, катящееся со скольжением по горизонтальному шоссе, приводится в движение посредством горизонтально направленной силы, приложенной в его центре масс *C* Момент инерции колеса относительно оси *C*, перпендикулярной плоскости материальной симметрии, равен J_C; $f_к$ — коэффициент трения качения, f — коэффициент трения при качении со скольжением. В начальный момент колесо находилось в покое

Ответ: $\omega=\dfrac{Mg}{J_C}\left(fr-f_к\right)t$.

37.49(37.48). Изменится ли угловая скорость колеса, рассмотренного в предыдущей задаче, если модуль силы, приложенной в его центре масс *C*, увеличится в два раза?

Ответ Не изменится.

37.50(37.49). Через блок, массой которого пренебрегаем, перекинут канат; за точку A каната ухватился человек, к точке B подвязан груз одинаковой массы с человеком. Что произойдет с грузом, если человек станет подниматься по канату со скоростью v относительно каната?



К задаче 37.50

Ответ. Груз будет подниматься с канатом со скоростью $v/2$.

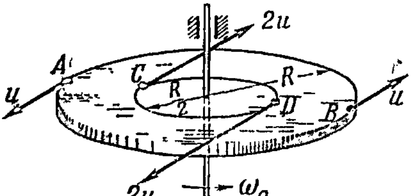
37.51(37.50). Решить предыдущую задачу, принимая во внимание массу блока, которая в четыре раза меньше массы человека. Считать, что масса блока равномерно распределена по его ободу.

Ответ. Груз будет подниматься со скоростью $\frac{4}{9}\,v$.

37.52(37.51). Круглая горизонтальная платформа может вращаться без трения вокруг неподвижной оси Oz, проходящей через ее центр O, по платформе на неизменном расстоянии от оси Oz, равном r, идет с постоянной относительной скоростью u человек, масса которого равна M_1. С какой угловой скоростью ω будет при этом вращаться платформа вокруг оси, если массу ее M_2 можно считать равномерно распределенной по площади круга радиуса R, а в начальный момент платформа и человек имели скорость, равную нулю?

Ответ: $\omega = \dfrac{2M_1 r}{M_2R^2 + 2M_1r^2}\,u$.

37.53(37.52). Круглая горизонтальная платформа вращается без трения вокруг вертикальной оси, проходящей через ее центр масс с постоянной угловой скоростью ω_0, при этом на платформе стоят четыре человека одинаковой массы: два — на краю платформы, а два — на расстояниях от оси вращения, равных половине радиуса платформы. Как изменится угловая скорость платформы, если люди, стоящие на краю, будут двигаться по окружности в сторону вращения с относительной линейной скоростью u, а люди, стоящие на расстоянии половины радиуса от оси вращения, будут двигаться по окружности в противоположную сторону с относительной линейной скоростью $2u$? Людей считать точечными массами, а платформу — круглым однородным диском.



К задаче 37.53

Ответ: Платформа будет вращаться с той же угловой скоростью.

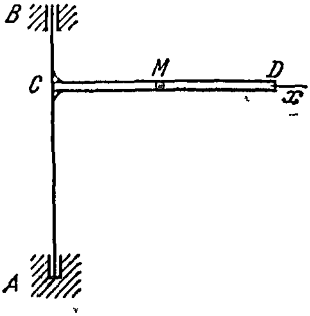
37.54(37.53). Решить предыдущую задачу в предположении, что все люди двигаются в сторону вращения платформы. Радиус платформы R, ее масса в четыре раза больше массы каждого из людей и равномерно распределена по всей ее площади. Выяснить также, чему должна быть равна относительная линейная скорость u для того, чтобы платформа перестала вращаться

Ответ: $\omega_1 = \omega_0 - \frac{8}{9}\frac{u}{R}$, $u = \frac{9}{8}R\omega_0$.

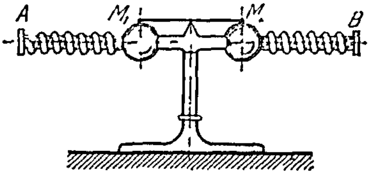
37.55(37.54). Человеку, стоящему на скамейке Жуковского, в то время, когда он протянул руки в стороны, сообщают начальную угловую скорость, соответствующую 15 об/мин; при этом момент инерции человека и скамейки относительно оси вращения равен 0,8 кг·м². С какой угловой скоростью начнет вращаться скамейка с человеком, если, приблизив руки к туловищу, он уменьшит момент инерции системы до 0,12 кг·м²?

Ответ 100 об/мин

37.56(37.56). Горизонтальная трубка CD может свободно вращаться вокруг вертикальной оси AB. Внутри трубки на расстоянии $MC = a$ от оси находится шарик M В некоторый момент времени трубке сообщается начальная угловая скорость ω_0 Определить угловую скорость ω трубки в момент, когда шарик вылетит из трубки.



К задаче 37 56



К задаче 37 57

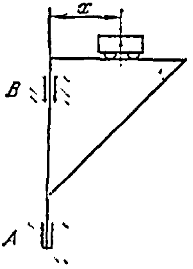
Момент инерции трубки относительно оси вращения равен J, L — ее длина; трением пренебречь, шарик считать материальной точкой массы m

Ответ: $\omega = \frac{J + ma^2}{J + mL^2}\omega_0$.

37.57(37.57). Однородный стержень AB длины $2L = 180$ см и массы $M_1 = 2$ кг подвешен в устойчивом положении равновесия на острие так, что ось его горизонтальна Вдоль стержня могут перемещаться два шара массы $M_2 = 5$ кг каждый, прикрепленные к концам двух одинаковых пружин Стержню сообщается вращательное движение вокруг вертикальной оси с угловой скоростью, соответствующей $n_1 = 64$ об/мин, причем шары расположены симметрично относительно оси вращения и центры их с помощью нити удерживаются на расстоянии $2l_1 = 72$ см друг от друга. Затем нить пережигается, и шары, совершив некоторое число колебаний, устанавливаются под действием пружин и сил трения в положение равновесия на расстоянии $2l_2 = 108$ см друг от друга. Рассматривая шары как материальные точки и пренебрегая массами пружин, определить новое число n_2 оборотов стержня в минуту.

Ответ: $n_2 = \dfrac{6M_2 l_1^2 + M_1 l^2}{6M_2 l_2^2 + M_1 L^2} n_1 = 34$ об/мин.

37.58(37.58). Тележка поворотного подъемного крана движется с постоянной скоростью v относительно стрелы. Мотор, вращающий кран, создает в период разгона постоянный момент, равный m_0. Определить угловую скорость ω вращения крана в зависимости от расстояния x тележки до оси вращения AB, если масса тележки с грузом равна M, J — момент инерции крана (без тележки) относительно оси вращения; вращение начинается в момент, когда тележка находится на расстоянии x_0 от оси AB.



К задаче 37.58

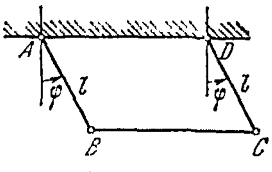
Ответ: $\omega = \dfrac{m_0}{J + Mx^2}\dfrac{x - x_0}{v}$.

37.59(37.59). Сохранив условие предыдущей задачи, определить угловую скорость ω вращения крана, если мотор создает вращающий момент, равный $m_0 - \alpha\omega$, где m_0 и α — положительные постоянные.

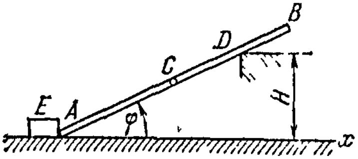
Ответ: $\omega = \dfrac{m_0}{v(J + Mx^2)} e^{-\mu \operatorname{arctg}\frac{x}{k}} \displaystyle\int_{x_0}^{x} e^{\mu \operatorname{arctg}\frac{x}{k}} dx$, где $k = \sqrt{\dfrac{J}{M}}$, $\mu = \dfrac{\alpha}{v_x}\sqrt{\dfrac{1}{JM}}$ (ось x направлена вправо вдоль стрелы).

§ 38. Теорема об изменении кинетической энергии материальной системы

38.1(38.1). Вычислить кинетическую энергию плоского механизма, состоящего из трех стержней AB, BC и CD, прикрепленных цилиндрическими шарнирами A и D к потолку и соединенных между собой шарнирами B и C. Масса каждого из стержней AB и CD длины l равна M_1, масса стержня BC равна M_2, причем $BC = AD$. Стержни AB и DC вращаются с угловой скоростью ω.



К задаче 38.1



К задаче 38.2

Ответ: $T = \dfrac{2M_1 + 3M_2}{6} l^2\omega^2$.

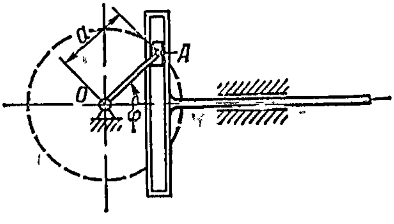
38.2(38.2). Однородный тонкий стержень AB массы M опирается на угол D и концом A скользит по горизонтальной направляющей. Упор E перемещается вправо с постоянной скоростью v. Определить кинетическую энергию стержня в зависимости от угла φ, если длина стержня равна $2l$, а превышение угла D над горизонтальной направляющей равно H.

Ответ: $T=\frac{Mv^2}{2}\left(1-2\frac{l}{H}\sin^3\varphi+\frac{4}{3}\frac{l^2}{H^2}\sin^4\varphi\right)$.

38.3(38.3). Вычислить кинетическую энергию кулисного механизма, если момент инерции кривошипа OA относительно оси вращения, перпендикулярной плоскости рисунка, равен J_0; длина кривошипа равна a, масса кулисы равна m, массой камня A пренебречь. Кривошип OA вращается с угловой скоростью ω. При каких положениях механизма кинетическая энергия достигает наибольшего и наименьшего значений?

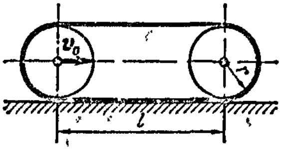
Ответ: $T=\frac{1}{2}(J_0+ma^2\sin^2\varphi)\,\omega^2$.

Наименьшая кинетическая энергия — при крайних положениях кулисы, наибольшая — при прохождении кулисой среднего положения.

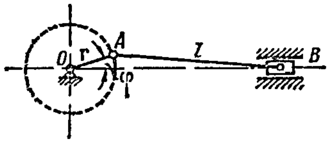


К задаче 38.3

38.4(38.4). Вычислить кинетическую энергию гусеницы трактора, движущегося со скоростью v_0. Расстояние между осями колес равно l, радиусы колес равны r, масса одного погонного метра гусеничной цепи равна γ.



К задаче 38.4



К задаче 38.5

Ответ: $T=2\gamma(l+\pi r)\,v_0^2$.

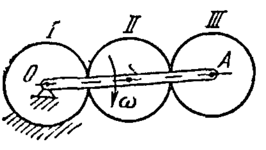
38.5(38.5). Вычислить кинетическую энергию кривошипно-ползунного механизма, если масса кривошипа m_1, длина кривошипа r, масса ползуна m_2, длина шатуна l. Массой шатуна пренебречь. Кривошип считать однородным стержнем. Угловая скорость вращения кривошипа ω.

Ответ: $T=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{3}m_1+m_2\left[\sin\varphi+\frac{r}{2l}\frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{1-\left(\frac{r}{l}\right)^2\sin^2\varphi}}\right]^2\right\}r^2\omega^2$.

38.6(38.6). Решить предыдущую задачу для положения, когда кривошип OA перпендикулярен направляющей ползуна, учесть массу шатуна m_3.

Ответ: $T=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}m_1+m_2+m_3\right)r^2\omega^2$.

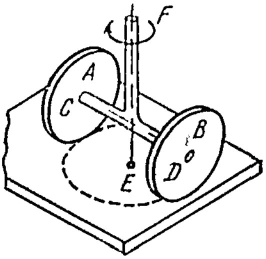
38.7(38.7). Планетарный механизм, расположенный в горизонтальной плоскости, приводится в движение кривошипом OA, соединяющим оси трех одинаковых колес I, II и III. Колесо I неподвижно, кривошип вращается с угловой скоростью ω. Масса каждого из колес равна M_1, радиус каждого из колес равен r, масса кривошипа равна M_2. Вычислить кинетическую энергию механизма, считая колеса однородными дисками, а кривошип — однородным стержнем. Чему равна работа пары сил, приложенной к колесу III?



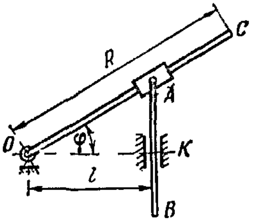
К задаче 38.7

Ответ. $T = \frac{r^2\omega}{3}(33M_1 + 8M_2)$, работа равна нулю.

38.8(38.8). Мельничные бегуны A и B насажены на горизонтальную ось CD, которая вращается вокруг вертикальной оси EF; масса каждого бегуна 200 кг, диаметры бегунов одинаковы, каждый равен 1 м, расстояние между ними CD равно 1 м. Найти кинетическую энергию бегунов, когда ось CD совершает 20 об/мин, допуская, что при вычислении моментов инерции бегуны можно рассматривать как однородные тонкие диски. Качение бегунов по опорной плоскости происходит без скольжения.



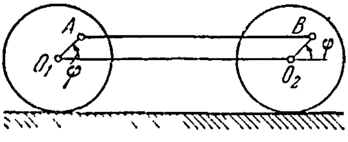
К задаче 38.8



К задаче 38.9

Ответ. 383 Н·м.

38.9(38.9). В кулисном механизме при качании рычага OC вокруг оси O, перпендикулярной плоскости рисунка, ползун A, перемещаясь вдоль рычага OC, приводит в движение стержень AB, движущийся в вертикальных направляющих K. Рычаг OC длины R считать однородным стержнем с массою m_1, масса ползуна равна m_2, масса стержня AB равна m_3, $OK = l$. Выразить кинетическую энергию механизма в функции от угловой скорости и угла поворота рычага OC. Ползун считать точечной массой.



К задаче 38.10

Ответ. $T = \frac{\omega^2}{6\cos^4\varphi}[m_1R^2\cos^4\varphi + 3l^2(m_2 + m_3)]$.

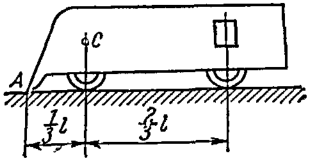
38.10(38.10). Вычислить кинетическую энергию системы, состоящей из двух колес, соединенных паровозным спарником AB и стержнем O_1O_2, если оси колес движутся со скоростью v_0. Масса каждого колеса равна M_1. Спарник AB и соединительный стержень O_1O_2 имеют одинаковую массу M_2. Масса колес равномерно распределена по их ободам; $O_1A = O_2B = r/2$, где r — радиус колеса. Колеса катятся без скольжения по прямолинейному рельсу.

Ответ: $T = \frac{v_0^2}{8}\left[16M_1 + M_2(9 + 4\sin\varphi)\right]$.

38.11(38.11). Автомобиль массы M движется прямолинейно по горизонтальной дороге со скоростью v. Коэффициент трения качения между колесами автомобиля и дорогой равен $f_к$, радиус колес r, сила аэродинамического сопротивления R_c воздуха пропорциональна квадрату скорости: $R_c = \mu M g v^2$, где μ — коэффициент, зависящий от формы автомобиля. Определить мощность N двигателя, передаваемую на оси ведущих колес, в установившемся режиме.

Ответ: $N = Mg\left(\frac{f_к}{r} + \mu v^2\right) v$.

38.12. Машина массы M для шлифовки льда движется равномерно и прямолинейно со скоростью v по горизонтальной плоскости катка. Положение центра масс C указано на рисунке. Вычислить мощность N двигателя, передаваемую на оси колес радиуса r, если $f_к$ — коэффициент трения качения между колесами автомашины и льдом, а f — коэффициент трения скольжения между шлифующей кромкой A и льдом. Колеса катятся без скольжения.



К задаче 38.12

Ответ. $N = \frac{Mg}{3}\left(2f + \frac{f_к}{r}\right) v$.

38.13(38.12). На вал диаметра 60 мм насажен маховик диаметра 50 см, делающий 180 об/мин. Определить коэффициент трения скольжения f между валом и подшипниками, если после выключения привода маховик сделал 90 оборотов до остановки. Массу маховика считать равномерно распределенной по его ободу. Массой вала пренебречь.

Ответ. $f = 0{,}07$.

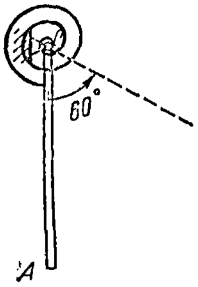
38.14(38.13). Цилиндрический вал диаметра 10 см и массы 0,5 т, на который насажено маховое колесо диаметра 2 м и массы 3 т, вращается в данный момент с угловой скоростью 60 об/мин, а затем он предоставлен самому себе. Сколько оборотов еще сделает вал до остановки, если коэффициент трения в подшипниках равен 0,05? Массу маховика считать равномерно распределенной по его ободу.

Ответ: 109,8 об.

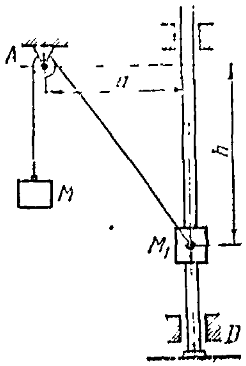
38.15(38.14). Однородный стержень OA длины l и массы M может вращаться вокруг горизонтальной неподвижной оси O, проходящей через его конец перпендикулярно плоскости рисунка. Спиральная пружина, коэффициент упругости которой равен c, одним концом скреплена с неподвижной осью O, а другим — со стержнем. Стержень находится в покое в вертикальном положении, причем пружина при этом не деформирована. Какую скорость надо сообщить концу A стержня для того, чтобы он отклонился от вертикали на угол, равный 60°?

Ответ: $v = \sqrt{\dfrac{(9Mgl + 2\pi^2 c)}{6M}}$.

38.16(38.16). К концам гибкой нерастяжимой нити, переброшенной через ничтожно малый блок A, подвешены два груза. Груз массы M_1 может скользить вдоль гладкого вертикального стержня CD, отстоящего от оси блока на расстоянии a; центр тяжести этого груза в начальный момент находился на одном уровне с осью блока; под действием силы тяжести этот груз начинает опускаться без начальной скорости. Найти зависимость между скоростью первого груза и высотой его опускания h. Масса второго груза равна M.



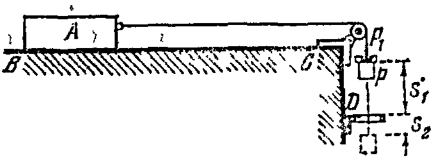
К задаче 38.15



К задаче 38.16

Ответ. $v^2 = 2g(a^2 + h^2)\dfrac{M_1 h - M\left(\sqrt{a^2 + h^2} - a\right)}{M_1(a^2 + h^2) + Mh^2}$.

38.17(38.17). Груз P массы M с наложенным на него дополнительным грузом массы M_1 посредством шнура, перекинутого через блок, приводит в движение из состояния покоя тело A массы M_2, находящееся на негладкой горизонтальной плоскости BC. Опустившись на расстояние s_1, груз M проходит через кольцо D, которое снимает дополнительный груз M_1, после чего груз M, опустившись на расстояние s_2, приходит в состояние покоя. Определить коэффициент трения f между телом A и плоскостью, пренебрегая массой шнура и блока и трением в блоке, дано $M_2 = 0,8$ кг, $M = M_1 = 0,1$ кг, $s_1 = 50$ см, $s_2 = 30$ см.



К задаче 38.17

Ответ: $f = \dfrac{s_1(M_1 + M)(M + M_2) + s_2 M(M + M_1 + M_2)}{M_2[s_1(M + M_2) + s_2(M + M_1 + M_2)]} = 0,2$.

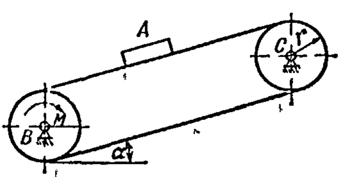
38.18(38.18). Однородная нить длины L, часть которой лежит на гладком горизонтальном столе, движется под влиянием силы тяжести другой части, которая свешивается со стола. Определить промежуток времени T, по истечении которого нить покинет стол, если известно, что в начальный момент длина свешивающейся части равна l, а начальная скорость равна нулю.

Ответ: $T=\sqrt{\frac{l}{g}}\ln\left(\frac{L+\sqrt{L^2-l^2}}{l}\right)$.

38.19(38.19). Однородная нить длины $2a$, висевшая на гладком штифте и находившаяся в покое, начинает двигаться с начальной скоростью v_0. Определить скорость нити в тот момент, когда она сойдет со штифта.

Ответ: $v=\sqrt{ag+v_0^2}$.

38.20(38.20). Транспортер приводится в движение из состояния покоя приводом, присоединенным к нижнему шкиву B. Привод сообщает этому шкиву постоянный вращающий момент M. Определить скорость ленты транспортера v в зависимости от ее перемещения s, если масса поднимаемого груза A равна M_1, а шкивы B и C радиуса r и массы M_2 каждый представляют собой однородные круглые цилиндры. Лента транспортера, массой которой следует пренебречь, образует с горизонтом угол α. Скольжение ленты по шкивам отсутствует.



К задаче 38.20

Ответ: $v=\sqrt{\frac{2(M-M_1gr\sin\alpha)}{r(M_1+M_2)}s}$.

38.21(38.21). Горизонтальная трубка CD может свободно вращаться вокруг вертикальной оси AB (см. рисунок к задаче 37.56). Внутри трубки на расстоянии $MC=x_0$ от оси лежит тело M. В некоторый момент времени трубке сообщена начальная угловая скорость ω_0.

Определить скорость v тела M относительно трубки в момент, когда тело вылетит из трубки. Момент инерции трубки относительно оси вращения равен J, L — длина трубки; трением пренебречь. Тело считать материальной точкой массы m.

Указание. Воспользоваться ответом к задаче 37.56.

Ответ: $v=\omega_0\sqrt{\frac{J+mx_0^2}{J+mL^2}(L^2-x_0^2)}$.

38.22(38.22). По горизонтальной платформе A, движущейся при отсутствии трения, перемещается тело B с постоянной относительной скоростью u_0 (см. рисунок к задаче 36.9). При затормаживании тела B между ним и платформой A возникают силы трения. Определить работу внутренних сил трения между телом B и платформой A от момента начала торможения до полной остановки тела B относительно платформы A, если их массы соответственно равны m и M.

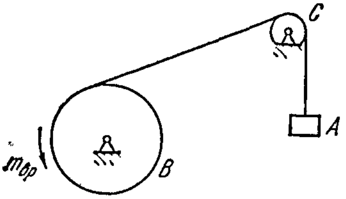
Указание. Воспользоваться ответом задачи 36.9.

Ответ: $A=-\frac{1}{2}\frac{mM}{M+m}u_0^2$.

38.23(38.23). С помощью электромотора лебедки к валу барабана A радиуса r и массы M_1 приложен вращающий момент $m_{\text{вр}}$, пропорциональный углу поворота φ барабана, причем коэффициент пропорциональности равен a (см рисунок к задаче 37.43). Определить скорость поднимаемого груза B массы M_2 в зависимости от высоты его подъема h Барабан A считать сплошным цилиндром. Массой троса пренебречь В начальный момент система находилась в покое

Ответ: $v=\sqrt{\dfrac{2h\,(ah-2M\,gr^2)}{r^2\,(M_1+2M_2)}}$

38.24(38.24). На рисунке изображен подъемный механизм лебедки Груз A массы M_1 поднимается посредством троса, переброшенного через блок C и навитого на барабан B радиуса r и массы M_2. К барабану приложен вращающий момент, который с момента включения пропорционален квадрату угла поворота φ барабана: $m_{\text{вр}}=a\varphi^2$, где a — постоянный коэффициент. Определить скорость груза A в момент, когда он поднимается на высоту h Массу барабана B считать равномерно распределенной по его ободу. Блок C — сплошной диск массы M_3 Массой троса пренебречь. В начальный момент система находилась в покое.



К задаче 38.24

Ответ: $v=\sqrt{\dfrac{4h\,(ah^2-3M_1gr^3)}{3r^3\,(2M_1+2M_2+M_3)}}$.

38.25(38.25). Какую начальную скорость, параллельную линии наибольшего ската наклонной плоскости, надо сообщить оси колеса радиуса r для того, чтобы оно, катясь без скольжения, поднялось на высоту h по наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом? Коэффициент трения качения равен $f_\text{к}$ Колесо считать однородным диском

Ответ: $v=\dfrac{2}{3}\sqrt{3gh\left(1+\dfrac{f_\text{к}}{r}\operatorname{ctg}\alpha\right)}$

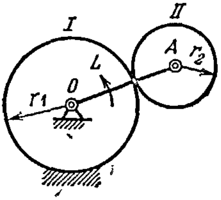
38.26(38.26). Два цилиндра одинаковой массы и радиуса скатываются без скольжения по наклонной плоскости Первый цилиндр сплошной, массу второго цилиндра можно считать равномерно распределенной по его ободу Найти зависимость между скоростями центров масс цилиндров при опускании их на одну и ту же высоту. В начальный момент цилиндры находились в покое

Ответ: $v_2/v_1=\sqrt{3}/2$

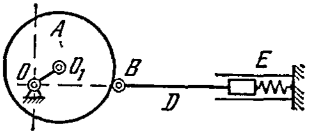
38.27(38.27). Эпициклический механизм, расположенный в горизонтальной плоскости, приводится в движение из состояния покоя посредством постоянного вращающего момента L, приложенного к кривошипу OA. Определить угловую скорость кривошипа в зависимости от его угла поворота, если неподвижное колесо I имеет радиус r_1, подвижное колесо II — радиус r_2 и массу M_1, а кривошип OA — массу M_2 Колесо II считать однородным диском, а кривошип — однородным стержнем

Ответ: $\omega = \frac{2}{r_1 + r_2}\sqrt{\frac{3L\varphi}{9M_1 + 2M_2}}$.

38.28(38.28). В кулачковом механизме, расположенном в горизонтальной плоскости, эксцентрик A приводит в возвратно-поступательное движение ролик B со штангой D. Пружина E, соединенная со штангой, обеспечивает постоянный контакт ролика с эксцентриком Масса эксцентрика равна M, эксцентриситет e равен половине его радиуса; коэффициент упругости пружины равен c. При крайнем левом положении штанги пружина не напряжена Какую угловую скорость надо сообщить эксцентрику для того, чтобы он переместил штангу D из крайнего левого в крайнее правое положение? Массой ролика, штанги и пружины пренебречь. Эксцентрик считать однородным круглым диском.



К задаче 38 27



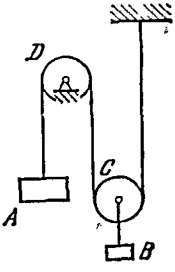
К задаче 38 28

Ответ: $\omega = 2\sqrt{c/(3M)}$.

38.29(38.29). Какой путь проедет велосипедист не вращая педалями до остановки, если в начальный момент он двигался со скоростью 9 км/ч? Общая масса велосипеда и велосипедиста равна 80 кг. Масса каждого из колес равна 5 кг, массу каждого из колес считать равномерно распределенной по окружности радиуса 50 см Коэффициент трения качения колес о землю равен 0,5 см

Ответ 35,6 м

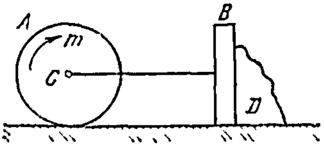
38.30(38.31). Груз A массы M_1, опускаясь вниз, при помощи троса, перекинутого через неподвижный блок D, поднимает вверх груз B массы M_2, прикрепленный к оси подвижного блока C. Блоки C и D считать однородными сплошными дисками массы M_3 каждый Определить скорость груза A в момент, когда он опустится на высоту h. Массой троса, проскальзыванием по ободам блоков и силами сопротивления пренебречь В начальный момент система находилась в покое



К задаче 38 30

Ответ: $v = 2\sqrt{2gh\frac{2M_1 - M_2 - M_3}{8M_1 + 2M_2 + 7M_3}}$.

38.31(38.32). К ведущему колесу — барабану A — снегоочистителя приложен постоянный вращающий момент m. Массу барабана A можно считать равномерно распределенной по его ободу. Суммарная масса снега D, щита B и всех прочих поступательно движущихся частей постоянна и равна M_2. Коэффициент трения скольжения снега и щита о землю равен f, коэффициент трения качения барабана о землю равен $f_{\text{к}}$. Масса барабана равна M_1, его радиус r.



К задаче 38.31

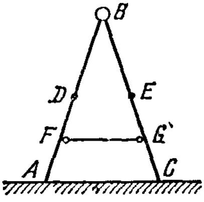
Определить зависимость между путем s, пройденным щитом B снегоочистителя, и модулем его скорости v, если в начальный момент система находилась в покое.

$$\text{Ответ: } s = \frac{r}{2}\,\frac{2M_1 + M}{m - (M_1 f_{\text{к}} + fM r)\,g}\,v^2.$$

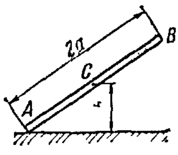
38.32(38.33). Скорость автомашины, движущейся по прямой горизонтальной дороге, возросла от v_1 до v_2 за счет увеличения мощности мотора. При этом был пройден путь s. Вычислить работу, совершенную мотором на этом перемещении автомашины, если M_1 — масса каждого из четырех колес, M_2 — масса кузова, r — радиус колес, $f_{\text{к}}$ — коэффициент трения качения колес о шоссе. Колеса, катящиеся без скольжения, считать однородными сплошными дисками. Кинетической энергией всех деталей, кроме колес и кузова, пренебречь.

$$\text{Ответ: } A = \frac{6M_1 + M_2}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right) + \frac{f_{\text{к}}}{r}(4M_1 + M_2)\,gs.$$

38.33(38.34). Стремянка ABC с шарниром B стоит на гладком горизонтальном полу, длина $AB = BC = 2l$, центры масс находятся в серединах D и E стержней, радиус инерции каждой лестницы относительно оси, проходящей через центр масс, равен ρ, расстояние шарнира B от пола равно h. В некоторый момент времени стремянка начинает падать вследствие разрыва стержня FG. Пренебрегая трением в шарнире, определить: 1) скорость точки B в момент удара ее о пол, 2) скорость точки B в тот момент, когда расстояние ее от пола будет равно $h/2$.



К задаче 38.33



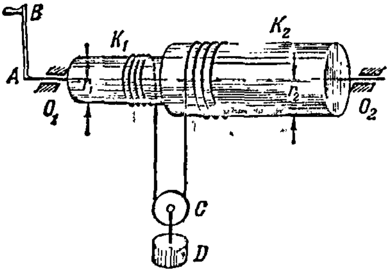
К задаче 38.34

$$\text{Ответ: } 1)\ v = 2l\sqrt{\frac{gh}{l^2 + \rho^2}}, \quad 2)\ v = \frac{1}{2}\sqrt{gh\,\frac{16l^2 - h^2}{2\,(l^2 + \rho^2)}}.$$

38.34(38.35). Стержень AB длины $2a$ падает, скользя концом A по гладкому горизонтальному полу. В начальный момент стержень занимал вертикальное положение и находился в покое. Определить скорость центра масс стержня в зависимости от его высоты h над полом.

Ответ: $v=(a-h)\sqrt{\frac{6g(a+h)}{4a^2-3h^2}}$.

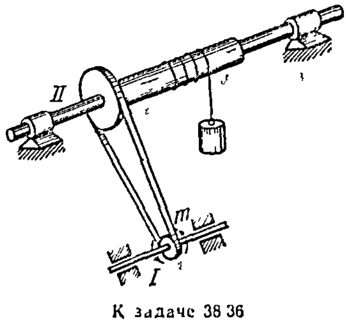
38.35(38.36). В дифференциальном вороте два жестко соединенных вала K_1 и K_2 с радиусами r_1 и r_2 и моментами инерции относительно оси O_1O_2 соответственно J_1 и J_2 приводятся во вращение рукояткой AB. Подвижный блок C подвешен на невесомой нерастяжимой нити, левая ветвь которой навита на вал K_1, а правая ветвь — на вал K_2. При вращении рукоятки AB левая ветвь нити сматывается с вала K_1, а правая ветвь наматывается на вал K_2. К рукоятке AB приложен постоянный вращающий момент m. К блоку C подвешен груз D массы M. Найти угловую скорость вращения рукоятки в момент, соответствующий концу подъема груза D на высоту s. В начальный момент система находилась в покое. Массами рукоятки и блока пренебречь.



К задаче 38.35

Ответ: $\omega=2\sqrt{2s\frac{2m-Mg(r_2-r_1)}{(r_2-r_1)[M(r_2-r_1)^2+4(J_1+J_2)]}}$.

38.36(38.37). Ворот приводится в движение посредством ременной передачи, соединяющей шкив II, сидящий на валу ворота, со шкивом I, сидящим на валу мотора. К шкиву I массы M_1 и радиуса r приложен постоянный вращающий момент m. Масса шкива II равна M_2, радиус его R. Масса барабана ворота M_3, радиус его r, масса поднимаемого груза M_4. Ворот приводится в движение из состояния покоя. Найти скорость груза в момент, когда он поднимается на высоту h. Массами ремня, каната и трением в подшипниках пренебречь. Шкивы и барабан считать однородными круглыми цилиндрами.



К задаче 38.36

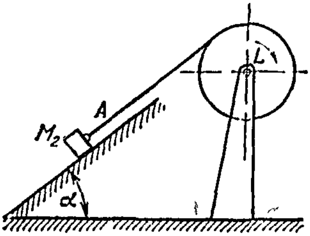
Ответ:

$$v=2\sqrt{\frac{h(mR/r^2-M_4g)}{M_1(R/r)^2+M_2(R/r)^2+M_3+2M_4}}.$$

38.37(38.38). Решить предыдущую задачу, принимая во внимание массу каната, к которому привязан груз. Длина каната l, масса единицы длины каната M. В начальный момент с вала барабана ворота свисала часть каната длиной $2h$.

Ответ: $v=2\sqrt{\frac{h(mR/r^2-M_4g-{}^3/_2Mgh)}{M_1(R/r)^2+M_2(R/r)^2+M_3+2M_4+2Ml}}$.

38.38(38.39). Постоянный вращающий момент L приложен к барабану ворота радиуса r и массы M_1. К концу A намотанного на барабан троса привязан груз массы M_2, который поднимается по наклонной плоскости, расположенной под углом α к горизонту. Какую угловую скорость приобретет барабан ворота, повернувшись на угол φ? Коэффициент трения скольжения груза о наклонную плоскость равен f. Массой троса пренебречь, барабан считать однородным круглым цилиндром. В начальный момент система была в покое.



К задаче 38.38

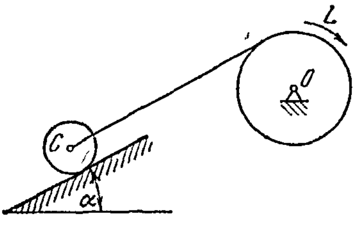
Ответ:

$$\omega = \frac{2}{r}\sqrt{\frac{L - M_2 gr(\sin\alpha + f\cos\alpha)}{M_1 + 2M_2}}\,\varphi$$

38.39(38.40). Решить предыдущую задачу с учетом массы троса, к которому привязан груз. Длина троса равна l, масса единицы длины троса равна M. В начальный момент с барабана ворота свисала часть троса длиной a. Изменением потенциальной энергии троса, намотанного на барабан, пренебречь.

Ответ: $\omega = \dfrac{1}{r}\sqrt{2\,\dfrac{2L - 2M_2 gr(\sin\alpha + f\cos\alpha) - Mgr(2a - r\varphi)\sin\alpha}{M_1 + 2M_2 + 2Ml}}\,\varphi$.

38.40(38.41). К барабану ворота радиуса r_1 и массы M_1 приложен постоянный вращающий момент L. К концу троса, намотанного на барабан, прикреплена ось C колеса массы M_2. Колесо катится без скольжения вверх по наклонной плоскости, расположенной под углом α к горизонту. Какую угловую скорость приобретет барабан, сделав n оборотов? Барабан и колесо считать однородными круглыми цилиндрами. В начальный момент система находилась в покое. Массой троса и трением пренебречь.



К задаче 38.40

Ответ:

$$\omega = \frac{2}{r_1}\sqrt{2\pi n\,\frac{L - M_2 gr_1\sin\alpha}{M_1 + 3M_2}}\,.$$

38.41(38.42). Решить предыдущую задачу с учетом массы троса и трения качения колеса о наклонную плоскость, если l — длина троса, M — масса его единицы длины, a — длина части троса, не намотанной на барабан в начальный момент, $f_к$ — коэффициент трения качения, r_2 — радиус колеса. Изменением потенциальной энергии троса, намотанного на барабан, пренебречь.

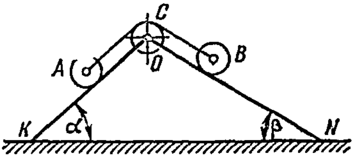
Ответ:

$$\omega = \frac{2}{r_1}\sqrt{2\pi n\,\frac{L - r_1 g\left[M_2\left(\sin\alpha + \frac{f_к}{r_2}\cos\alpha\right) + M(a - \pi n r_1)\sin\alpha\right]}{M_1 + 3M_2 + 2Ml}}\,.$$

38.42(38.43). Колесо A скатывается без скольжения по наклонной плоскости OK, поднимая посредством нерастяжимого троса колесо B, которое катится без скольжения по наклонной плоскости ON. Трос переброшен через блок C, вращающийся вокруг неподвижной горизонтальной оси O. Найти скорость оси колеса A при ее перемещении параллельно линии OK на расстояние s. В начальный момент система была в покое. Оба колеса и блок считать однородными дисками одинаковой массы и радиуса. Массой троса пренебречь.

Ответ:

$$v = 2\sqrt{\frac{1}{7} gs(\sin\alpha - \sin\beta)}\,.$$



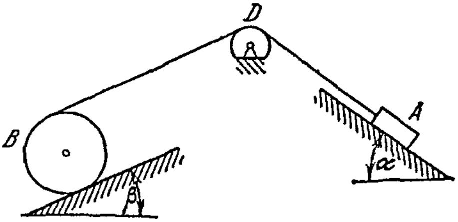
К задаче 38.42

38.43.(38.44). Решить предыдущую задачу, принимая во внимание трение качения колес о наклонные плоскости. Коэффициент трения качения равен $f_\text{к}$, радиусы колес равны r.

Ответ: $v = 2\sqrt{\frac{1}{7} gs\left[\sin\alpha - \sin\beta - \frac{f_\text{к}}{r}(\cos\alpha + \cos\beta)\right]}\,.$

38.44(38.45). К грузу A массы M_1 прикреплена нерастяжимая нить, переброшенная через блок D массы M_2 и намотанная на боковую поверхность цилиндрического катка B массы M_3. При движении груза A вниз по наклонной плоскости, расположенной под углом α к горизонту, вращается блок D, а каток B катится без скольжения вверх по наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол β.

Определить скорость груза A в зависимости от пройденного им пути s, если в начальный момент система находилась в покое. Блок D и каток B считать однородными круглыми цилиндрами. Силами трения и массой нити пренебречь.



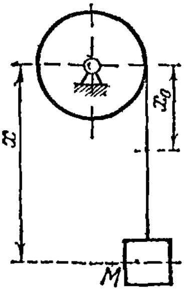
К задаче 38.44

Ответ: $v = 2\sqrt{2gs\,\frac{2M_1\sin\alpha - M_3\sin\beta}{8M_1 + 4M_2 + 3M_3}}\,.$

38.45(38.46). Решить предыдущую задачу в предположении, что коэффициенты трения скольжения и качения соответственно равны f и $f_\text{к}$. Радиус катка B равен r.

Ответ: $v = 2\sqrt{2gs\,\frac{2M_1(\sin\alpha - f\cos\alpha) - M_3\left(\sin\beta + \frac{f_\text{к}}{r}\cos\beta\right)}{8M_1 + 4M_2 + 3M_3}}\,.$

38.46(38.47). Груз массы M подвешен на нерастяжимом однородном тросе длины l, навитом на цилиндрический барабан с горизонтальной осью вращения. Момент инерции барабана относительно оси вращения J, радиус барабана R, масса единицы длины каната m. Определить скорость груза в момент, когда длина свисающей части каната равна x, если в начальный момент скорость груза $v_0 = 0$, а длина свисающей части каната была равна x_0, трением на оси барабана, толщиной троса и изменением потенциальной энергии троса, навитого на барабан, пренебречь



К задаче 38.46

$$\text{Ответ: } v = R\sqrt{\frac{g[2M + m(x + x_0)](x - x_0)}{J + (M + ml)R^2}}.$$

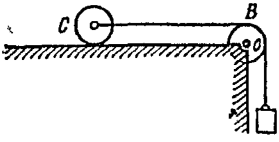
38.47(38.48). Груз A массы M_1 подвешен к однородному нерастяжимому канату длины L и массы M_2. Канат переброшен через блок B, вращающийся вокруг оси O, перпендикулярной плоскости рисунка. Второй конец каната прикреплен к оси катка C, катящегося без скольжения по неподвижной плоскости.

Блок B и каток C — однородные круглые диски радиуса r и массы M_3 каждый. Коэффициент трения качения катка C о горизонтальную плоскость равен $f_к$. В начальный момент, когда система находилась в покое, с блока B свисала часть каната длины l. Определить скорость груза A в зависимости от его вертикального перемещения h

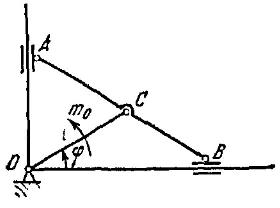
Ответ:

$$v = \sqrt{\frac{2gh\left\{M_1 + \frac{M_2}{2l}(2l + 2r + h) - \frac{f_к}{r}\left[M_3 + M_2\left(\frac{1}{2} - \frac{l}{2L} - \frac{\pi r}{4L} - \frac{h}{4l}\right)\right]\right\}}{M_1 + M_2 + 2M_3}}$$

38.48(38.49). Механизм эллипсографа, расположенный в горизонтальной плоскости, приводится в движение посредством



К задаче 38.47



К задаче 38.48

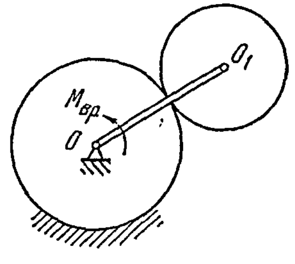
постоянного вращающего момента m_0, приложенного к кривошипу OC. В начальный момент при $\varphi = 0$ механизм находился в покое. Найти угловую скорость кривошипа OC в момент, когда он сделал четверть оборота. Дано: M — масса стержня AB, $m_A = m_B = m$ — массы ползунов A и B, $OC = AC = BC = l$; массой кривошипа OC и силами сопротивления пренебречь.

$$\text{Ответ: } \omega = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{3\pi m_0}{M + 3m}}.$$

38.49(38.50). Решить предыдущую задачу с учетом постоянного момента сопротивления m_C в шарнире C.

$$\text{Ответ: } \omega = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{3\pi(m_0 - 2m_C)}{M + 3m}}.$$

38.50(38.51). К кривошипу OO_1 эпициклического механизма, расположенного в горизонтальной плоскости, приложен вращающий момент $M_{вр} = M_0 - \alpha\omega$, где M_0 и α — положительные постоянные, а ω — угловая скорость кривошипа. Масса кривошипа равна m, M — масса сателлита (подвижного колеса). Считая кривошип тонким однородным стержнем, а сателлит — однородным круглым диском радиуса r, определить угловую скорость ω кривошипа как функцию времени. В начальный момент система находилась в покое. Радиус неподвижной шестерни равен R; силами сопротивления пренебречь.



К задаче 38.50

Указание. Применить теорему об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме.

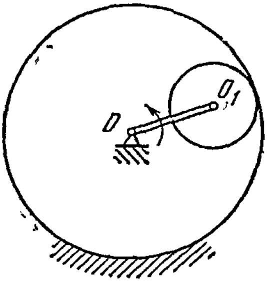
Ответ: $\omega = \frac{M_0}{\alpha}\left(1 - e^{-\frac{\alpha}{J_{пр}}t}\right)$, где $J_{пр} = \left(\frac{m}{3} + \frac{3}{2}M\right)(R + r)^2$.

38.51(38.52). Решить предыдущую задачу с учетом постоянного момента трения $M_{тр}$ на оси O_1 сателлита.

Ответ: $\omega = \frac{M_0 - \frac{R}{r}M_{тр}}{\alpha}\left(1 - e^{-\frac{\alpha}{J_{пр}}t}\right)$, где $J_{пр} = \left(\frac{m}{3} + \frac{3}{2}M\right)(R + r)^2$.

38.52(38.53). Кривошип OO_1 гипоциклического механизма, расположенного в горизонтальной плоскости, вращается с постоянной угловой скоростью ω_0. В некоторый момент времени двигатель был отключен и под действием постоянного момента $M_{тр}$ сил трения на оси сателлита (подвижного колеса) механизм остановился.

Определить время τ торможения и угол φ поворота кривошипа за это время, если его масса равна M_1, M_2 — масса сателлита, R и r — радиусы большого и малого колес. Кривошип принять за однородный тонкий стержень, а сателлит — за однородный диск.

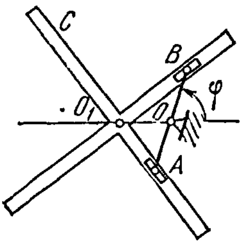


К задаче 38.52

Указание. Применить теорему об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме.

Ответ: $\tau = \frac{rJ_{пр}}{RM_{тр}}\omega_0$, $\varphi = \frac{1}{2}\frac{rJ_{пр}}{RM_{тр}}\omega_0^2$, где $J_{пр} = \left(\frac{M_1}{3} + \frac{3}{2}M_2\right) \times (R - r)^2$.

38.53(38.54). Крестовина C приводится во вращение вокруг неподвижной оси O_1 посредством однородного стержня AB, вращающегося вокруг неподвижной оси O (оси O и O_1 перпендикулярны плоскости рисунка). При этом ползуны A и B, соединенные при помощи шарниров со стержнем AB, скользят вдоль взаимно перпендикулярных прорезей крестовины C. Вращение стержня происходит под действием постоянного вращающего момента $m_{вр}$. Определить угловую скорость стержня AB в момент, когда он сделает четверть оборота, если в начальный момент при $\varphi = 0$ он имел угловую скорость ω_0. Величина момента сопротивления, возникающего в каждом из шарниров ползунов A и B, в два раза меньше $m_{вр}$. Прочими силами сопротивления пренебречь. Масса стержня равна m; момент инерции крестовины C относительно оси O_1 равен J; $OO_1 = OA = OB = l$.



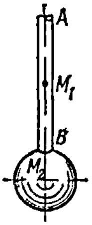
К задаче 38.53

Ответ: $\omega = \sqrt{\dfrac{6\pi m_{вр}}{4ml^2 + 3J} + \omega_0^2}$.

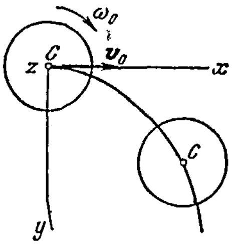
§ 39. Плоскопараллельное (плоское) движение твердого тела

39.1(39.1). Тяжелое тело состоит из стержня AB длины 80 см и массы 1 кг и прикрепленного к нему диска радиуса 20 см и массы 2 кг. В начальный момент при вертикальном положении стержня телу сообщено такое движение, что скорость центра масс M_1 стержня равна нулю, а скорость центра масс M_2 диска равна 360 см/с и направлена по горизонтали вправо. Найти последующее движение тела, принимая во внимание только действие силы тяжести.

Ответ: Тело равномерно вращается с угловой скоростью 6 рад/с вокруг своего центра масс, который описывает параболу $y^2 = 117{,}5x$ (начало координат — в точке B, ось y направлена по горизонтали вправо, ось x — вниз).



К задаче 39.1



К задаче 39.2

39.2(39.2). Диск падает в вертикальной плоскости под действием силы тяжести. В начальный момент диску была сообщена угловая скорость ω_0, а его центр масс C, находившийся в начале координат, имел горизонтально направленную скорость v_0. Найти уравнения движения диска. Оси x, y изображены на рисунке. Силами сопротивления пренебречь.

Ответ: $x_C = v_0 t$, $y_C = \dfrac{gt^2}{2}$, $\varphi = \omega_0 t$, где φ — угол поворота диска, образованный осью x и диаметром, занимавшим в начальный момент горизонтальное положение.

39.3(39.3). Решить предыдущую задачу, считая, что момент m_C сопротивления движению относительно подвижной горизонтальной оси, проходящей через центр масс C диска перпендикулярно плоскости движения его, пропорционален первой степени угловой скорости диска $\dot{\varphi}$, причем коэффициент пропорциональности равен β. Момент инерции диска относительно этой оси равен J_C.

Ответ: $x_C = v_0 t$, $y_C = \frac{gt^2}{2}$, $\varphi = \frac{J_C \omega_0}{\beta}\left(1 - e^{-\frac{\beta}{J_C}t}\right)$, где φ — угол поворота диска, образованный осью x и диаметром, занимавшим в начальный момент горизонтальное положение

39.4(39.4). Ведущее колесо автомашины радиуса r и массы M движется горизонтально и прямолинейно К колесу приложен вращающий момент m. Радиус инерции колеса относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно его плоскости, равен ρ Коэффициент трения скольжения колеса о землю равен f. Какому условию должен удовлетворять вращающий момент для того, чтобы колесо катилось без скольжения? Сопротивлением качения пренебречь

Ответ: $m \leqslant fMg\frac{r^2 + \rho^2}{r}$.

39.5(39.5). Решить предыдущую задачу с учетом трения качения, если коэффициент трения качения равен $f_к$.

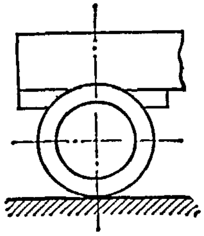
Ответ: $m \leqslant fMg\frac{r^2 + \rho^2}{r} + Mgf_к$.

39.6(39.6). Ось ведомого колеса автомашины движется горизонтально и прямолинейно К оси колеса приложена горизонтально направленная движущая сила F Радиус инерции колеса относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно его плоскости, равен ρ. Коэффициент трения скольжения колеса о землю равен f. Радиус колеса равен r, масса колеса равна M. Какому условию должна удовлетворять величина силы F для того, чтобы колесо катилось без скольжения? Сопротивлением качения пренебречь

Ответ: $F \leqslant fMg\frac{r^2 + \rho^2}{\rho^2}$.

39.7(39.7). Решить предыдущую задачу с учетом трения качения, если коэффициент трения качения равен $f_к$

Ответ: $F \leqslant \frac{fMg(r^2 + \rho^2) - Mgf_к r}{\rho^2}$.



К задаче 39 8

39.8. Автомобильный прицеп движется замедленно с ускорением w_0 до остановки. При этом тормоз в одном из его колес не включается. Давление колеса на дорогу равно N. Коэффициент трения колеса с дорогой равен f. Дано. r — радиус колеса, m — его масса, ρ — радиус инерции Определить силу горизонтального давления S колеса на его ось

Ответ: 1) $w_0 \leqslant \frac{fN}{m}\frac{r^2}{\rho^2}$, $S = mw_0\left(1 + \frac{\rho^2}{r_1^2}\right)$, 2) $w_0 > \frac{fN}{m}\frac{r^2}{\rho^2}$, $S = mw_0 + fN$.

39.9(39.9). Колесо радиуса r катится по прямолинейному горизонтальному рельсу под действием приложенного вращающего момента $m_{вр} = {}^5/_2 fMgr$, где f — коэффициент трения скольжения, M — масса колеса Определить скорость точки колеса, соприкасающейся с рельсом (скорость проскальзывания) Масса колеса равномерно распределена по его ободу. Трением качения пренебречь. В начальный момент колесо находилось в покое.

Ответ: $\frac{fg}{2} t$.

39.10(39.10). Решить предыдущую задачу с учетом трения качения, если коэффициент трения качения $f_к = {}^1/_4 fr$.

Ответ. ${}^1/_4 fgt$.

39.11(39.11). Однородный цилиндр с горизонтальной осью скатывается под действием силы тяжести по наклонной шероховатой плоскости с коэффициентом трения f. Определить угол наклона плоскости к горизонту и ускорение оси цилиндра, предполагая, что при движении цилиндра скольжение отсутствует. Сопротивлением качения пренебречь

Ответ. $\alpha \leqslant \operatorname{arctg} 3f$, $w = {}^2/_3 g \sin\alpha$.

39.12(39.13). Однородный сплошной круглый диск катится без скольжения по наклонной плоскости, расположенной под углом α к горизонту. Ось диска образует угол β с линией наибольшего ската. Определить ускорение центра масс диска, считая, что его качение происходит в одной вертикальной плоскости.

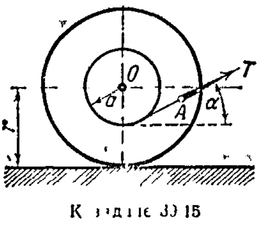
Ответ: $w_C = {}^2/_3 g \sin\alpha \sin\beta$.

39.13(39.14). Однородный цилиндр с горизонтальной осью скатывается под действием силы тяжести со скольжением по наклонной плоскости при коэффициенте трения скольжения f. Определить угол наклона плоскости к горизонту и ускорение оси цилиндра.

Ответ: $\alpha > \operatorname{arctg} 3f$, $w = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)$.

39.14(39.15). Однородное колесо радиуса r скатывается без скольжения по наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом При каком значении коэффициента трения качения $f_к$ центр масс колеса будет двигаться равномерно, а колесо при этом будет равномерно вращаться вокруг оси, проходящей через центр масс перпендикулярно его плоскости?

Ответ $f_к = r \operatorname{tg}\alpha$



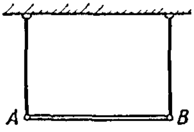
К задаче 39.15

39.15(39.16). На барабан однородного катка массы M и радиуса r, лежащего на горизонтальном шероховатом полу, намотана нить, к которой приложена сила T под углом α к горизонту. Радиус барабана a, радиус инерции катка ρ. Определить закон движения оси катка O. В начальный момент каток находился в покое, затем катился без скольжения.

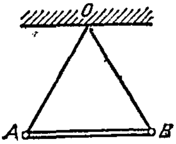
Ответ: $x = \frac{T}{M} \frac{r(r\cos\alpha - a)}{2(\rho^2 + r^2)} t^2$, причем ось x направлена слева направо.

39.16(39.17). Однородный стержень AB массы M горизонтально подвешен к потолку посредством двух вертикальных нитей, прикрепленных к концам стержня. Найти натяжение одной из нитей в момент обрыва другой.

Указание. Составить дифференциальные уравнения движения стержня для весьма малого промежутка времени, следующего за моментом обрыва нити, пренебрегая изменением направления стержня и изменением расстояния центра масс стержня от другой нити.



К задаче 39.16



К задаче 39.17

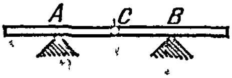
Ответ. $T = Mg/4$.

39.17(39.18). Однородный стержень AB массы M подвешен в точке O на двух нитях равной с ним длины.

Определить натяжение одной из нитей в момент обрыва другой. (См. указание к задаче 39.16.)

Ответ. $T = 0{,}266\,Mg$.

39.18(39.19). Однородный тонкий стержень длины $2l$ и массы M лежит на двух опорах A и B; центр масс C стержня находится на одинаковых расстояниях от опор, причем $CA = CB = a$; давление на каждую опору равно $1/2\ P$. Как изменится давление на опору A в тот момент, когда опора B будет мгновенно удалена? (См. указание к задаче 39.16.)



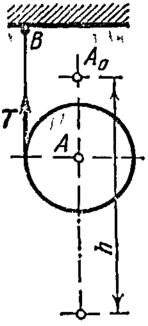
К задаче 39.18

Ответ. Давление на опору A получит приращение, равное

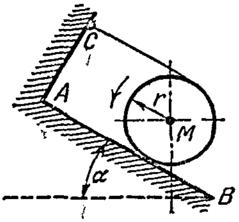
$$\frac{l^2 - 3a^2}{2(l^2 + 3a^2)}Mg.$$

39.19(39.20). Тяжелый круглый цилиндр A массы m обмотан посредине тонкой нитью, конец которой B закреплен неподвижно. Цилиндр падает без начальной скорости, разматывая нить. Определить скорость оси цилиндра, после того как эта ось опустится на высоту h, и найти натяжение T нити.

Ответ. $v = {}^2/_3\sqrt{3gh}$, $T = {}^1/_3\,mg$.



К задаче 39.19



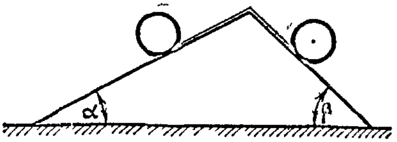
К задаче 39.20

39.20(39.21). Две гибкие нити обмотаны вокруг однородного круглого цилиндра массы M и радиуса r так, что завитки их расположены симметрично относительно средней плоскости, параллельной основаниям. Цилиндр помещен на наклонной плоскости AB так, что его образующие перпендикулярны линии наибольшего ската, а концы C нитей закреплены симметрично относительно вышеуказанной средней плоскости на расстоянии $2r$ от плоскости AB. Цилиндр начинает двигаться без начальной скорости под действием силы тяжести, преодолевая трение о наклонную плоскость, причем коэффициент трения равен f_1. Определить путь s, пройденный центром масс цилиндра за время t, и натяжение T нитей, предполагая, что в течение рассматриваемого промежутка времени ни одна из нитей не сматывается до конца.

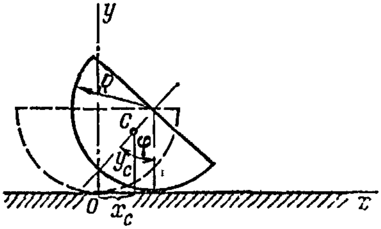
Ответ: $s = \frac{1}{3} g(\sin\alpha - 2f\cos\alpha)t^2$, $\quad T = \frac{1}{6} Mg(\sin\alpha + f\cos\alpha)$.

Цилиндр остается в покое, если $\operatorname{tg}\alpha < 2f$.

39.21(39.22). Два цилиндрических вала массы M_1 и M_2 скатываются по двум наклонным плоскостям, образующим соответственно углы α и β с горизонтом. Валы соединены нерастяжимой нитью, концы которой намотаны на валы и к ним прикреплены. Определить натяжение нити и ее ускорение при движении по наклонным плоскостям. Валы считать однородными круглыми цилиндрами. Массой нити пренебречь.



К задаче 39.21



К задаче 39.22

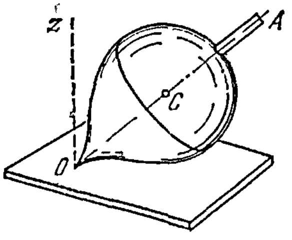
Ответ: $T = g\frac{M_1M_2(\sin\alpha + \sin\beta)}{3(M_1 + M_2)}$, $\quad w = g\frac{M_1\sin\alpha - M_2\sin\beta}{M_1 + M_2}$.

39.22(39.23). Определить период малых колебаний однородного полукруглого диска радиуса R, находящегося на негладкой горизонтальной плоскости, по которой он может катиться без скольжения.

Ответ: $T = \frac{\pi}{2g}\sqrt{2g(9\pi - 16)R}$.

§ 40. Приближенная теория гироскопов

40.1(40.1). Волчок вращается по часовой стрелке вокруг своей оси OA с постоянной угловой скоростью $\omega = 600$ рад/с, ось OA наклонена к вертикали; нижний конец оси O остается неподвижным, центр масс C волчка находится на оси OA на расстоянии $OC = 30$ см от точки O, радиус инерции волчка относительно оси равен 10 см. Определить движение оси волчка OA, считая, что главный момент количеств движения волчка относительно оси OA равен $J\omega$.



К задаче 40.1

Ответ: Ось OA вращается вокруг вертикали Oz по часовой стрелке, описывая круговой конус, с постоянной угловой скоростью $\omega_1 = 0{,}49$ рад/с.

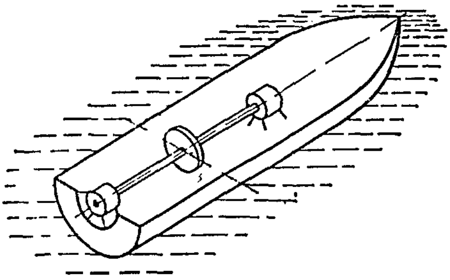
40.2(40.2). Волчок, имея форму диска диаметра 30 см, вращается с угловой скоростью 80 рад/с вокруг своей оси симметрии, Диск насажен на ось длины 20 см, расположенную вдоль оси симметрии волчка. Определить угловую скорость регулярной прецессии волчка, полагая, что его главный момент количеств движения равен $J\omega$

Ответ. 2,18 рад/с

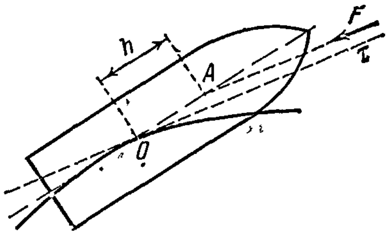
40.3(40.3). Турбина, вал которой параллелен продольной оси судна, делает 1500 об/мин. Масса вращающихся частей 6 т, радиус инерции $\rho = 0{,}7$ м. Определить гироскопические давления на подшипники, если судно описывает циркуляцию вокруг вертикальной оси, поворачиваясь на 10° в секунду. Расстояние между подшипниками $l = 2{,}7$ м.

Ответ. 30,4 кН.

40.4(40.4). Определить максимальные гироскопические давления на подшипники быстроходной турбины, установленной на корабле. Корабль подвержен килевой качке с амплитудой 9° и периодом 15 с вокруг оси, перпендикулярной оси ротора. Ротор турбины массы 3500 кг с радиусом инерции 0,6 м делает 3000 об/мин. Расстояние между подшипниками 2 м.



К задаче 40.4



К задаче 40.5

Ответ. 13,0 кН.

40.5(40.5). Определить время T полного оборота оси симметрии артиллерийского снаряда вокруг касательной к траектории центра масс снаряда. Это движение происходит в связи с действием силы сопротивления воздуха $F = 6{,}72$ кН, приближенно направленной параллельно касательной и приложенной к оси снаряда на расстоянии $h = 0{,}2$ м от центра масс снаряда. Момент количества движения снаряда относительно его оси симметрии равен 1850 кг·м^2/с

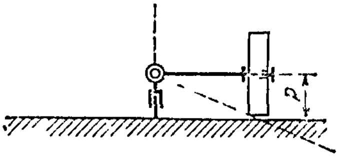
Ответ. 8,66 с.

40.6(40.6). Газотурбовоз приводится в движение турбиной, ось которой параллельна оси колес и вращается в ту же сторону, что и колеса, делая 1500 об/мин. Момент инерции вращающихся частей турбины относительно оси вращения $J = 200$ кг·м^2. Как велика добавочная сила давления на рельсы, если газотурбовоз идет по закруглению радиуса 250 м со скоростью 15 м/с? Ширина колеи 1,5 м

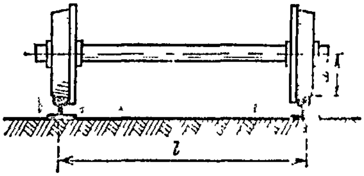
Ответ: На один рельс 1256 Н вниз, на другой рельс 1256 Н вверх.

40.7(40.7). В дробилке с бегунами каждый бегун имеет массу $M = 1200$ кг, радиус инерции относительно его оси $\rho = 0{,}4$ м, радиус $R = 0{,}5$ м, мгновенная ось вращения бегуна проходит через середину линии касания бегуна с дном чаши. Определить силу давления бегуна на горизонтальное дно чаши, если переносная угловая скорость вращения бегуна вокруг вертикальной оси соответствует $n = 60$ об/мин.

Ответ: $N = 26{,}9$ кН.



К задаче 40.7



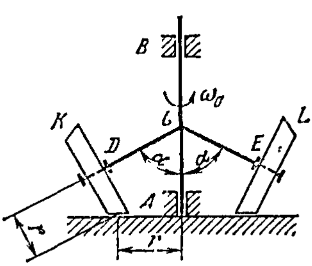
К задаче 40.8

40.8(40.8). Колесный скат массы $M = 1400$ кг, радиуса $a = 75$ см и с радиусом инерции относительно своей оси $\rho = \sqrt{0{,}55}\,a$ движется равномерно со скоростью $v = 20$ м/с по закруглению радиуса $R = 200$ м, лежащему в горизонтальной плоскости. Определить силу давления ската на рельсы, если расстояние между рельсами $l = 1{,}5$ м.

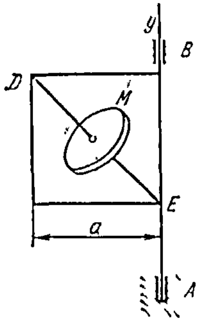
Ответ: $N = (6{,}87 \pm 0{,}77)$ кН.

40.9(40.9). На рисунке изображен узел поворотной части разводного моста. Вал AB с шарнирно прикрепленными к нему под углом α стержнями CD и CE вращается с угловой скоростью ω_0. При этом конические шестерни K и L, свободно насаженные на стержни CD и CE, катятся без скольжения по неподвижной плоской горизонтальной шестерне. Определить силу дополнительного динамического давления шестерен K и L массы M каждая на неподвижную горизонтальную шестерню, если радиусы всех шестерен равны r. Подвижные шестерни считать сплошными однородными дисками.

Ответ: $\dfrac{Mr\omega_0^2\sin\alpha}{2}$.



К задаче 40.9



К задаче 40.10

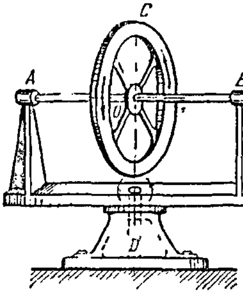
40.10(40.10). Квадратная рама со стороной $a = 20$ см вращается вокруг вертикальной оси AB с угловой скоростью $\omega_1 = 2$ рад/с. Вокруг оси ED, совмещенной с диагональю рамы, вращается диск M радиуса $r = 10$ см с угловой скоростью $\omega = 300$ рад/с. Определить отношение дополнительных сил бокового давления на опоры A и B к соответствующим статическим давлениям. Массой рамы пренебречь. Массу диска считать равномерно распределенной по ободу.

Ответ. 4,32

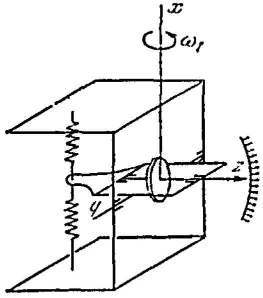
40.11(40.12). Колесо радиуса a и массы $2M$ вращается вокруг горизонтальной оси AB с постоянной угловой скоростью ω_1; ось AB вращается вокруг вертикальной оси OD, проходящей через центр колеса, с постоянной угловой скоростью ω_2, направления вращения показаны стрелками. Найти силы давления N_A и N_B на подшипники A и B, если $AO = OB = h$; масса колеса равномерно распределена по его ободу.

Ответ. $N_A = Mg\left(1 + \frac{a^2\omega_1\omega_2}{gh}\right)$, $N_B = Mg\left(1 - \frac{a^2\omega_1\omega_2}{gh}\right)$.

40.12(40.13). Простейший гиротахометр состоит из гироскопа, рамка которого соединена двумя пружинами, прикрепленными к корпусу прибора. Момент инерции гироскопа относительно оси собственного вращения равен J, угловая скорость гироскопа равна



К задаче 40.11



К задаче 40.12

ω. Определить угол α, на который повернется ось гироскопа вместе с его рамкой, если прибор установлен на платформе, вращающейся с угловой скоростью ω_1 вокруг оси x, перпендикулярной оси y вращения рамки. Коэффициенты жесткости пружин равны c; угол α считать малым; расстояние от оси вращения рамки до пружин равно a.

Ответ: $\alpha = \frac{J\omega}{2ca}\omega_1$.

§ 41. Метод кинетостатики

41.1(41.1). Определить силу тяжести, действующую на круглый однородный диск радиуса 20 см, вращающийся вокруг оси по закону $\varphi = 3t^2$. Ось проходит через центр диска перпендикулярно его плоскости; главный момент сил инерции диска относительно оси вращения равен 4 Н·см.

Ответ: 3,27 Н.

41.2(41.2). Тонкий прямолинейный однородный стержень длины l и массы M вращается вокруг оси, проходящей перпендикулярно стержню через его конец, по закону $\varphi = at^2$ Найти величины и направления равнодействующих J_n и J_τ центробежных и вращательных сил инерции частиц стержня

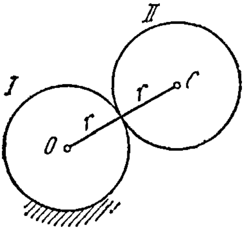
Ответ: Равнодействующая вращательных сил инерции $J_\tau = Mal$ направлена перпендикулярно стержню на расстоянии $^2/_3l$ от оси вращения, равнодействующая центробежных сил инерции $J_n = 2Ma^2lt^2$ направлена вдоль стержня от оси вращения

41.3(41.3). Колесо массы M и радиуса r катится без скольжения по прямолинейному горизонтальному рельсу Определить главный вектор и главный момент сил инерции относительно оси, проходящей через центр масс колеса перпендикулярно плоскости движения Колесо считать сплошным однородным диском Центр масс C движется по закону $x_C = at^2/2$, где a — постоянная положительная величина Ось x направлена вдоль рельса

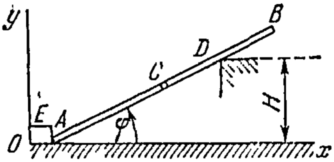
Ответ Главный вектор сил инерции равен по модулю Ma и направлен параллельно оси в отрицательном направлении; главный момент сил инерции равен по абсолютной величине $^1/_2Mar$.

41.4(41.4). Определить главный вектор и главный момент сил инерции подвижного колеса II планетарного механизма относительно оси, проходящей через его центр масс C перпендикулярно плоскости движения Кривошип OC вращается с постоянной угловой скоростью ω Масса колеса II равна M. Радиусы колес равны r

Ответ. Главный вектор сил инерции параллелен кривошипу OC и равен $2Mr\omega^2$, главный момент сил инерции равен нулю.



К задаче 41 4



К задаче 41 5

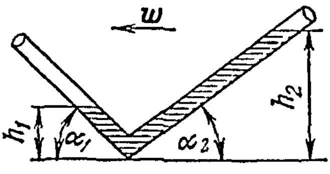
41.5(41.5). Конец A однородного тонкого стержня AB длины $2l$ и массы M перемещается по горизонтальной направляющей с помощью упора E с постоянной скоростью v, причем стержень все время опирается на угол D Определить главный вектор и главный момент сил инерции стержня относительно оси, проходящей через центр масс C стержня перпендикулярно плоскости движения, в зависимости от угла φ

Ответ: $V_x^{(J)} = 3M\frac{v^2}{H^2}l\sin^4\varphi\cos\varphi$, $V_y^{(J)} = M\frac{v^2}{H^2}l(1-3\cos^2\varphi)\times$
$\times\sin^3\varphi$, $m_{Cz}^{(J)} = -\frac{2}{3}Ml^2\frac{v^2}{H^2}\sin^3\varphi\cos\varphi$

41.6(41.6). По данным предыдущей задачи определить динамическое давление N_D стержня на угол D.

Ответ: $N_D = \frac{8}{3}\frac{v^2l^2}{H^3} M \sin^4\varphi\cos\varphi$.

41.7(41.9). Для экспериментального определения замедления троллейбуса применяется жидкостный акселерометр, состоящий из изогнутой трубки, наполненной маслом и расположенной в вертикальной плоскости. Определить величину замедления троллейбуса при торможении, если при этом уровень жидкости в конце трубки, расположенном в направлении движения, повышается до величины h_2, а в противоположном конце понижается до h_1. Положение акселерометра указано на рисунке: $\alpha_1 = \alpha_2 = 45°$, $h_1 = 25$ мм, $h_2 = 75$ мм.



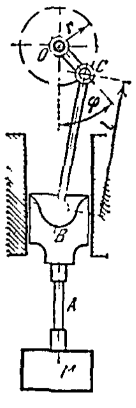
К задаче 41.7

Ответ: $w = g\frac{(h_2 - h_1)\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_2}{h_1\operatorname{tg}\alpha_2 + h_2\operatorname{tg}\alpha_1} = 0{,}5g$.

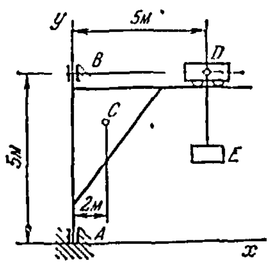
41.8(41.10). С каким ускорением должна двигаться по горизонтальной плоскости призма, боковая грань которой образует угол α с горизонтом, чтобы груз, лежащий на боковой грани, не перемещался относительно призмы?

Ответ. $w = g\operatorname{tg}\alpha$.

41.9(41.11). Для исследования влияния быстро чередующихся растягивающих и сжимающих сил на металлический брусок (испытание на усталость) испытуемый брусок A прикрепляют за верхний конец к ползуну B кривошипного механизма BCO, а к нижнему концу подвешивают груз массы M. Найти силу, растягивающую брусок, в том случае, когда кривошип OC вращается вокруг оси O с постоянной угловой скоростью ω.



К задаче 41.9



К задаче 41.10

Указание. Выражение $\sqrt{1-(r/l)^2\sin^2\varphi}$ следует разложить в ряд и отбросить все члены ряда, содержащие отношение r/l в степени выше второй.

Ответ: $Mg + Mr\omega^2\left(\cos\omega t + \frac{r}{l}\cos 2\omega t\right)$.

41.10(41.12). Определить опорные реакции подпятника A и подшипника B поворотного крана при поднимании груза E массы 3 т с ускорением $^1/_3 g$. Масса крана равна 2 т, а его центр масс находится в точке C. Масса тележки D равна 0,5 т. Кран и тележка неподвижны. Размеры указаны на рисунке.

Ответ: $X_A = -X_B = 52{,}1$ кН; $Y_A = 63{,}9$ кН.

41.11(41.13). Определить опорные реакции подпятника A и подшипника B поворотного крана, рассмотренного в предыдущей задаче, при перемещении тележки влево с ускорением $0{,}5g$ при отсутствии груза E. Центр масс тележки находится на уровне опоры B.

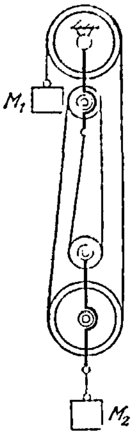
Ответ: $X_A = 12{,}8$ кН, $X_B = -15{,}2$ кН, $Y_A = 24{,}5$ кН.

41.12(41.14). На паром, привязанный к берегу двумя параллельными канатами, въезжает грузовик массы 7 т со скоростью 12 км/ч; тормоза останавливают грузовик на протяжении 3 м. Предполагая, что сила трения колес о настил парома постоянна, определить натяжение канатов. Массой и ускорением парома пренебречь.

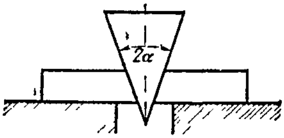
Ответ: $T = 6{,}48$ кН.

41.13(41.15). Автомобиль массы M движется прямолинейно с ускорением w. Определить вертикальное давление передних и задних колес автомобиля, если его центр масс C находится на высоте h от поверхности грунта. Расстояния передней и задней осей автомобиля от вертикали, проходящей через центр масс, соответственно равны a и b. Массами колес пренебречь. Как должен двигаться автомобиль, чтобы давления передних и задних колес оказались равными?

Ответ: $N_1 = \dfrac{M(gb - wh)}{(a+b)}$, $N_2 = \dfrac{M(ga + wh)}{(a+b)}$; при торможении автомобиля с замедлением $w = g\dfrac{a-b}{2h}$.



К задаче 41.14



К задаче 41.15

41.14(41.16). С каким ускорением w опускается груз массы M_1, поднимая груз массы M_2 с помощью полиспаста, изображенного на рисунке? Каково условие равномерного движения груза M_1? Массами блоков и троса пренебречь.

Указание. Ускорение груза M_2 в четыре раза меньше ускорения груза M_1.

Ответ: $w = 4g\dfrac{4M_1 - M_2}{16M_1 + M_2}$, $\dfrac{M_1}{M_2} = \dfrac{1}{4}$.

41.15(41.17). Гладкий клин массы M и с углом 2α при вершине раздвигает две пластины массы M_1 каждая, лежащие в покое на гладком горизонтальном столе. Написать уравнения движения клина и пластин и определить силу давления клина на каждую из пластин.

Ответ: Уравнение движения клина:

$$s=\frac{wt^2}{2},\quad \text{где}\quad w=g\frac{M\operatorname{ctg}\alpha}{M\operatorname{ctg}\alpha+2M_1\operatorname{tg}\alpha};$$

уравнение движения пластин:

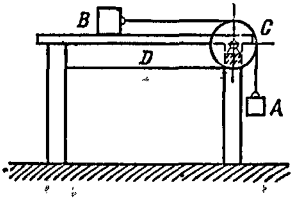
$$s_1=\frac{w_1t^2}{2},\quad \text{где}\quad w_1=w\operatorname{tg}\alpha;$$

сила давления

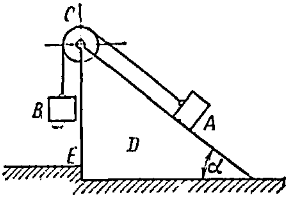
$$N=\frac{M_1w_1}{\cos\alpha}.$$

41.16(41.18). Груз A массы M_1, опускаясь вниз, приводит в движение посредством нерастяжимой нити, переброшенной через неподвижный блок C, груз B массы M_2. Определить силу давления стола D на пол, если масса стола равна M_3. Массой нити пренебречь.

Ответ: $N=\left(M_1+M_2+M_3-\frac{M_1^2}{M_1+M_2}\right)g$.



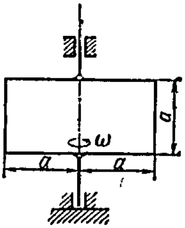
К задаче 41.16



К задаче 41.17

41.17(41.19). Груз A массы M_1, опускаясь вниз по наклонной плоскости D, образующей угол α с горизонтом, приводит в движение посредством нерастяжимой нити, переброшенной через неподвижный блок C, груз B массы M_2. Определить горизонтальную составляющую давления наклонной плоскости D на выступ пола E. Массой нити пренебречь.

Ответ: $N=M_1g\frac{M_1\sin\alpha-M_2}{M_1+M_2}\cos\alpha$.



К задаче 41.19

41.18(41.21). Однородный стержень массы M и длины l вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг неподвижной вертикальной оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его конец. Определить растягивающую силу в поперечном сечении стержня, отстоящем от оси вращения на расстоянии a.

Ответ: $F=M(l^2-a^2)\omega^2/(2l)$.

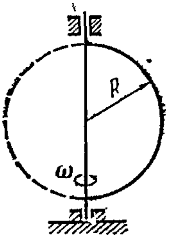
41.19(41.22). Однородная прямоугольная пластинка массы M равномерно вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью ω. Определить силу, разрывающую пластину в направлении, перпендикулярном оси вращения, в сечении, проходящем через ось вращения.

Ответ $Ma\omega^2/4$.

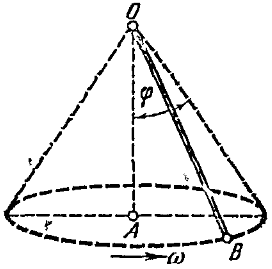
41.20(41.23). Однородный круглый диск радиуса R и массы M вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг своего вертикального диаметра. Определить силу, разрывающую диск по диаметру.

Ответ: $2MR\omega^2/(3\pi)$.

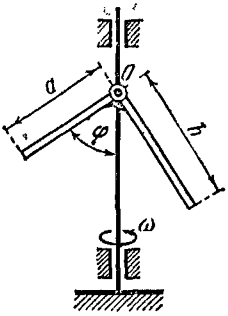
41.21(41.24). Тонкий прямолинейный однородный стержень длины l и массы M вращается с постоянной угловой скоростью ω около неподвижной точки O (шаровой шарнир), описывая коническую поверхность с осью OA и вершиной в точке O. Вычислить угол отклонения стержня от вертикального направления, а также величину N давления стержня на шарнир O.



К задаче 41.20



К задаче 41.21

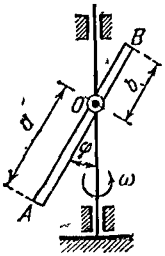


К задаче 41.22

Ответ: $\varphi = \arccos \dfrac{3g}{2l\omega^2}$, $\quad N = \dfrac{1}{2} Ml\omega^2 \sqrt{1 + \dfrac{7g^2}{4l^2\omega^4}}$.

41.22(41.25). В центробежном тахометре два тонких однородных прямолинейных стержня длины a и b жестко соединены под прямым углом, вершина которого O шарнирно соединена с вертикальным валом, вал вращается с постоянной угловой скоростью ω. Найти зависимость между ω и углом отклонения φ, образованным направлением стержня длины a и вертикалью.

Ответ: $\omega^2 = 3g \dfrac{b^2 \cos\varphi - a^2 \sin\varphi}{(b^3 - a^3)\sin 2\varphi}$.



К задаче 41.23

41.23(41.26). Тонкий однородный прямолинейный стержень AB шарнирно соединен с вертикальным валом в точке O. Вал вращается с постоянной скоростью ω. Определить угол отклонения φ стержня от вертикали, если $OA = a$ и $OB = b$.

Ответ: $\cos\varphi = \dfrac{3}{2}\,\dfrac{g}{\omega^2}\,\dfrac{a-b}{a^2 - ab + b^2}$.

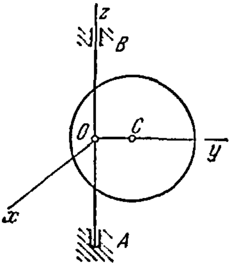
§ 42. Давление вращающегося твердого тела на ось вращения

42.1(42.1). Центр масс махового колеса массы 3000 кг находится на расстоянии 1 мм от горизонтальной оси вала; расстояния подшипников от колеса равны между собой. Найти силы давления на подшипники, когда вал делает 1200 об/мин. Маховик имеет плоскость симметрии, перпендикулярную оси вращения.

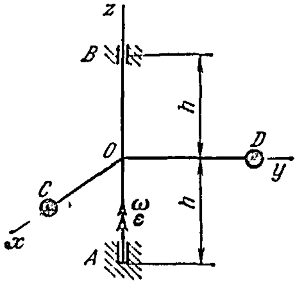
Ответ. Сила давления на каждый из подшипников есть равнодействующая двух сил, из которых одна равна 14,7 кН и направлена по вертикали, а другая равна 23,6 кН и направлена параллельно прямой, соединяющей геометрический центр колеса, находящийся на оси вала, с центром масс колеса.

42.2(42.2). Однородный круглый диск массы M равномерно вращается с угловой скоростью ω вокруг неподвижной оси, расположенной в плоскости диска и отстоящей от его центра масс C на расстоянии $OC = a$. Определить силы динамического давления оси на подпятник A и подшипник B, если $OB = OA$. Оси x и y неизменно связаны с диском.

Ответ. $X_A = X_B = 0$, $Y_A = Y_B = Ma\omega^2/2$.



К задаче 42.2



К задаче 42.4

42.3. Решить предыдущую задачу в предположении, что при наличии сил сопротивления угловая скорость диска убывает по закону $\omega = \omega_0 - \varepsilon_0 t$, где ω_0 и ε_0 — положительные постоянные.

Ответ. $X_A = X_B = -Ma\varepsilon_0/2$, $Y_A = Y_B = Ma\omega_0^2/2$.

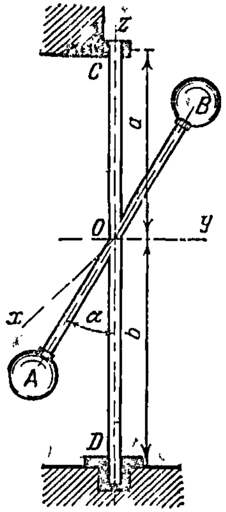
42.4(42.3). К вертикальной оси AB, вращающейся равноускоренно с угловым ускорением ε, прикреплены два груза C и D посредством двух перпендикулярных оси AB и притом взаимно перпендикулярных стержней $OC = OD = r$. Определить силы динамического давления оси AB на подпятник A и подшипник B. Грузы C и D считать материальными точками массы M каждый. Массами стержней пренебречь. В начальный момент система находилась в покое. Оси x и y неизменно связаны со стержнями.

Ответ: $X_A = X_B = \frac{M}{2} r\varepsilon(\varepsilon t^2 + 1)$, $\quad Y_A = Y_B = \frac{M}{2} r\varepsilon(\varepsilon t^2 - 1)$.

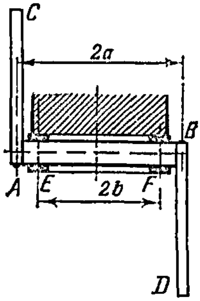
42.5(42.4). Стержень AB длины $2l$, на концах которого находятся грузы равной массы M, вращается равномерно с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси Oz, проходящей через середину O длины стержня. Расстояние точки O от подшипника C равно a, от подпятника D равно b. Угол между стержнем AB и осью Oz сохраняет постоянную величину α. Пренебрегая массой стержня и размерами грузов, определить проекции сил давления на подшипник C и подпятник D в тот момент, когда стержень находится в плоскости Oyz.

Ответ: $X_C = X_D = 0$, $Y_C = -Y_D = \frac{Ml^2\omega^2 \sin 2\alpha}{(a+b)}$, $Z_D = -2Mg$.

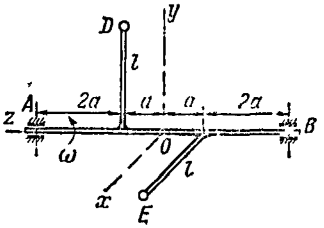
42.6(42.5). На концы оси AB надеты два одинаковых кривошипа AC и BD длины l и массы M_1 каждый, заклиненные под углом 180° относительно друг друга. Ось AB длины $2a$ и массы M_2 вращается с постоянной угловой скоростью ω в подшипниках E и F, расположенных симметрично на расстоянии $2b$ друг от друга. Определить силы давления N_E и N_F на подшипники в тот момент, когда кривошип AC направлен вертикально вверх. Массу каждого кривошипа считать равномерно распределенной вдоль его оси.



К задаче 42.5



К задаче 42.6



К задаче 42.7

Ответ. Сила давления $N_E = \frac{1}{2}M_2g + M_1g - \frac{M_1al\omega^2}{2b}$ при $N_E > 0$ направлена по вертикали вниз, при $N_E < 0$ — вверх.

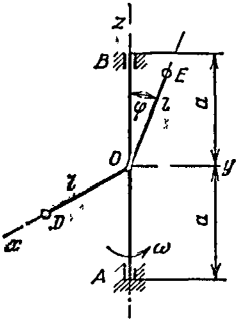
Сила давления $N_F = \frac{1}{2}M_2g + M_1g + \frac{M_1al\omega^2}{2b}$ направлена по вертикали вниз.

42.7(42.6). К горизонтальному валу AB, вращающемуся с постоянной угловой скоростью ω, прикреплены два равных, перпендикулярных ему стержня длины l, лежащих во взаимно перпендикулярных плоскостях (см. рисунок). На концах стержней расположены шары D и E массы m каждый. Определить силы динамического давления вала на опоры A и B. Шары считать материальными точками; массами стержней пренебречь.

Ответ: $N_A = N_B = \frac{\sqrt{5}}{3}ml\omega^2$.

42.8(42.7). К вертикальному валу AB, вращающемуся с постоянной угловой скоростью ω, жестко прикреплены два стержня.

Стержень OE образует с валом угол φ, стержень OD перпендикулярен плоскости, содержащей вал AB и стержень OE. Даны размеры: $OE = OD = l$, $AB = 2a$. К концам стержней прикреплены два шара E и D массы m каждый. Определить силы динамического давления вала на опоры A и B. Шары D и E считать точечными массами; массами стержней пренебречь.



К задаче 42.8

Ответ: $X_A = X_B = \dfrac{ml\omega^2}{2}$,

$$Y_A = \frac{ml\omega^2 (a - l\cos\varphi)\sin\varphi}{2a},$$

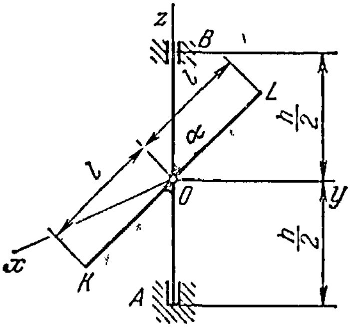
$$Y_B = \frac{ml\omega^2 (a + l\cos\varphi)\sin\varphi}{2a}.$$

42.9(42.8). Использовав условие задачи 34.1, определить силы динамического давления коленчатого вала на подшипники K и L. Вал вращается равномерно с угловой скоростью ω. При решении можно воспользоваться ответами к задачам 34.1 и 34.23.

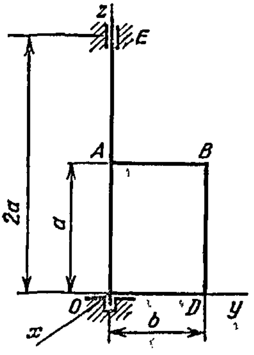
Ответ: $X_K = -X_L = \dfrac{3}{2} md \dfrac{a+b}{4a+3b}\omega^2$,

$$Y_K = -Y_L = \frac{\sqrt{3}}{2} md \frac{a+b}{4a+3b}\omega^2.$$

42.10(42.9). Однородный стержень KL, прикрепленный в центре под углом α к вертикальной оси AB, вращается равноускоренно вокруг этой оси с угловым ускорением ε. Определить силы динамического давления оси AB на подпятник A и подшипник B, если: M — масса стержня, $2l$ — его длина, $OA = OB = h/2$, $OK = OL = l$. В начальный момент система находилась в покое.



К задаче 42.10



К задаче 42.11

Ответ: $X_B = -X_A = \dfrac{Ml^2}{6h}\varepsilon\sin 2\alpha$, $\quad Y_B = -Y_A = \dfrac{Ml^2}{6h}\varepsilon^2 t^2 \sin 2\alpha$

42.11. Однородная прямоугольная пластинка $OABD$ массы M со сторонами a и b, прикрепленная стороной OA к валу OE, вращается с постоянной угловой скоростью ω. Расстояние между опорами $OE = 2a$. Вычислить боковые силы динамического давления вала на опоры O и E.

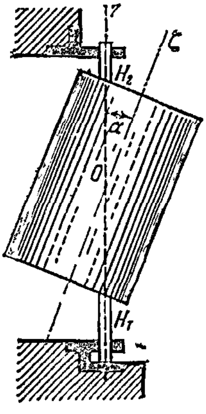
Ответ: $N_{Ox} = N_{Ex} = 0$, $N_{Oy} = \frac{3}{8} Mb\omega^2$, $N_{Ey} = \frac{1}{8} Mb\omega^2$.

42.12(42.10). Прямой однородный круглый цилиндр массы M, длины $2l$ и радиуса r вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси Oz, проходящей через центр масс O цилиндра, угол между осью цилиндра $O\zeta$ и осью Oz сохраняет при этом постоянную величину α. Расстояние H_1H_2 между подпятником и подшипником равно h. Определить боковые силы давления N_1 на подпятник и N_2 на подшипник.

Ответ: Давления N_1 и N_2 имеют одинаковую величину

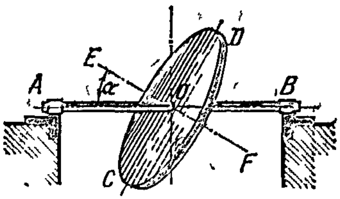
$$M \frac{\omega^2 \sin 2\alpha}{2h} \left(\frac{1}{3} l^2 - \frac{1}{4} r^2 \right)$$

и противоположны по направлению.

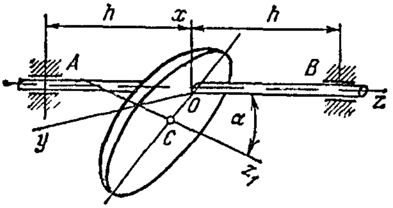


К задаче 42.12

42.13(42.11). Вычислить силы давления в подшипниках A и B при вращении вокруг оси AB однородного тонкого круглого диска CD паровой турбины, предполагая, что ось AB проходит через центр O диска, но вследствие неправильного рассверливания втулки составляет с перпендикуляром к плоскости диска угол $AOE = \alpha = 0{,}02$ рад. Дано. масса диска 3,27 кг, радиус его 20 см, угловая скорость соответствует 30 000 об/мин, расстояние $AO = 50$ см, $OB = 30$ см, ось AB считать абсолютно твердой и принять $\sin 2\alpha = 2\alpha$.



К задаче 42.13



К задаче 42.14

Ответ. Силы давления от веса диска: 12,1 Н на подшипник A и 20,0 Н на подшипник B, силы давления на подшипники, вызываемые вращением диска, имеют одинаковую величину 8,06 кН и противоположные направления.

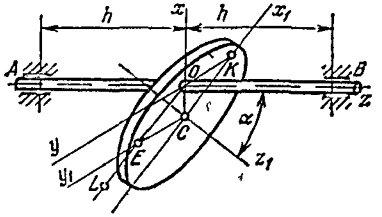
42.14. В результате неточной сборки круглого диска паровой турбины плоскость диска образует с осью AB угол α, а центр масс C диска не лежит на этой оси. Эксцентриситет $OC = a$. Найти боковые силы динамического давления на подшипники A и B, если масса диска равна M, радиус его R, а $AO = OB = h$, угловая скорость вращения диска постоянна и равна ω.

Указание. Воспользоваться ответом к задаче 34.27.

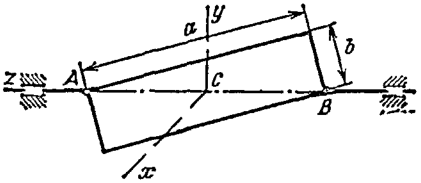
Ответ: $Y_A = Y_B = 0$, $X_A = -\frac{M}{2}\left[\left(\frac{R^2}{4}+a^2\right)\frac{\sin 2\alpha}{2h}+a\cos\alpha\right]\omega^2$,

$$X_B = \frac{M}{2}\left[\left(\frac{R^2}{4}+a^2\right)\frac{\sin 2\alpha}{2h}-a\cos\alpha\right]\omega^2.$$

42.15. Однородный круглый диск массы M и радиуса R насажен на ось AB, проходящую через точку O диска и составляющую с его осью симметрии Cz_1 угол α. OL — проекция оси z, совмещенной с осью AB, на плоскость диска, причем $OE = a$, $OK = b$. Вычислить боковые силы динамического давления на подшипники A и B, если диск вращается с постоянной угловой скоростью ω, а $AO = OB = h$.



К задаче 42.15



К задаче 42.16

Указание. Воспользоваться ответом к задаче 34.28.

Ответ. $X_A = -\frac{1}{2}Ma\omega^2\cos\alpha - \frac{M}{4h}\left(\frac{1}{4}R^2+a^2\right)\omega^2\sin 2\alpha$,

$$X_B = -\frac{1}{2}Ma\omega^2\cos\alpha + \frac{M}{4h}\left(\frac{1}{4}R^2+a^2\right)\omega^2\sin 2\alpha,$$

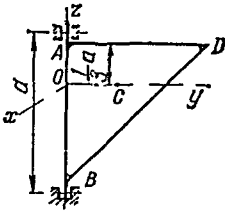
$$Y_A = -\frac{Mb}{2}\left(1+\frac{a}{h}\sin\alpha\right)\omega^2,$$

$$Y_B = -\frac{Mb}{2}\left(1-\frac{a}{h}\sin\alpha\right)\omega^2.$$

42.16(42.12). Однородная прямоугольная пластинка массы M равномерно вращается вокруг своей диагонали AB с угловой скоростью ω. Определить силы динамического давления пластинки на опоры A и B, если длины сторон равны a и b.

Ответ: $X_A = 0$, $Y_A = \frac{-Mab\omega^2(a^2-b^2)}{12(a^2+b^2)^{3/2}}$,

$$X_B = 0,\quad Y_B = \frac{Mab\omega^2(a^2-b^2)}{12(a^2+b^2)^{3/2}}.$$



К задаче 42.17

42.17(42.13). С какой угловой скоростью должна вращаться вокруг катета $AB = a$ однородная пластинка, имеющая форму равнобедренного прямоугольного треугольника ABD, чтобы сила бокового давления на нижнюю опору B равнялась нулю? Расстояние между опорами считать равным длине катета AB.

Ответ: $\omega = 2\sqrt{g/a}$.

42.18(42.14). Вращающаяся часть подъемного крана состоит из стрелы CD длины L и массы M_1, противовеса E и груза K массы M_2 каждый (См. рисунок к задаче 34.31.) При включении постоянного тормозящего момента кран, вращаясь до этого с угловой скоростью, соответствующей $n = 1{,}5$ об/мин, останавливается через 2 с.

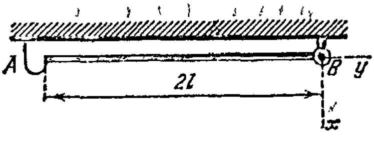
Рассматривая стрелу как однородную тонкую балку, а противовес с грузом как точечные массы, определить динамические реакции опор A и B крана в конце его торможения. Расстояние между опорами крана $AB = 3$ м, $M_2 = 5$ т, $M_1 = 8$ т, $\alpha = 45°$, $L = 30$ м, $l = 10$ м, центр масс всей системы находится на оси вращения; отклонением груза от плоскости крана пренебречь. Оси x, y связаны с краном. Стрела CD находится в плоскости yz.

Указание. Воспользоваться ответом к задаче 34.31 (положив $M_2 = M_3$).

Ответ. $Y_A = -Y_B = 0$, $X_B = -X_A \cong 60{,}8$ кН.

§ 43. Смешанные задачи

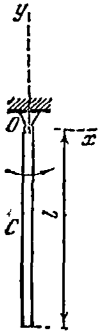
43.1(43.1). *Однородная тяжелая балка AB длины $2l$ при закрепленных концах находится в горизонтальном положении.* В некоторый момент конец A освобождается, и балка начинает падать, вращаясь вокруг горизонтальной оси, проходящей через конец B, в момент, когда балка становится вертикальной, освобождается и конец B. Определить в последующем движении балки траекторию ее центра масс и угловую скорость ω.



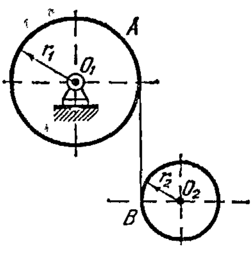
К задаче 43.1

Ответ. 1) Парабола $y^2 = 3lx - 3l^2$, 2) $\omega = \sqrt{3g/(2l)}$.

43.2(43.2). Тяжелый однородный стержень длины l подвешен своим верхним концом на горизонтальной оси O. Стержню, находившемуся в вертикальном положении, была сообщена угловая скорость $\omega_0 = 3\sqrt{g/l}$. Совершив полоборота, он отделяется от оси O. Определить в последующем движении стержня траекторию его центра масс и угловую скорость вращения ω.



К задаче 43.2



К задаче 43.3

Ответ: 1) Парабола $y_C = \frac{l}{2} - \frac{2}{3l}x_C^2$; 2) $\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}}$

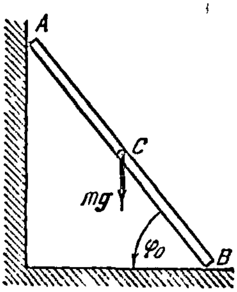
43.3(43.4). *Два однородных круглых цилиндра A и B*, массы которых соответственно равны M_1 и M_2, а радиусы оснований r_1 и r_2, обмотаны двумя гибкими нитями, витки которых расположены симметрично относительно средних плоскостей, параллельных основаниям цилиндров; оси цилиндров горизонтальны, причем образующие их перпендикулярны линиям наибольших скатов. Ось цилиндра A неподвижна; цилиндр B падает из состояния покоя под действием силы тяжести

Определить в момент t после начала движения, предполагая, что в этот момент нити еще остаются намотанными на оба цилиндра: 1) угловые скорости ω_1 и ω_2 цилиндров, 2) пройденный центром масс цилиндра B путь s и 3) натяжение T нитей.

Ответ: 1) $\omega_1 = \dfrac{2gM_2}{r_1(3M_1+2M_2)}t$, $\omega_2 = \dfrac{2gM_1}{r_2(3M_1+2M_2)}t$;

2) $s = \dfrac{g(M_1+M_2)}{3M_1+2M_2}t^2$; 3) $T = \dfrac{M_1M_2g}{(3M_1+2M_2)}$.

43.4(43.5). Однородный стержень AB длины a поставлен в вертикальной плоскости под углом φ_0 к горизонту так, что концом A он опирается на гладкую вертикальную стену, а концом B — на гладкий горизонтальный пол; затем стержню предоставлено падать без начальной скорости 1) Определить угловую скорость и угловое ускорение стержня. 2) Найти, какой угол φ_1 будет составлять стержень с горизонтом в тот момент, когда он отойдет от стены



К задаче 43 4

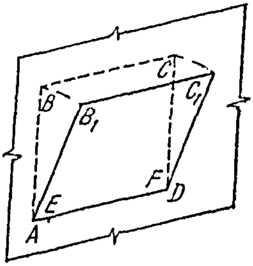
Ответ: 1) $\dot{\varphi} = \sqrt{\dfrac{3g}{a}(\sin\varphi_0 - \sin\varphi)}$, $\ddot{\varphi} = -\dfrac{3g}{2a}\cos\varphi$; 2) $\sin\varphi_1 = \dfrac{2}{3}\sin\varphi_0$.

43.5(43.6). Использовав условие предыдущей задачи, определить угловую скорость φ стержня и скорость нижнего его конца в момент падения стержня на пол

Ответ: $\dot{\varphi} = \sqrt{\dfrac{3g}{a}\left(1 - \dfrac{1}{9}\sin^2\varphi_0\right)\sin\varphi_0}$,

$v_B = \dfrac{1}{3}\sin\varphi_0\sqrt{ga\sin\varphi_0}$

43.6(43.7). Тонкая однородная доска $ABCD$ прямоугольной формы прислонена к вертикальной стене и опирается на два гвоздя E и F без головок; расстояние AD равно FE. В некоторый момент доска начинает падать с ничтожно малой начальной угловой скоростью, вращаясь вокруг прямой AD. Исключая возможность скольжения доски вдоль гвоздей, определить угол $\alpha_1 = \angle BAB_1$, при котором горизонтальная составляющая реакции изменяет направление, и угол α_2 в момент отрыва доски от гвоздей.



К задаче 43 6

Ответ: $\alpha_1 = \arccos\dfrac{2}{3} = 48°11'$, $\alpha_2 = \arccos\dfrac{1}{3} = 70°32'$.

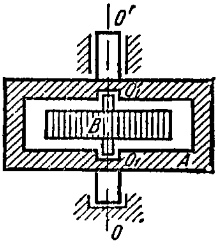
43.7(43.8). Два диска вращаются вокруг одной и той же оси с угловыми скоростями ω_1 и ω_2, моменты инерции дисков относительно этой оси равны J_1 и J_2. Определить потерю кинетической энергии в случае, когда оба диска будут внезапно соединены фрикционной муфтой. Массой ее пренебречь.

Ответ: $\Delta T = \frac{1}{2}\frac{J_1J_2}{J_1+J_2}(\omega_1-\omega_2)^2$.

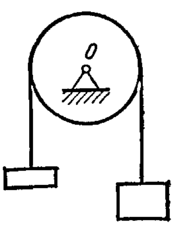
43.8. Тело A вращается без трения относительно оси OO' с угловой скоростью ω_A. В теле A на оси O_1O_1' помещен ротор B, вращающийся в ту же сторону с относительной скоростью ω_B. Оси OO' и O_1O_1' расположены на одной прямой. Моменты инерции тела A и ротора B относительно этой прямой равны J_A и J_B. Пренебрегая потерями, определить работу, которую должен совершить мотор, установленный в теле A, для сообщения ротору B такой угловой скорости, при которой тело A остановится.

Ответ: $A = \frac{1}{2}J_A\left[\omega_A^2\left(1+\frac{J_A}{J_B}\right)+2\omega_A\omega_B\right]$.

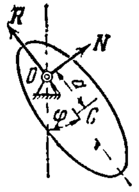
43.9. На шкив, вращающийся без сопротивления вокруг горизонтальной оси O с угловой скоростью ω_0, накинули ремень с двумя грузами на концах. Шкив — однородный диск массы m и радиуса r, масса каждого из грузов $M=2m$. Считая начальные скорости грузов равными нулю, определить, с какой скоростью они будут двигаться после того, как скольжение ремня о шкив прекратится. Найти также работу сил трения ремня о шкив.



К задаче 43.8



К задаче 43.9



К задаче 43.10

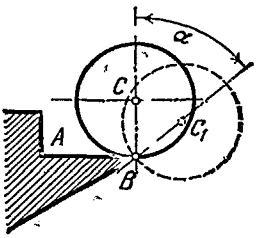
Ответ: $v=\frac{1}{9}\omega_0 r$, $A_{\text{тр}}=\frac{2}{9}m\omega_0^2r^2$.

43.10(43.10). Твердое тело массы M качается вокруг горизонтальной оси O, перпендикулярной плоскости рисунка. Расстояние от оси подвеса до центра масс C равно a; радиус инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости рисунка, равен ρ. В начальный момент тело было отклонено из положения равновесия на угол φ_0 и отпущено без начальной скорости. Определить две составляющие реакции оси R и N, расположенные вдоль направления, проходящего через точку подвеса и центр масс тела, и перпендикулярно ему. Выразить их в зависимости от угла φ отклонения тела от вертикали.

Ответ: $R = Mg\cos\varphi + \frac{2Mga^2}{\rho^2 + a^2}(\cos\varphi - \cos\varphi_0)$,

$N = Mg\frac{\rho^2}{\rho^2 + a^2}\sin\varphi$

43.11(43.11). Тяжелый однородный цилиндр, получив ничтожно малую начальную скорость, скатывается без скольжения с горизонтальной площадки AB, край которой B заострен и параллелен образующей цилиндра. Радиус основания цилиндра r. В момент отделения цилиндра от площадки плоскость, проходящая через ось цилиндра и край B, отклонена от вертикального положения на некоторый угол $CBC_1 = \alpha$. Определить угловую скорость цилиндра в момент отделения его от площадки, а также угол α. Трением качения и сопротивлением воздуха пренебречь.



К задаче 43.11

Ответ: $\omega = 2\sqrt{\frac{g}{7r}}$, $\alpha = \arccos\frac{4}{7} = 55{,}1^\circ$.

43.12. Автомашина для шлифовки льда движется прямолинейно по горизонтальной плоскости катка. Положение центра масс C указано на рисунке к задаче 38.12. В момент выключения мотора машина имела скорость v. Найти путь, пройденный машиной до остановки, если $f_к$ — коэффициент трения качения между колесами автомашины и льдом, а f — коэффициент трения скольжения между шлифующей кромкой A и льдом. Массой колес радиуса r, катящихся без скольжения, пренебречь.

Ответ: $s = \frac{v^2}{2g}\frac{3r}{2fr + f_к}$.

43.13(43.12). На боковой поверхности круглого цилиндра с вертикальной осью, вокруг которой он может вращаться без трения, вырезан гладкий винтовой желоб с углом подъема α. В начальный момент цилиндр находится в покое, в желоб опускают тяжелый шарик, он падает по желобу без начальной скорости и заставляет цилиндр вращаться. Дано: масса цилиндра M, радиус его R, масса шарика m; расстояние от шарика до оси считаем равным R и момент инерции цилиндра равным $\frac{1}{2}MR^2$. Определить угловую скорость ω, которую цилиндр будет иметь в тот момент, когда шарик опустится на высоту h.

Ответ: $\omega = \frac{2m\cos\alpha}{R}\sqrt{\frac{2gh}{(M + 2m)(M + 2m\sin^2\alpha)}}$.

§ 44. Удар

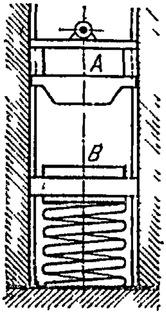
44.1(44.1). Баба A ударного копра падает с высоты 4,905 м и ударяет наковальню B, укрепленную на пружине. Масса бабы 10 кг, и масса наковальни 5 кг. Определить, с какой скоростью начнется движение наковальни после удара, если баба будет двигаться вместе с ней

Ответ 0,51 м/с

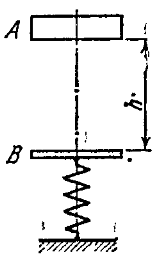
44.2(44.2). Груз A массы M_1 падает без начальной скорости с высоты h на плиту B массы M_2, укрепленную на пружине, которая имеет коэффициент жесткости c. Найти величину s сжатия пружины после удара в предположении, что коэффициент восстановления равен нулю.

Ответ.

$$s=\frac{M_1g}{c}+\sqrt{\frac{M_1^2g^2}{c^2}+2gh\frac{M_1^2}{c(M_1+M_2)}}.$$



К задаче 44.1



К задаче 44.2

44.3(44.3). В приборе для опытного определения коэффициента восстановления шарик из испытуемого материала падает без начальной скорости внутри вертикальной прозрачной трубки с заданной высоты $h_1 = 50$ см на неподвижно закрепленную горизонтальную пластинку из соответствующего материала. Найти коэффициент восстановления, если высота, на которую подскочил шарик после удара, оказалась равной $h_2 = 45$ см

Ответ $k=\sqrt{h_2/h_1}=0{,}95$

44.4(44.4). Упругий шарик падает по вертикали с высоты h на горизонтальную плиту, отскакивает от нее вверх, вновь падает на плиту и т д, продолжая эти движения Найти путь, пройденный шариком до остановки, если коэффициент восстановления при ударе равен k

Ответ: $s=\frac{1+k^2}{1-k^2}h$

44.5. Два тела с массами m_1 и m_2 и коэффициентом восстановления k движутся поступательно по одному и тому же направлению Каковы должны быть их скорости v_1 и v_2, чтобы после удара догоняющее тело m_1 остановилось, а тело m_2 получило бы заданную скорость u_2?

Ответ $v_1=\frac{1+k}{k}\frac{m_2}{m_1+m_2}u_2$, $v_2=\frac{m_1-km_2}{k(m_1+m_2)}u_2$

44.6(44 5). Паровой молот массы 12 т падает со скоростью 5 м/с на наковальню, масса которой вместе с отковываемой деталью равна 250 т. Найти работу A_1, поглощаемую отковываемой деталью, и работу A_2, потерянную на сотрясение фундамента, а также вычислить коэффициент η полезного действия молота, удар неупругий

Ответ $A_1 = 143$ кН·м, $A_2 = 6{,}87$ кН·м, $\eta = 0{,}95$

44.7. Молот массы $m_1 = 10$ кг расплющивает заготовку до нужных размеров за 70 ударов За сколько ударов эту операцию произведет молот массы $m_2 = 100$ кг, если приводной механизм сообщает ему такую же скорость, что и первому молоту. Масса наковальни $M = 200$ кг. Удар считать абсолютно неупругим.

Ответ: 10 ударов.

44.8(44.6). Найти скорости после абсолютного упругого удара двух одинаковых шаров, двигавшихся навстречу друг другу со скоростями v_1 и v_2.

Ответ. Шары после удара обмениваются скоростями.

44.9(44.7). Два одинаковых упругих шара A и B движутся навстречу друг другу. При каком соотношении между скоростями до удара шар A после удара остановится? Коэффициент восстановления при ударе равен k.

Ответ: $\frac{v_A}{v_B} = \frac{1+k}{1-k}$.

44.10. Тело A настигает тело B, имея в 3 раза большую скорость. Каким должно быть соотношение масс этих тел, чтобы после удара тело A остановилось? Удар считать прямым центральным. Коэффициент восстановления $k = 0{,}8$.

Ответ: $m_B/m_A = 5$.

44.11(44.8). Определить отношение масс m_1 и m_2 двух шаров в следующих двух случаях: 1) первый шар находится в покое, происходит центральный удар, после которого второй шар остается в покое, 2) шары встречаются с равными и противоположными скоростями, после центрального удара второй шар остается в покое. Коэффициент восстановления равен k.

Ответ. 1) $\frac{m_2}{m_1} = k$, 2) $\frac{m_2}{m_1} = 1 + 2k$.

44.12(44.9). Три абсолютно упругих шара с массами m_1, m_2 и m_3 лежат в гладком желобе на некотором расстоянии друг от друга. Первый шар, пущенный с некоторой начальной скоростью, ударяет во второй, покоящийся шар, который, начав двигаться, в свою очередь ударяет в третий, покоящийся шар. При какой величине массы m_2 второго шара третий шар получит наибольшую скорость?

Ответ: $m_2 = \sqrt{m_1 m_3}$.

44.13(44.10). Шар массы m_1, движущийся поступательно со скоростью v_1, встречает покоящийся шар массы m_2, так что скорость его образует при ударе угол α с линией, соединяющей центры шаров. Определить: 1) скорость первого шара после удара, считая удар абсолютно неупругим, 2) скорость каждого из шаров после удара в предположении, что удар упругий с коэффициентом восстановления k.

Ответ: 1) $u_1 = v_1 \sqrt{\sin^2\alpha + \left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)^2 \cos^2\alpha}$;

2) $u_1 = v_1 \sqrt{\sin^2\alpha + \left(\frac{m_1 - km_2}{m_1+m_2}\right)^2 \cos^2\alpha}$, $u_2 = v_1 \frac{m_1(1+k)\cos\alpha}{m_1+m_2}$.

44.14(44.11). Абсолютно упругий шар, центр которого движется прямолинейно со скоростью v, встречает под углом α гладкую вертикальную плоскость. Определить скорость шара после удара.

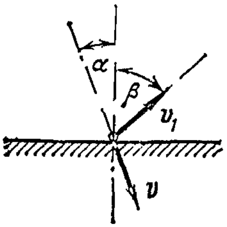
Ответ. Угол отражения равен углу падения, скорости до и после удара по модулю равны.

44.15(44.12). Стальной шарик падает на горизонтальную стальную плиту под углом 45° и отскакивает под углом 60° к вертикали. Определить коэффициент восстановления при ударе.

Ответ. $k = 0{,}58$.

44.16(44.13). Шарик падает наклонно со скоростью v на неподвижную горизонтальную плоскость и отскакивает от плоскости со скоростью $v_1 = v\sqrt{2}/2$. Определить угол падения α и угол отражения β, если коэффициент восстановления при ударе $k = \sqrt{3}/3$.

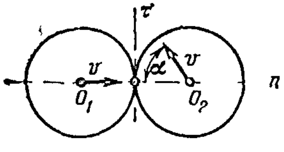
Ответ. $\alpha = \pi/6$, $\beta = \pi/4$.



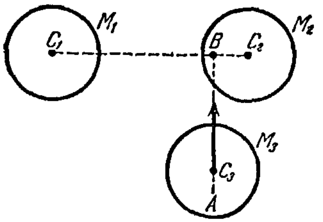
К задаче 44.16

44.17(44.14). Два одинаковых абсолютно упругих шара, двигаясь поступательно, соударяются с равными по модулю скоростями v. Скорость левого шара до удара направлена по линии центров направо, а скорость правого шара до удара образует с линией центров угол α (см. рисунок). Найти скорости шаров после удара.

Ответ. $u_{1n} = -v\cos\alpha$, $u_{1\tau} = 0$, $u_{2n} = v$, $u_{2\tau} = v\sin\alpha$. Ось n направлена по линии центров вправо, ось τ — вверх.



К задаче 44.17



К задаче 44.18

44.18(44.15). Имеются три одинаковых шара M_1, M_2, M_3 радиусов R, расстояние между центрами $C_1C_2 = a$. Определить, на какой прямой AB, перпендикулярной линии C_1C_2, должен находиться центр C_3 третьего шара для того, чтобы, получив некоторую скорость по направлению AB, этот шар после удара о шар M_2 нанес центральный удар шару M_1; шары абсолютно упруги и движутся поступательно.

Ответ. Расстояние прямой AB от центра C_2 равно $BC_2 = 4R^2/a$.

44.19(44.16). Для укрепления грунта под фундаментом здания сваи массы $M = 50$ кг вбивались копром, боек которого массы $M_1 = 450$ кг падал без начальной скорости с высоты $h = 2$ м; при последних десяти ударах свая углубилась на $\delta = 5$ см. Определить среднее сопротивление грунта при вбивании сваи. Удар считать неупругим.

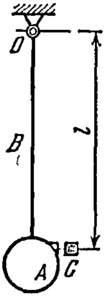
Ответ. $S = 159$ кН.

44.20(44.17). Два шара с массами m_1 и m_2 висят на параллельных нитях длин l_1 и l_2 так, что центры их находятся на одной высоте Первый шар был отклонен от вертикали на угол α_1 и затем отпущен без начальной скорости Определить угол предельного отклонения α_2 второго шара, если коэффициент восстановления равен k

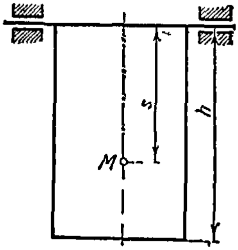
Ответ: $\sin\frac{\alpha_2}{2}=\frac{m_1(1+k)}{m_1+m_2}\sqrt{\frac{l_1}{l_2}}\sin\frac{\alpha_1}{2}$.

44.21(44.18). Маятник ударной машины состоит из стального диска A радиуса 10 см и толщины 5 см и из стального круглого стержня B диаметром 2 см и длины 90 см. На каком расстоянии l от горизонтальной плоскости, в которой лежит ось вращения O, должен быть помещен разбиваемый машиной брусок C, чтобы ось не испытывала удара? Ударный импульс лежит в плоскости рисунка и направлен горизонтально

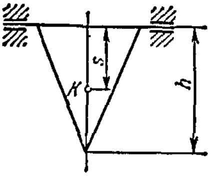
Ответ. $l=97{,}5$ см.



К задаче 44 21



К задаче 44 22



К задаче 44 23

44.22(44.19). Определить положение центра удара прямоугольной мишени для стрельбы Высота мишени равна h

Ответ. $s=2h/3$

44.23(44.20). Определить положение центра удара K треугольной мишени для стрельбы. Высота мишени равна h.

Ответ: $s=h/2$.

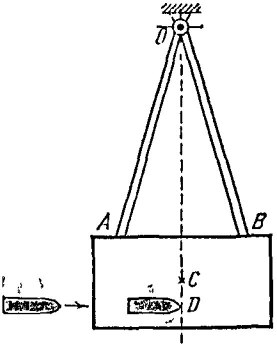
44.24(44.21). Два шкива вращаются в одной плоскости вокруг своих осей с угловыми скоростями ω_{10} и ω_{20} Определить угловые скорости шкивов ω_1 и ω_2 после того, как на них будет накинут ремень, считая шкивы круглыми дисками одинаковой плотности с радиусами R_1 и R_2 и пренебрегая скольжением и массой ремня.

Ответ: $\omega_1=\frac{R_1^3\omega_{10}+R_2^3\omega_{20}}{R_1(R_1^2+R_2^2)}$, $\omega_2=\frac{R_1^3\omega_{10}+R_2^3\omega_{20}}{R_2(R_1^2+R_2^2)}$.

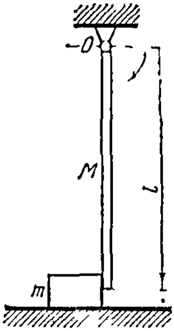
44.25(44.22). Баллистический маятник, употребляющийся для определения скорости снаряда, состоит из цилиндра AB, подвешенного к горизонтальной оси O; цилиндр открыт с одного конца A и наполнен песком; снаряд, влетающий в цилиндр, производит вращение маятника вокруг оси O на некоторый угол. Дано: M — масса маятника; $OC = h$ — расстояние от его центра масс C до оси O; ρ — радиус инерции относительно оси O, m — масса снаряда, $OD = a$ — расстояние от линии действия ударного импульса до оси; α — угол отклонения маятника. Определить скорость снаряда, предполагая, что ось маятника O не испытывает удара, причем $ah = \rho^2$

Ответ: $v = \frac{2(Mh + ma)}{m}\sqrt{\frac{g}{a}}\sin\frac{\alpha}{2}$

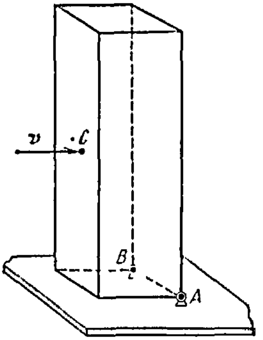
44.26(44.23). Однородный стержень массы M и длины l, прикрепленный своим верхним концом к цилиндрическому шарниру O, падает без начальной скорости из горизонтального положения.



К задаче 44.25



К задаче 44.26



К задаче 44.27

В вертикальном положении он ударяет груз массы m, сообщая ему движение по горизонтальной шероховатой плоскости. Коэффициент трения скольжения f. Определить путь, пройденный грузом, считая удар неупругим.

Ответ: $s = \frac{3l}{2f}\frac{M^2}{(M + 3m)^2}$.

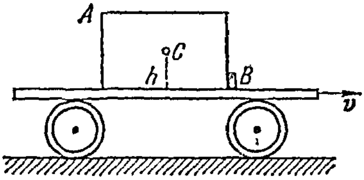
44.27(44.24). Однородная прямая призма с квадратным основанием стоит на горизонтальной плоскости и может вращаться вокруг ребра AB, лежащего в этой плоскости. Ребро основания призмы равно a, высота ее $3a$, масса $3m$. В середину C боковой грани, противолежащей ребру AB, ударяет шар массы m с горизонтальной скоростью v.

Предполагая, что удар неупругий и что масса шара сосредоточена в его центре, который после удара остается в точке C, определить наименьшую величину скорости v, при которой призма опрокинется.

Ответ: $v = {}^1\!/_3\sqrt{53ga}$.

44.28(44.25). Платформа с помещенным на ней призматическим грузом AB катится по горизонтальным рельсам со скоростью v. На платформе имеется выступ, в который упирается ребро B груза, препятствуя последнему скользить по платформе вперед, но не препятствуя вращению его около ребра B. Дано h — высота центра масс груза над платформой, ρ — радиус инерции груза относительно ребра B. Определить угловую скорость ω вращения груза около ребра B в момент мгновенной остановки платформы.

Ответ. $\omega = hv/\rho^2$.



К задаче 44.28

44.29(44.26). Полагая при условиях предыдущей задачи, что груз представляет собой однородный прямоугольный параллелепипед, длина ребра которого вдоль платформы равна 4 м, а высота 3 м, найти, при какой скорости произойдет опрокидывание груза.

Ответ. $v = 30{,}7$ км/ч

§ 45. Динамика точки и системы переменной массы (переменного состава)

45.1(45.1). Составить уравнение движения маятника переменной массы в среде, сопротивление которой пропорционально скорости Масса маятника изменяется по заданному закону $m = m(t)$ путем отделения частиц с относительной скоростью, равной нулю. Длина нити маятника l. На маятник действует также сила сопротивления, пропорциональная его угловой скорости: $R = -\beta\varphi$

Ответ: $\varphi + \frac{\beta}{m(t)\,l}\varphi + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0$.

45.2(45.2). Составить дифференциальное уравнение восходящего движения ракеты Эффективную скорость v_e истечения газов *) считать постоянной Масса ракеты изменяется по закону $m = m_0 f(t)$ (закон сгорания) Сила сопротивления воздуха является заданной функцией скорости и положения ракеты: $R(x, x)$.

Ответ: $x = -g - \frac{\dot f(t)}{f(t)} v_e - \frac{R(x,\ x)}{m_0 f(t)}$.

45.3(45.3). Проинтегрировать уравнение движения предыдущей задачи при $m = m_0(1 - \alpha t)$ и $R = 0$ Начальная скорость ракеты у поверхности Земли равна нулю. На какой высоте будет находиться ракета в моменты $t = 10$, 30; 50 с при $v_e = 2000$ м/с и $\alpha = 1/100$ с$^{-1}$?

Ответ: $x(t) = \frac{v_e}{\alpha}[(1 - \alpha t)\ln(1 - \alpha t) + \alpha t] - \frac{gt^2}{2}$, $x(10) = 0{,}54$ км, $x(30) = 5{,}65$ км, $x(50) = 18{,}4$ км.

45.4(45.4). Ракета начальной массы m_0 поднимается вертикально вверх в однородном поле силы тяжести с постоянным ускорением ng (g — ускорение земного тяготения). Пренебрегая сопро-

---

*) Тяга реактивного двигателя определяется формулой $P_д = -\frac{dm}{dt}v_e$, где v_e — эффективная скорость истечения.

тивлением атмосферы и считая эффективную скорость v_e истечения газов постоянной, определить 1) закон изменения массы ракеты, 2) закон изменения массы ракеты при отсутствии поля тяготения

Ответ: 1) $m = m_0 \exp\left(-\frac{n+1}{v_e} gt\right)$, 2) $m = m_0 \exp\left(-\frac{ng}{v_e} t\right)$.

45.5(45.5). Масса ракеты, описанной в задаче 45 2, изменяется до $t = t_0$ по закону $m = m_0 e^{-\alpha t}$ Пренебрегая силой сопротивления, найти движение ракеты и, считая, что к моменту времени t_0 весь заряд практически сгорел, определить максимальную высоту подъема ракеты В начальный момент ракета имела скорость, равную нулю, и находилась на земле

Ответ $H = \frac{\alpha v_e}{2g}(\alpha v_e - g) t_0^2$, где v_e — эффективная скорость истечения газов из ракеты

45.6(45.6). При условиях предыдущей задачи определить значение α, отвечающее максимальной возможной высоте подъема ракеты $H_{\max}$, и вычислить $H_{\max}$ (величину $\mu = \alpha t_0 = \ln(m_0/m_1)$ необходимо считать постоянной, m_1 — масса ракеты в момент t_0).

Ответ. $\alpha = \infty$ (мгновенное сгорание), $H_{\max} = \mu^2 v_e^2/(2g)$

45.7(45.7). При условиях задач 45 5 и 45 6, задавшись коэффициентом перегрузки $k = \alpha v_e/g$, определить высоту подъема H ракеты в зависимости от $H_{\max}$

Ответ. $H = H_{\max}(k-1)/k$

45.8(45.8). Ракета стартует с Луны вертикально к ее поверхности. Эффективная скорость истечения $v_e = 2000$ м/с Число Циолковского $z = 5$ *). Определить, какое должно быть время сгорания топлива, чтобы ракета достигла скорости $v = 3000$ м/с (принять, что ускорение силы тяжести вблизи Луны постоянно и равно 1,62 м/с^2)

Ответ ≈ 2 мин 4 с

45.9(45.9). Ракета движется в однородном поле силы тяжести вверх с постоянным ускорением w Пренебрегая сопротивлением атмосферы и считая эффективную скорость v_e истечения газов постоянной, определить время T, за которое масса ракеты уменьшится в два раза

Ответ. $T = v_e \ln 2/(w+g)$.

45.10(45.10). Эффективная скорость истечения газов из ракеты $v_e = 2{,}4$ км/с Какой процент должен составлять вес топлива от стартового веса ракеты, чтобы ракета, движущаяся вне поля тяготения и вне атмосферы, приобрела скорость 9 км/с?

Ответ Примерно 98%

45.11(45.11). Ракета движется поступательно при отсутствии тяготения и сопротивления среды. Эффективная скорость истечения газов $v_e = 2400$ м/с Определить число Циолковского, если в

---

*) Числом Циолковского называется отношение стартовой массы ракеты к массе ракеты без топлива

момент полного сгорания топлива скорость ракеты будет равна 4300 м/с

Ответ. $z \approx 6$

45.12(45.12). Тело переменной массы, имея начальную скорость, равную нулю, движется с постоянным ускорением w по горизонтальным направляющим. Эффективная скорость истечения газов v_e постоянна. Определить, пренебрегая сопротивлением, путь, пройденный телом до того момента, когда его масса уменьшится в k раз.

Ответ: $s = v_e^2 (\ln k)^2/(2w)$.

45.13(45.13). Решить предыдущую задачу, предположив, что на тело действует сила трения скольжения

Ответ: $s = \dfrac{w v_e^2}{2(w + fg)^2} (\ln k)^2$, где f — коэффициент трения скольжения

45.14(45.14). Тело переменной массы движется по специальным направляющим, проложенным вдоль экватора. Касательное ускорение $w_\tau = a$ постоянно. Не учитывая сопротивление движению, определить, во сколько раз уменьшится масса тела, когда оно сделает один оборот вокруг Земли, если эффективная скорость истечения газов $v_e = \mathrm{const}$. Каково должно быть ускорение a, чтобы после одного оборота тело приобрело первую космическую скорость? Радиус Земли R.

Ответ: В $\exp\left(2\sqrt{\pi R a}/v_e\right)$ раз, $a = g/(4\pi)$

45.15(45.15). Определить в предыдущей задаче массу топлива, сгоревшую к моменту, когда давление тела на направляющие будет равно нулю

Ответ: $m_\tau = m_0 \left(1 - e^{-\frac{\sqrt{gR}}{v_e}}\right)$.

45.16(45.16). Тело скользит по горизонтальным рельсам. Истечение газа происходит вертикально вниз с постоянной эффективной скоростью v_e. Начальная скорость тела равна v_0. Найти закон изменения скорости тела и закон его движения, если изменение массы происходит по закону $m = m_0 - at$. Коэффициент трения скольжения равен f.

Ответ: $v = v_0 - f\left[gt - v_e \ln \dfrac{m_0}{m_0 - at}\right]$, $s = v_0 t - f\left\{\dfrac{gt^2}{2} - \right.$

$\left. - v_e\left[t \ln m_0 + \dfrac{m_0 - at}{a}\left(\ln(m_0 - at) - 1 - \dfrac{m_0}{a}(\ln m_0 - 1)\right)\right]\right\}$.

45.17(45.17). Решить предыдущую задачу, если изменение топлива будет происходить по закону $m = m_0 e^{-\alpha t}$. Определить, при каком α тело будет двигаться с постоянной скоростью v_0

Ответ: $v = v_0 - f(g - \alpha v_e)t$, $s = v_0 t - f(g - \alpha v_e)\dfrac{t^2}{2}$, $\alpha = \dfrac{g}{v_e}$.

45.18(45.18). Какой путь пройдет ракета на прямолинейном активном участке в пустоте и при отсутствии сил тяготения за время разгона от нулевой начальной скорости до скорости, равной эффективной скорости истечения продуктов сгорания v_e, если известна начальная масса ракеты m_0 и секундный расход β?

Ответ: $s=\frac{v_e m_0}{\beta}\frac{e-2}{e}$, где e — неперово число

45.19(45.19). Ракета движется прямолинейно вне поля тяготения и при отсутствии сопротивления. Найти работу силы тяги к моменту, когда сгорит все топливо. Начальная масса ракеты m_0, конечная — m_1. Эффективная скорость истечения v_e постоянна.

Ответ: $A=m_1v_e^2(z-1-\ln z)$, $z=m_0/m_1$

45.20(45.20). При каком отношении z начальной m_0 и конечной m_1 масс ракеты, движущейся прямолинейно в пустоте и при отсутствии сил тяготения, ее механический к. п. д., определяемый как отношение кинетической энергии ракеты после выгорания топлива к затраченной энергии, имеет наибольшее значение?

Ответ: z — корень уравнения $\ln z=\frac{2(z-1)}{1+z}$

45.21(45.21). Самолет, имеющий массу m_0, приземляется со скоростью v_0 на полярный аэродром. Вследствие обледенения масса самолета при движении после посадки увеличивается согласно формуле $m=m_0+at$, где $a=\text{const}$. Сопротивление движению самолета по аэродрому пропорционально его весу (коэффициент пропорциональности f). Определить промежуток времени до остановки самолета с учетом (T) и без учета (T_1) изменения его массы. Найти закон изменения скорости с течением времени.

Ответ: $T=\frac{m_0}{a}\left(\sqrt{1+\frac{2av_0}{fgm_0}}-1\right)$, $T_1=\frac{v_0}{fg}$,

$$v=\frac{2m_0v_0-fg(2m_0+at)t}{2(m_0+at)}.$$

45.22(45.22). Эффективные скорости истечения первой и второй ступени у двухступенчатой ракеты соответственно равны $v_e^{(1)}=2400$ м/с и $v_e^{(2)}=2600$ м/с. Определить, считая, что движение происходит вне поля тяготения и атмосферы, числа Циолковского для обеспечения конечной скорости $v_1=2400$ м/с первой ступени и конечной скорости $v_2=5400$ м/с второй ступени.

Ответ: $z_1=2{,}72$; $z_2=3{,}17$

45.23(45.23). Считая, что у трехступенчатой ракеты числа Циолковского и эффективные скорости v_e истечения у всех трех ступеней одинаковы, найти число Циолковского при $v_e=2{,}4$ км/с, если после сгорания всего топлива скорость ракеты равна 9 км/с (влиянием поля тяготения и сопротивлением атмосферы пренебречь).

Ответ: $z=3{,}49$.

45.24(45.24). Трехступенчатая ракета движется поступательно при отсутствии тяготения и сопротивления атмосферы. Эффективные скорости истечения и числа Циолковского для всех ступеней одинаковы и соответственно равны $v_e=2500$ м/с, $z=4$. Определить скорости ракеты после сгорания горючего в первой ступени, во второй и в третьей.

Ответ: $v_1=3465$ м/с, $v_2=6930$ м/с, $v_3=10\,395$ м/с.

45.25(45.25). В момент, когда приближающийся к Луне космический корабль находится на расстоянии H от ее поверхности и имеет скорость v_0, направленную к центру Луны, включается тормозной двигатель. Учитывая, что сила тяготения обратно пропорциональна квадрату расстояния от корабля до центра Луны и принимая, что масса корабля изменяется по закону $m = m_0e^{-\alpha t}$ (m_0 — масса ракеты в момент включения тормозного двигателя, α — постоянное число), найти α, при котором корабль совершит мягкую посадку (т. е. будет иметь скорость прилунения, равную нулю). Эффективная скорость истечения газов v_e постоянна. Радиус Луны R, ускорение силы тяжести на Луне $g_л$.

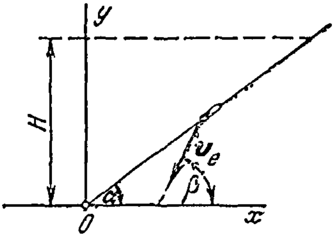
Ответ $\alpha = \frac{v_0^2}{2v_eH} + \frac{g_лR}{v_e(R+H)}$.

45.26(45.26). Найти закон изменения массы ракеты, начавшей движение вертикально вверх с нулевой начальной скоростью, если ее ускорение w постоянно, а сопротивление среды пропорционально квадрату скорости (b — коэффициент пропорциональности). Поле силы тяжести считать однородным. Эффективная скорость истечения газа v_e постоянна.

Ответ:

$$m = \left(m_0 + \frac{2bv_e^2w^2}{(w+g)^3}\right)e^{-\frac{w+g}{v_e}t} - \frac{bw^2}{w+g}t^2 + \frac{2v_ebw^2}{(w+g)^2}t - \frac{2v_e^2bw^2}{(w+g)^3}.$$

45.27(45.27). Ракета перемещается в однородном поле силы тяжести по прямой с постоянным ускорением w. Эта прямая образует угол α с горизонтальной плоскостью, проведенной к поверхности Земли в точке запуска ракеты. Предполагая, что эффективная скорость истечения газов v_e постоянна по величине и направлению, определить, каково должно быть отношение начальной массы ракеты к массе ракеты без топлива (число Циолковского), если к моменту сгорания топлива ракета оказалась на расстоянии H от указанной выше касательной плоскости.



К задаче 45.27

Ответ: $z = e^{\frac{\cos\alpha}{v_e\cos\beta}\sqrt{\frac{2wH}{\sin\alpha}}}$, где β — угол, образуемый скоростью v_e с касательной плоскостью, равный $\beta = \operatorname{arctg}\frac{w\sin\alpha + g}{w\cos\alpha}$.

45.28(45.28). Тело переменной массы движется вверх с постоянным ускорением w по шероховатым прямолинейным направляющим, составляющим угол α с горизонтом. Считая, что поле силы тяжести является однородным, а сопротивление атмосферы движению тела пропорционально первой степени скорости (b — коэффициент сопротивления), найти закон изменения массы тела. Эффективная скорость истечения газа v_e постоянна; коэффициент трения скольжения между телом и направляющими равен f.

Ответ: $m = \left(m_0 - \frac{bwv_e}{w_1^2}\right)e^{-\frac{w_1}{v_e}t} - \frac{bw}{w_1}\left(t - \frac{v_e}{w_1}\right)$, где $w_1 = w + g(\sin\alpha + f\cos\alpha)$, m_0 — начальная масса тела.

45.29(45.29). Аэростат весом Q поднимается вертикально и увлекает за собой сложенный на земле канат. На аэростат действует подъемная сила P, сила тяжести и сила сопротивления, пропорциональная квадрату скорости $R = -\beta\dot{x}^2$. Вес единицы длины каната γ. Составить уравнение движения аэростата

Ответ: $\ddot{x} = -g + \frac{Pg}{Q + \gamma x} - \frac{\beta g + \gamma}{Q + \gamma x}\dot{x}^2$.

45.30(45.30). При условиях предыдущей задачи определить скорость подъема аэростата В начальный момент аэростат неподвижен и находится на высоте H_0

Ответ:
$$\dot{x}^2 = \frac{Pg}{(\beta g + \gamma)}\left[1 - \left(\frac{Q + \gamma H_0}{Q + \gamma x}\right)^{2\left(1 + \beta\frac{g}{\gamma}\right)}\right] - \frac{2g}{2\beta g + 3\gamma}\left[1 - \left(\frac{Q + \gamma H_0}{Q + \gamma x}\right)^{3 + 2\beta\frac{g}{\gamma}}\right](Q + \gamma x).$$

45.31(45.31). Шарообразная водяная капля падает вертикально в атмосфере, насыщенной водяными парами Вследствие конденсации масса капли возрастает пропорционально площади ее поверхности (коэффициент пропорциональности α) Начальный радиус капли r_0, ее начальная скорость v_0, начальная высота h_0. Определить скорость капли и закон изменения ее высоты со временем (сопротивлением движению пренебречь)

Указание Показать, что $dr = \alpha dt$, и перейти к новой независимой переменной r

Ответ:
$$x = h_0 + \frac{v_0 r_0}{2\alpha}\left[1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^2\right] - \frac{g}{8\alpha^2}\left[r^2 - 2r_0^2 + \frac{r_0^4}{r^2}\right],$$
$$v = v_0\frac{r_0^3}{r^3} - \frac{g}{4\alpha}\left[r - \frac{r_0^4}{r^3}\right], \text{ где } r = r_0 + \alpha t.$$

45.32(45.32). Решить предыдущую задачу в предположении, что на каплю кроме силы тяжести действует еще и сила сопротивления, пропорциональная площади максимального поперечного сечения и скорости капли $R = -4\beta\pi r^2 v$ (β — постоянный коэффициент).

Ответ:
$$x = h_0 - \frac{1}{3\beta + 2\alpha}\left[\frac{gr_0^{\frac{1}{\alpha}(4\alpha + 3\beta)}}{4\alpha + 3\beta} + v_0 r_0^{\frac{3}{\alpha}(\beta + \alpha)}\right] \times$$
$$\times\left[r^{-\frac{1}{\alpha}(3\beta + 2\alpha)} - r_0^{-\frac{1}{\alpha}(3\beta + 2\alpha)}\right] - \frac{g(r^2 - r_0^2)}{2\alpha(4\alpha + 3\beta)},$$
$$v = -\frac{gr}{4\alpha + 3\beta} + \left[\frac{gr_0^{\frac{1}{\alpha}(4\alpha + 3\beta)}}{4\alpha + 3\beta} + v_0 r_0^{\frac{3}{\alpha}(\alpha + \beta)}\right]r^{-\frac{3}{\alpha}(\alpha + \beta)},$$
где $r = r_0 + \alpha t$.

45.33(45.33). Свернутая в клубок тяжелая однородная цепь лежит на краю горизонтального стола, причем вначале одно звено цепи неподвижно свешивается со стола Направляя ось x вертикально вниз и принимая, что в начальный момент $x=0$, $\dot{x}=0$, определить движение цепи

Ответ $x=gt^2/6$

45.34(45.34). Цепь сложена на земле и одним концом прикреплена к вагонетке, стоящей на наклонном участке пути, образующем угол α с горизонтом Коэффициент трения цепи о землю f. Вес единицы длины цепи γ, вес вагонетки P. Скорость вагонетки в начальный момент v_0 Определить скорость вагонетки в любой момент времени и выяснить необходимое условие, при котором вагонетка может остановиться

Ответ: $$\frac{x^2}{2}=\frac{P^2v_0^2}{2(P+\gamma x)^2}+\frac{Pg}{3\gamma}\sin\alpha\left[1-\frac{P^2}{(P+\gamma x)^2}\right]+$$
$$+\frac{1}{3}gx\sin\alpha+\frac{fPg}{6\gamma}\left[1-\frac{P^2}{(P+\gamma x)^2}\right]\cos\alpha-\frac{1}{3}fgx\cos\alpha.$$

Остановка может иметь место при выполнении неравенства $f>\operatorname{tg}\alpha$

45.35(45.35). Материальная точка массы m притягивается по закону всемирного тяготения Ньютона к неподвижному центру. Масса центра со временем меняется по закону $M=\frac{M_0}{1+\alpha t}$. Определить движение точки

Указание Перейти к новым координатам с помощью соотношений $\xi=\frac{x}{1+\alpha t}$, $\eta=\frac{y}{1+\alpha t}$ и к приведенному времени $\tau=\frac{1}{\alpha(1+\alpha t)}$.

Ответ. Уравнения движения в координатах ξ, η имеют вид (f — постоянная тяготения)

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2}+f\frac{M_0\xi}{\rho^2}=0,\quad \frac{d^2\eta}{d\tau^2}+f\frac{M_0\eta}{\rho^2}=0,\quad \rho=\sqrt{\xi^2+\eta^2},$$

т. е отвечают обычным уравнениям в случае постоянных масс. Поэтому в зависимости от начальных условий в переменных ξ и η имеют место эллиптические, параболические или гиперболические орбиты

45.36(45.36). Для быстрого сообщения ротору гироскопа необходимого числа оборотов применяется реактивный запуск. В тело ротора вделываются пороховые шашки общей массой m_0, продукты сгорания которых выбрасываются через специальные сопла Принять пороховые шашки за точки, расположенные на расстоянии r от оси вращения ротора Касательная составляющая эффективной скорости истечения продуктов сгорания v_e постоянна.

Считая, что общий расход массы пороха в одну секунду равен q, определить угловую скорость ω ротора к моменту сгорания пороха, если на ротор действует постоянный момент сопротивления, равный M Радиус ротора R. В начальный момент ротор находится в покое.

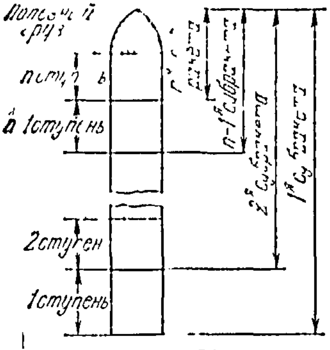
Ответ: $\omega = \frac{Rqv_e - M}{rq}\ln\frac{J_0}{J_p}$, где $J_0 = J_p + m_0r^2$, J_p — момент инерции ротора относительно оси вращения.

45.37(45.37). По данным предыдущей задачи найти угловую скорость ротора после сгорания пороха, если на ротор действует момент сопротивления, пропорциональный его угловой скорости (b — коэффициент пропорциональности).

Ответ: $\omega = \frac{Rv_eq}{b}\left[1 - \left(\frac{J_p}{J_0}\right)^{\frac{b}{rq}}\right]$.

45.38(45.38). Многоступенчатая ракета состоит из полезного груза и ступеней. Каждая ступень после израсходования топлива отделяется от остальной конструкции. Под субракетой понимается сочетание работающей ступени, всех неработающих ступеней и полезного груза, причем для данной субракеты все неработающие ступени и полезный груз являются «полезным грузом», т. е. каждая ракета рассматривается как одноступенчатая ракета. На рисунке указана нумерация ступеней и субракеты.

Пусть q — вес полезного груза, P_i — вес топлива в i-й ступени, Q_i — сухой (без топлива) вес i-ступени, G_i — полный вес i-й субракеты.



К задаче 45.38

Вводя в рассмотрение число Циолковского для каждой субракеты

$$z_i = \frac{G_i}{G_i - P_i}$$

и конструктивную характеристику (отношение полного веса ступени к ее сухому весу) для каждой ступени

$$s_i = \frac{Q_i + P_i}{Q_i},$$

определить полный стартовый вес всей ракеты, вес k-й субракеты, вес топлива k-й ступени, сухой вес k-й ступени.

Указание. При решении задачи ввести α_i — «относительный вес» i-й субракеты, т. е. отношение начального веса субракеты к весу ее полезного груза: $\alpha_1 = G_1/G_2$, $\alpha_2 = G_2/G_3$, ..., $\alpha_n = G_n/q$.

Ответ: $G_1 = q\prod_{i=1}^{n} z_i \prod_{i=1}^{n}\frac{s_i - 1}{s_i - z_i}$; $G_k = q\prod_{i=k}^{n} z_i \prod_{i=k}^{n}\frac{s_i - 1}{s_i - z_k}$;

$P_k = \frac{z_k - 1}{z_k}G_k$; $Q_k = \frac{P_k}{s_k - 1}$ (формулы Фертрегта).

45.39(45.39). Двухступенчатая ракета предназначена сообщить полезному грузу $q = 1$ кН скорость $v = 6000$ м/с. Эффективные скорости истечения газов у ступеней одинаковы и равны $v_e = 2400$ м/с Конструктивные характеристики первой и второй ступеней соответственно равны $s_1 = 4$, $s_2 = 5$ (см. задачу 45 38). Пренебрегая силой тяготения Земли и сопротивлением атмосферы, определить числа Циолковского для первой и второй субракет, при которых стартовый вес G_1 ракеты будет минимальный.

Ответ. $z_1 = 3{,}12$, $z_2 = 3{,}91$, $G_1 = 152$ кН

45.40(45.40). Используя данные предыдущей задачи, определить для каждой ступени вес топлива и сухой вес

Указание Использовать формулы ответа к задаче 45 38

Ответ: $P_1 = 100{,}4$ кН, $P_2 = 10{,}5$ кН, $Q_1 = 33{,}5$ кН, $Q_2 = 2{,}6$ кН.

45.41(45.41). Четырехступенчатая ракета состоит из четырех ракет. Конструктивная характеристика s и эффективная скорость v_e у всех ракет одинаковы и равны $s = 4{,}7$, $v_e = 2{,}4$ км/с Каков должен быть стартовый вес ракеты, чтобы она грузу в 10 кН сообщила скорость $v = 9000$ м/с? (Воспользоваться формулами ответа к задаче 45 38)

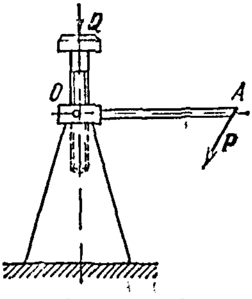
Ответ: 3720 кН.

ГЛАВА XI

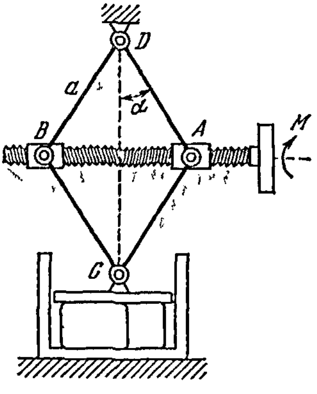
АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

§ 46. Принцип возможных перемещений

46.1(46.1). Груз Q поднимается с помощью домкрата, который приводится в движение рукояткой $OA = 0{,}6$ м К концу рукоятки, перпендикулярно ей, приложена сила $P = 160$ Н



К задаче 46 1



К задаче 46 2

Определить величину силы тяжести груза Q, если шаг винта домкрата $h = 12$ мм.

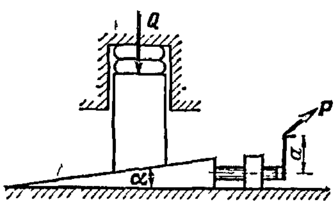
Ответ: $Q = 52{,}2$ кН.

46.2(46.2). На маховичок коленчатого пресса действует вращающий момент M, ось маховичка имеет на концах винтовые нарезки шага h противоположного направления и проходит через две гайки, шарнирно прикрепленные к двум вершинам стержневого ромба со стороною a, верхняя вершина ромба закреплена неподвижно, нижняя прикреплена к горизонтальной плите пресса. Определить силу давления пресса на сжимаемый предмет в момент, когда угол при вершине ромба равен 2α

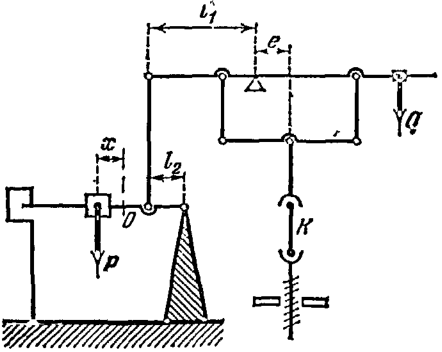
Ответ: $P = \pi \frac{M}{h} \operatorname{ctg} \alpha$

46.3(46.3). Определить зависимость между модулями сил $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{Q}$ в клиновом прессе, если сила $\boldsymbol{P}$ приложена к концу рукоятки длины a перпендикулярно оси винта и рукоятки Шаг винта равен h Угол при вершине клина равен α

Ответ: $Q = P \frac{2\pi a}{h \operatorname{tg} \alpha}$.



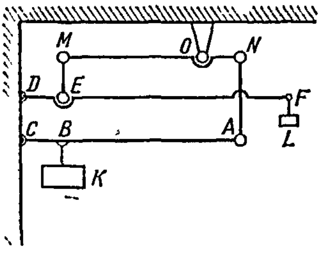
К задаче 46.3



К задаче 46.4

46.4(46.4). Рисунок представляет схему машины для испытания образцов на растяжение Определить зависимость между усилием X в образце K и расстоянием x от груза P массы M до его нулевого положения O, если при помощи груза Q машина уравновешена так, что при нулевом положении груза P и при отсутствии усилия в K все рычаги горизонтальны Даны расстояния l_1; l_2 и e.

Ответ: $X = Mg \frac{xl_1}{el_2}$



К задаче 46.5

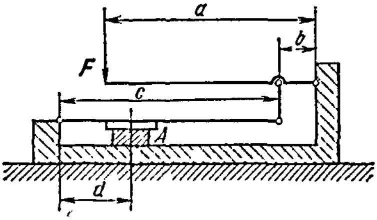
46.5(46.5). Грузы K и L, соединенные системой рычагов, изображенных на рисунке, находятся в равновесии. Определить зависимость между массами грузов, если дано: $\frac{BC}{AC} = \frac{1}{10}$, $\frac{ON}{OM} = \frac{1}{3}$, $\frac{DE}{DF} = \frac{1}{10}$.

Ответ: $M_L = \frac{BC}{AC} \cdot \frac{ON}{OM} \cdot \frac{DE}{DF} M_K = \frac{1}{300} M_K$.

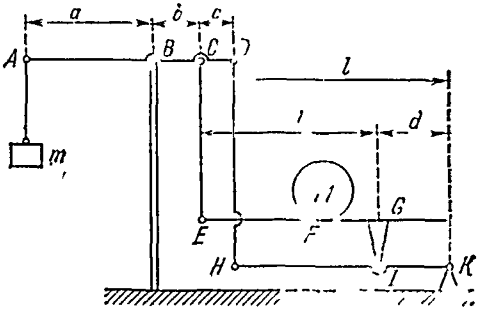
46.6(46.6). Определить модуль силы Q, сжимающей образец A, в рычажном прессе, изображенном на рисунке. Дано: $F = 100$ Н, $a = 60$ см, $b = 10$ см, $c = 60$ см, $d = 20$ см.

Ответ: $Q = 1800$ Н.

46.7(46.7). На платформе в точке F находится груз массы M. Длина $AB = a$; $BC = b$, $CD = c$, $IK = d$, длина платформы $EG = L$. Определить соотношение между длинами b, c, d, l, при котором масса m гири, уравновешивающей груз, не зависит от положения его на платформе, и найти массу гири m в этом случае.



К задаче 46.6



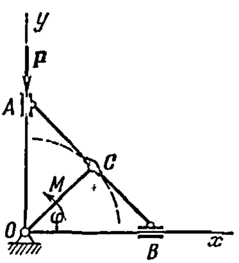
К задаче 46.7

Ответ: $\frac{b+c}{b} = \frac{l}{d}$, $m = \frac{b}{a} M$.

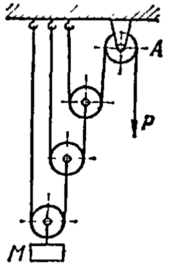
46.8(46.8). К ползуну A механизма эллипсографа приложена сила $\boldsymbol{P}$, направленная вдоль направляющей ползуна к оси вращения O кривошипа OC. Какой вращающий момент надо приложить к кривошипу OC для того, чтобы механизм был в равновесии в положении, когда кривошип OC образует с направляющей ползуна угол φ? Механизм расположен в горизонтальной плоскости, причем $OC = AC = CB = l$.

Ответ: $M = 2Pl \cos \varphi$.

46.9(46.9). Полиспаст состоит из неподвижного блока A и из n подвижных блоков. Определить в случае равновесия отношение массы M поднимаемого груза к силе $\boldsymbol{P}$, приложенной к концу каната, сходящего с неподвижного блока A.



К задаче 46.8



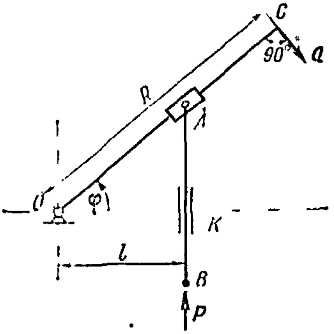
К задаче 46.9

Ответ: $Mg/P = 2^n$.

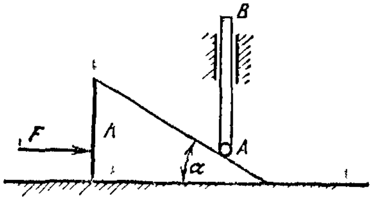
46.10(46.10). В кулисном механизме при качании рычага OC вокруг горизонтальной оси O ползун A, перемещаясь вдоль рычага OC, приводит в движение стержень AB, движущийся в вертикальных направляющих K. Даны размеры: $OC = R$, $OK = l$. Какую силу Q надо приложить перпендикулярно кривошипу OC в точке C для того, чтобы уравновесить силу P, направленную вдоль стержня AB вверх?

Ответ: $Q = \frac{Pl}{R \cos^2 \varphi}$.

46.11. Кулак K массы M_1 находится в покое на гладкой горизонтальной плоскости, поддерживая стержень AB массы M_2, который расположен в вертикальных направляющих. Система находится в покое под действием силы F, приложенной к кулаку K по горизонтали направо. Определить модуль силы F, если боковая поверхность кулака образует с горизонтом угол α. Найти также область значений модуля силы F в случае негладкой горизонтальной плоскости, если коэффициент трения скольжения между основанием кулака K и горизонтальной плоскостью равен f.



К задаче 46.10

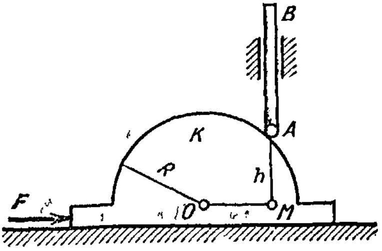


К задаче 46.11

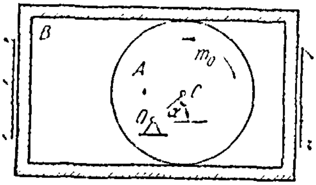
Ответ. 1) $F = M_2 g \operatorname{tg} \alpha$,

2) $M_2 g \operatorname{tg} \alpha - f(M_1 + M_2) g \leqslant F \leqslant M_2 g \operatorname{tg} \alpha + f(M_1 + M_2) g$.

46.12. Круговой кулак K массы M_1 и радиуса R стоит на негладкой горизонтальной плоскости. Он соприкасается с концом A стержня AB массы M_2, расположенного в вертикальных направляющих. Система находится в покое под действием силы F, приложенной к кулаку по горизонтали направо. При этом $AM = h$. Найти область значений модуля силы F, если коэффициент трения скольжения кулака о горизонтальную плоскость равен f.



К задаче 46.12



К задаче 46.13

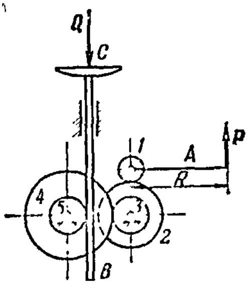
Ответ.

$$\frac{\sqrt{R^2 - h^2}}{h} M_2 g - f(M_1 + M_2) g \leqslant F \leqslant \frac{\sqrt{R^2 - h^2}}{h} M_2 g + f(M_1 + M_2) g.$$

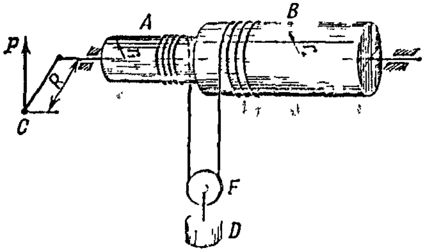
46.13. Круглый эксцентрик A массы M_1 насажен на неподвижную горизонтальную ось O, перпендикулярную плоскости рисунка, Эксцентрик поддерживает раму B массы M_2, имеющую вертикальные направляющие. Трением пренебречь. Эксцентриситет $OC = a$. Найти величину момента m_0, приложенного к эксцентрику, если при покое материальной системы OC образует с горизонталью угол α.

Ответ: $m_0 = (M_1 + M_2) g a \cos \alpha$.

46.14(46.11). В механизме домкрата при вращении рукоятки A длины R начинают вращаться зубчатые колеса 1, 2, 3, 4 и 5, которые приводят в движение зубчатую рейку B домкрата. Какую силу надо приложить перпендикулярно рукоятке в конце ее для того, чтобы чашка C при равновесии домкрата развила давление, равное 4,8 кН? Радиусы зубчатых колес соответственно равны: $r_1 = 3$ см, $r_2 = 12$ см, $r_3 = 4$ см, $r_4 = 16$ см, $r_5 = 3$ см, длина рукоятки $R = 18$ см.



К задаче 46.14

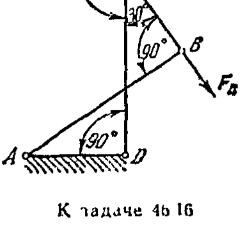


К задаче 46.15

Ответ: $P = Q \dfrac{r_1 r_3 r_5}{r_2 r_4 R} = 50$ Н.

46.15(46.12). Дифференциальный ворот состоит из двух жестко связанных валов A и B, приводимых во вращение рукояткой C длины R. Поднимаемый груз D массы M прикреплен к подвижному блоку E, охваченному канатом. При вращении рукоятки C левая ветвь каната сматывается с вала A радиуса r_1, а правая ветвь наматывается на вал B радиуса r_2 $(r_2 > r_1)$. Какую силу P надо приложить перпендикулярно рукоятке в конце ее для того, чтобы уравновесить груз D, если $M = 720$ кг, $r_1 = 10$ см, $r_2 = 12$ см, $R = 60$ см?

Ответ. $P = Mg \dfrac{r_2 - r_1}{2R} = 118$ Н.



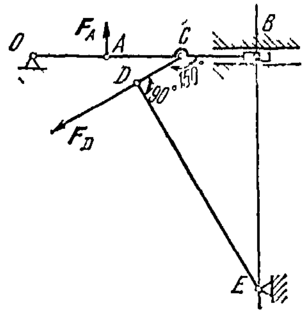
К задаче 46.16

46.16(46.13). В механизме антипараллелограмма $ABCD$ звенья AB, CD и BC соединены цилиндрическими шарнирами B и C, а цилиндрическими шарнирами A и D прикреплены к стойке AD. К звену CD в шарнире C приложена горизонтальная сила F_C. Определить модуль силы F_B, приложенной в шарнире B перпендикулярно звену AB, если механизм находится в равновесии в положении, указанном на рисунке. Дано: $AD = BC$, $AB = CD$, $\angle ABC = \angle ADC = 90°$, $\angle DCB = 30°$.

Ответ: $F_B = 2F_C$.

46.17(46.14). Кривошипно-ползунный механизм OAB связан в середине шатуна AB цилиндрическим шарниром C со стержнем CD. Стержни CD и DE соединены цилиндрическим шарниром D. Определить зависимость между модулями сил F_A и F_D, соответственно перпендикулярных стержням OA и DE, при равновесии механизма в положении, указанном на рисунке. Дано: $\angle DCB = 150°$, $\angle CDE = 90°$.

Ответ: $F_D = 4F_A$.

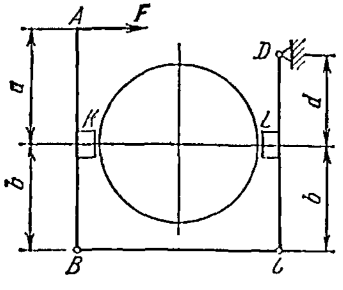


К задаче 46.17

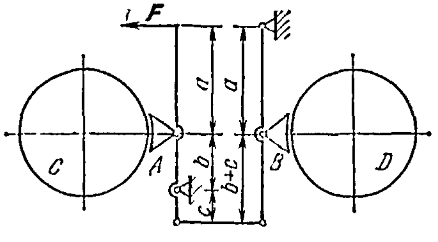
46.18(46.15). Колодочно-бандажный тормоз вагона трамвая состоит из трех тяг AB, BC и CD, соединенных шарнирами B и C. При действии горизонтальной силы F тормозные колодки K и L, соответственно прикрепленные к тягам AB и CD, прижимаются к колесу. Определить силы давления N_K и N_L колодок на колесо. Размеры указаны на рисунке. Вагон находится в покое.

Ответ: $N_K = F\frac{a+b}{b}$, $N_L = F\frac{a}{b}\frac{b+d}{d}$.

46.19(46.16). На рисунке изображена схема колодочно-бандажного тормоза вагона трамвая. Определить зависимость между a, b и c, при наличии которой колодки A и B под действием силы F прижимаются с одинаковыми по модулю силами к бандажам колес C и D. Найти также величину этой силы. Колеса считать неподвижными.



К задаче 46.18



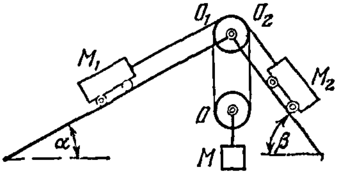
К задаче 46.19

Ответ: $\frac{a}{b} = \frac{a+b+c}{c}$, $Q = F\frac{a+b}{2b}$.

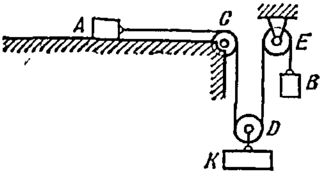
46.20(46.17). Найти массы M_1 и M_2 двух грузов, удерживаемых в равновесии грузом массы M на плоскостях, наклоненных к горизонту под углами α и β, если грузы с массами M_1 и M_2 прикреплены к концам троса, идущего от груза с массой M_1 через блок O_1, насаженный на горизонтальную ось, к подвижному блоку O, и затем через блок O_2, насаженный на ось блока O_1, к грузу массы M_2. Блоки O_1 и O_2 — соосные. Трением, а также массами блоков и троса пренебречь.

Ответ: $M_1 = \frac{M}{2\sin\alpha}$, $M_2 = \frac{M}{\sin\beta}$.

46.21(46.18). К концам нерастяжимой нити привязаны грузы A и B одинаковой массы. От груза A нить проходит параллельно горизонтальной плоскости, огибает неподвижный блок C, охватывает подвижный блок D, затем огибает неподвижный блок E, где к другому концу нити привязан груз B. К оси подвижного блока D подвешен груз K массы M.



К задаче 46.20

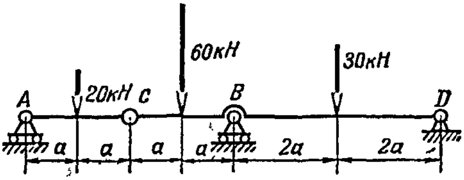


К задаче 46.21

Определить массу M_1 каждого из грузов A и B и коэффициент трения скольжения f груза A о горизонтальную плоскость, если система грузов находится в покое. Массой нити пренебречь.

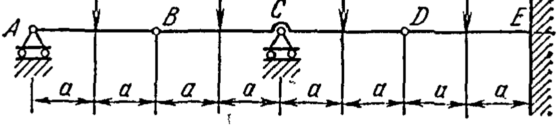
Ответ: $M_1 = M/2$, $f = 1$.

46.22(46.19). Составная балка AD, лежащая на трех опорах, состоит из двух балок, шарнирно соединенных в точке C. На балку действуют вертикальные силы, равные 20 кН, 60 кН, 30 кН. Размеры указаны на рисунке. Определить реакции опор A, B и D.



К задаче 46.22

Ответ. $R_A = 10$ кН, $R_B = 105$ кН, $R_D = -5$ кН.



К задаче 46.24

46.23(46.20). Определить вращающий момент, который надо приложить на участке BD к балке AD, рассмотренной в предыдущей задаче, для того, чтобы опорная реакция в D равнялась нулю.

Ответ: $M = 20a$ кН·м.

46.24(46.21). Составная балка AE, лежащая на двух опорах A и C, состоит из трех балок AB, BD и DE, шарнирно соединенных в *B* и *D*. Балка *DE* в сечении *E* защемлена в стене. Определить вертикальную составляющую реакции в сечении *E*. К балкам приложены четыре равные вертикальные силы ***P***. Размеры указаны на рисунке.

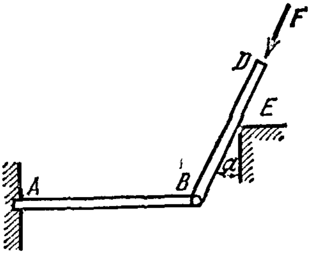
Ответ $R = 0{,}5P$.

46.25(46.22). Определить момент m_E пары, возникающей в заделке балки *DE*, рассмотренной в предыдущей задаче.

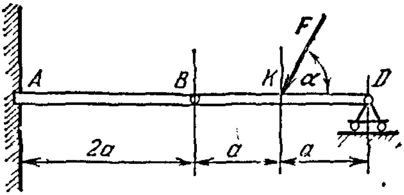
Ответ $m_E = 0$.

46.26. Балки *AB* и *BD* соединены цилиндрическим шарниром *B*. Горизонтальная балка *AB* защемлена в вертикальной стене сечением *A*. Балка *BD*, опирающаяся о гладкий выступ *E*, образует с вертикалью угол α. Вдоль балки *BD* действует сила ***F***. Определить горизонтальную составляющую реакции в защемленном сечении *A*. Массой балок пренебречь.

Ответ. $R_{Ax} = F\sin\alpha$.



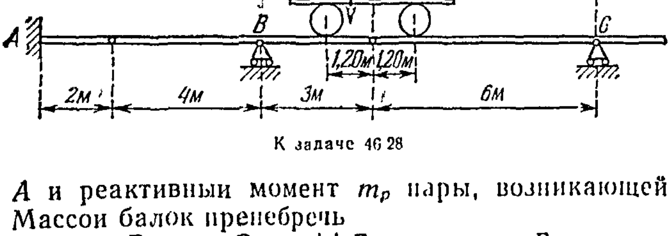
К задаче 46.26



К задаче 46.27

46.27. Две горизонтальные балки *AB* и *BD* соединены цилиндрическим шарниром *B*. Опора *D* стоит на катках, а сечение *A* защемлено в стенке. К балке *BD* в точке *K* приложена сосредоточенная сила ***F***, образующая угол α с горизонтом. Размеры указаны на рисунке. Определить составляющие реакции в защемленном сечении *A* и реактивный момент m_p пары, возникающей в этом сечении. Массой балок пренебречь.

Ответ $R_{Ax} = F\cos\alpha$, $R_{Ay} = {}^1/_2F\sin\alpha$, $m_p = Fa\sin\alpha$.



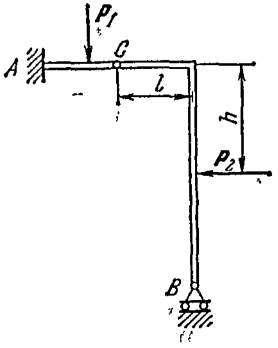
К задаче 46.28

46.28(46.23). Железнодорожный кран опирается на рельсы, укрепленные на двух горизонтальных двухпролетных балках с промежуточными шарнирами Кран несет груз $P=30$ кН, сила тяжести крана $Q=160$ кН Определить момент реактивной пары в заделке в положении крана, указанном на рисунке

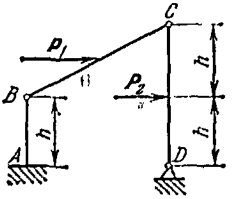
Ответ: $M_A = -{}^1/_2(1{,}95Q + 3{,}60P) = -210$ кН·м

46.29(46.25). Каркас платформы состоит из Г-образных рам с промежуточными шарнирами C Верхние концы рам жестко защемлены в бетонную стену, нижние — опираются на цилиндрические подвижные опоры. Определить вертикальную реакцию защемления при действии сил P_1 и P_2

Ответ: $Y_A = P_1 - P_2h/l$.



К задаче 46 29



К задаче 46 30

46.30(46.26). Две балки BC и CD шарнирно соединены в C, цилиндрическим шарниром B прикреплены к вертикальной стойке AB, защемленной в сечении A, а цилиндрическим шарниром D соединены с полом. К балкам приложены горизонтальные силы P_1 и P_2 Определить горизонтальную составляющую реакции в сечении A Размеры указаны на рисунке

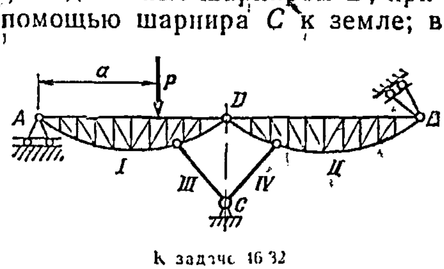
Ответ: $R = P_1 + {}^1/_2P_2$

46.31(46.27). Определить момент m_A реактивной пары, возникающей в заделке A стойки AB, рассмотренной в предыдущей задаче

Ответ. $m_A = (P_1 + {}^1/_2P_2)h$

46.32(46.28). Две фермы I и II, соединенные шарниром D, прикреплены стержнями III и IV с помощью шарнира C к земле; в точках A и B они имеют опоры на катках Ферма I нагружена вертикальной силой P на расстоянии a от опоры A. Найти реакцию катка B.

Указание Предварительно определить положение мгновенных центров скоростей C_1 и C_2 ферм I и II



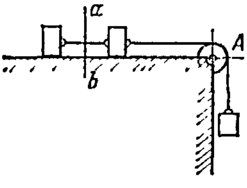
К задаче 46 32

Ответ: $R_B = P\dfrac{a}{b}\dfrac{DC_2}{DC_1}$, где b — плечо реакции R_B относительно мгновенного центра C_2 Реакция R_B направлена перпендикулярно плоскости скольжения катка B слева направо вниз.

§ 47. Общее уравнение динамики

47.1(47.1). Три груза массы M каждый соединены нерастяжимой нитью, переброшенной через неподвижный блок A. Два груза лежат на гладкой горизонтальной плоскости, а третий груз подвешен вертикально. Определить ускорение системы и натяжение нити в сечении ab. Массой нити и блока пренебречь.

Ответ $w = {}^1/_3 g$, $T = {}^1/_3 Mg$



К задаче 47.1

47.2(47.2). Решить предыдущую задачу с учетом массы блока, считая, что при движении грузов блок A вращается вокруг неподвижной оси. Масса блока — сплошного однородного диска — равна $2M$.

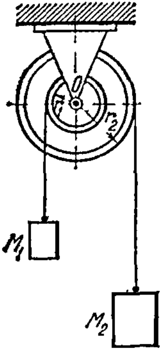
Ответ $w = {}^1/_4 g$, $T = {}^1/_4 Mg$

47.3(47.3). Два груза массы M_1 и M_2 подвешены на двух гибких нерастяжимых нитях, которые навернуты, как указано на рисунке, на барабаны, имеющие радиусы r_1 и r_2 и насаженные на общую ось; грузы движутся под влиянием силы тяжести. Определить угловое ускорение ε барабанов, пренебрегая их массами и массой нити.

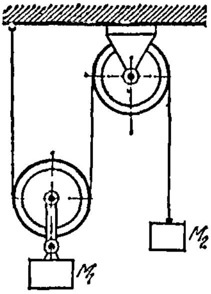
Ответ: $\varepsilon = g\dfrac{M_2 r_2 - M_1 r_1}{M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2}$.

47.4(47.4). При условии предыдущей задачи определить угловое ускорение ε и натяжения T_1 и T_2 нитей, принимая во внимание массы барабанов, при следующих данных: $M_1 = 20$ кг, $M_2 = 34$ кг, $r_1 = 5$ см, $r_2 = 10$ см; массы барабанов: малого 4 кг и большого 8 кг. Массы барабанов считать равномерно распределенными по их внешним поверхностям.

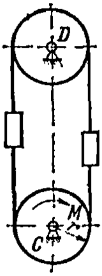
Ответ $\varepsilon = 49$ рад/с², $T_1 = 246$ Н, $T_2 = 167$ Н.



К задаче 47.3



К задаче 47.5



К задаче 47.6

47.5(47.5). К системе блоков, изображенной на рисунке, подвешены грузы M_1 массы 10 кг и M_2 массы 8 кг. Определить ускорение w_2 груза M_2 и натяжение нити, пренебрегая массами блоков.

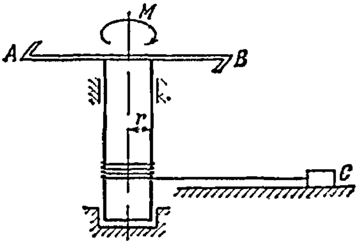
Ответ: $w_2 = 2{,}8$ м/с², $T = 56{,}1$ Н.

47.6(47.6). К нижнему шкиву C подъемника приложен вращающий момент M. Определить ускорение груза A массы M_1, поднимаемого вверх, если масса противовеса B равна M_2, а шкивы C и D радиуса r и массы M_3 каждый представляют собой однородные цилиндры. Массой ремня пренебречь.

Ответ: $w = \frac{M + (M_2 - M_1) gr}{(M_1 + M_2 + M_3) r}$.

47.7(47.7). Вал кабестана — механизма для передвижения грузов — радиуса r приводится в движение постоянным вращающим моментом M, приложенным к рукоятке AB. Определить ускорение груза C массы m, если коэффициент трения скольжения груза о горизонтальную плоскость равен f. Массой каната и кабестана пренебречь.

Ответ: $w = \frac{M - fmgr}{mr}$.



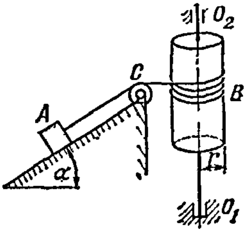
К задаче 47.7

47.8(47.8). Решить предыдущую задачу с учетом массы кабестана, момент инерции которого относительно оси вращения равен J.

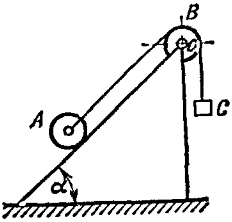
Ответ: $w = \frac{r (M - fmgr)}{J + mr^2}$.

47.9(47.9). Груз A массы M_1, опускаясь по наклонной гладкой плоскости, расположенной под углом α к горизонту, приводит во вращение посредством нерастяжимой нити барабан B массы M_2 и радиуса r. Определить угловое ускорение барабана, если считать барабан однородным круглым цилиндром. Массой неподвижного блока C и нити пренебречь.

Ответ: $\varepsilon = \frac{2M_1 g \sin\alpha}{r (2M_1 + M_2)}$.



К задаче 47.9



К задаче 47.11

47.10(47.10). Человек толкает тележку, приложив к ней горизонтальную силу $\boldsymbol{F}$. Определить ускорение кузова тележки, если масса кузова равна M_1, M_2 — масса каждого из четырех колес, r — радиус колес, $f_к$ — коэффициент трения качения. Колеса считать сплошными круглыми дисками, катящимися по рельсам без скольжения.

Ответ: $w = \frac{F - \frac{f_к}{r} (M_1 + 4M_2) g}{(M_1 + 6M_2)}$.

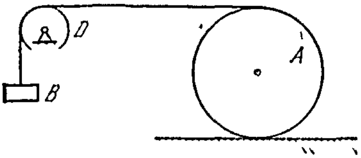
47.11(47.11). Каток A массы M_1, скатываясь без скольжения по наклонной плоскости вниз, поднимает посредством нерастяжимой нити, переброшенной через блок B, груз C массы M_2. При этом блок B вращается вокруг неподвижной оси O, перпендикулярной его плоскости. Каток A и блок B — однородные круглые диски одинаковой массы и радиуса. Наклонная плоскость образует угол α с горизонтом. Определить ускорение оси катка. Массой нити пренебречь.

Ответ: $w = g \frac{M_1 \sin\alpha - M_2}{2M_1 + M_2}$.

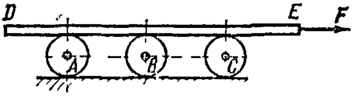
47.12(47.12). Груз B массы M_1 приводит в движение цилиндрический каток A массы M_2 и радиуса r при помощи нити, намотанной на каток. Определить ускорение груза B, если каток катится без скольжения, а коэффициент трения качения равен $f_к$. Массой блока D пренебречь.

Ответ: $w = 8g\dfrac{M_1 - \dfrac{f_к}{2r}M_2}{8M_1 + 3M_2}$.

47.13(47.13). Стержень DE массы M_1 лежит на трех катках A, B и C массы M_2 каждый. К стержню приложена по горизонтали вправо сила F, приводящая в движение стержень и катки. Скольжение между стержнем и катками и также между катками и горизонтальной плоскостью отсутствует. Найти ускорение стержня DE. Катки считать однородными круглыми цилиндрами.



К задаче 47.12



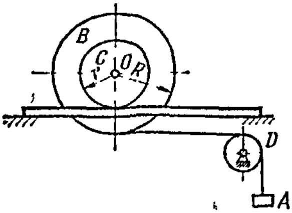
К задаче 47.13

Ответ: $w = \dfrac{8F}{8M_1 + 9M_2}$.

47.14(47.14). Определить ускорение груза M_2, рассмотренного в задаче 47.5, с учетом массы блоков — сплошных однородных дисков массы 4 кг каждый.

Ответ: $w_2 = 0{,}7$ м/с^2.

47.15(47.15). Груз A массы M_1, опускаясь вниз, посредством нерастяжимой нити, переброшенной через неподвижный блок D и намотанной на шкив B, заставляет вал C катиться без скольжения по горизонтальному рельсу. Шкив B радиуса R жестко насажен на вал C радиуса r; их общая масса равна M_2, а радиус инерции относительно оси O, перпендикулярной плоскости рисунка, равен ρ. Найти ускорение груза A. Массой нити и блока пренебречь.



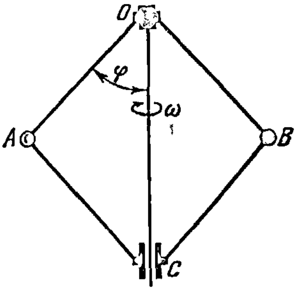
К задаче 47.15

Ответ: $w = g\dfrac{M_1(R-r)^2}{M_1(R-r)^2 + M_2(\rho^2 + r^2)}$.

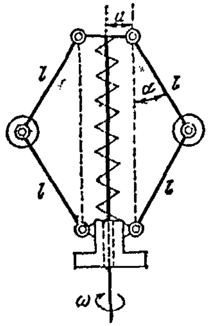
47.16(47.16). Центробежный регулятор вращается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω. Определить угол отклонения ручек OA и OB от вертикали, принимая во внимание только массу M каждого из шаров и массу M_1 муфты C; все стержни имеют одинаковую длину l.

Ответ: $\cos\varphi = \dfrac{(M+M_1)g}{Ml\omega^2}$.

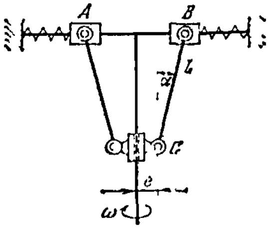
47.17(47.17). Центробежный регулятор вращается с постоянной угловой скоростью ω. Найти зависимость между угловой скоростью регулятора и углом α отклонения его стержней от вертикали, если муфта массы M_1 отжимается вниз пружиной, находящейся при $\alpha = 0$ в недеформированном состоянии и закрепленной верхним концом на оси регулятора, массы шаров равны M_2, длина стержней равна l, оси подвеса стержней отстоят от оси регулятора на расстоянии a, массами стержней и пружины пренебречь. Коэффициент жесткости пружины равен c.



К задаче 47 16



К задаче 47 17

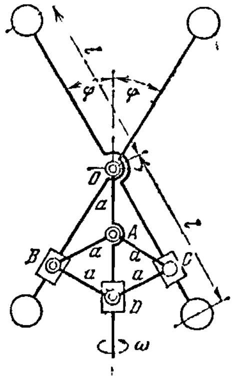


К задаче 47 18

Ответ: $\omega^2 = \dfrac{(M_1+M_2)g + 2lc(1-\cos\alpha)}{M_2(a+l\sin\alpha)}\operatorname{tg}\alpha$.

47.18(47.18). Центробежный пружинный регулятор состоит из двух грузов A и B массы M каждый, насаженных на скрепленный со шпинделем регулятора гладкий горизонтальный стержень муфты C массы M_1, тяг длины l и пружин, отжимающих грузы к оси вращения, расстояние шарниров тяг от оси шпинделя равно e; c — коэффициент жесткости пружин. Определить угловую скорость регулятора при угле раствора α, если при угле α_0, где $\alpha_0 < \alpha$, пружины находятся в ненапряженном состоянии; массой тяг и трением пренебречь.

Ответ: $\omega = \sqrt{\dfrac{M_1 g \operatorname{tg}\alpha + 2cl(\sin\alpha - \sin\alpha_0)}{2M(e + l\sin\alpha)}}$.



К задаче 47 19

47.19(47.19). В регуляторе четыре груза одинаковой массы M_1 находятся на концах двух равноплечих рычагов длины $2l$, которые могут вращаться в плоскости регулятора вокруг конца шпинделя O и образуют с осью шпинделя переменный угол φ. В точке A, находящейся от конца шпинделя O на расстоянии $OA = a$, со шпинделем шарнирно соединены рычаги AB и AC длины a, которые в точках

B и C в свою очередь сочленены со стержнями BD и CD длины a, несущими муфту D. В точках B и C имеются ползунки, скользящие вдоль рычагов, несущих грузы. Масса муфты равна M_2. Регулятор вращается с постоянной угловой скоростью ω. Найти связь между углом и угловой скоростью ω в равновесном положении регулятора.

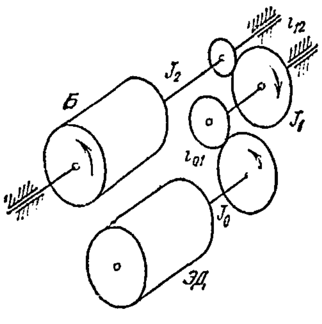
Ответ: Равновесное положение регулятора возможно только при $\omega = \sqrt{\frac{2gM_2a}{M_1l^2}}$ независимо от угла φ.

§ 48. Уравнения Лагранжа 2-го рода

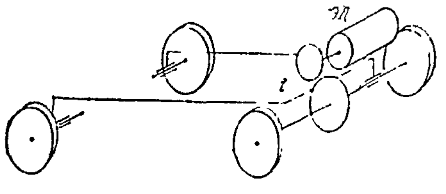
48.1 (48.1). Передача вращения между двумя валами осуществляется двумя зубчатыми колесами, имеющими соответственно z_1 и z_2 зубцов, моменты инерции валов с насаженными на них колесами соответственно равны J_1 и J_2. Составить уравнение движения первого вала, если на него действует вращающий момент M_1, а на другой вал — момент сопротивления M_2. Трением в подшипниках пренебречь.

Ответ. $(J_1 + i^2J_2)\,\varphi = M_1 - iM_2$, где $i = z_1/z_2$.

48.2. Барабан *Б* центрифуги приводится во вращение электродвигателем *ЭД* через двухступенчатый редуктор. Заданы момент инерции J_0 электродвигателя, момент инерции J_2 барабана, момент инерции J_1 промежуточного вала редуктора, передаточные числа i_{01} и i_{12} ступеней редуктора. К ротору электродвигателя приложен вращающий момент M_0 и момент сил сопротивления M'_0, к валу редуктора и к барабану — моменты сил сопротивления M'_1 и M'_2 соответственно. Составить дифференциальное уравнение вращения барабана центрифуги.



К задаче 48.2



К задаче 48.3

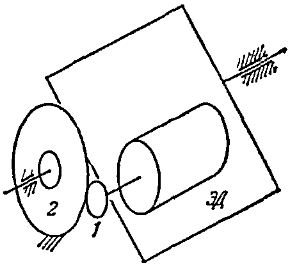
Ответ: $(J_0i_{01}^2i_{12}^2 + J_1i_{12}^2 + J_2)\,\varphi = (M_0 - M'_0)\,i_{10}i_{12} - M'_1i_{12} - M'_2$

48.3. Привод электромобиля состоит из электродвигателя *ЭД* и одноступенчатого редуктора с передаточным числом i. Составить дифференциальное уравнение движения электромобиля, если J_0 — момент инерции ротора электродвигателя, J_1 — момент инерции каждого из четырех колес, имеющих радиус r, m — суммарная масса электромобиля, M — вращающий момент электродвигателя,

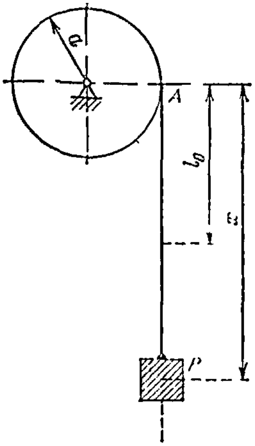
M' — момент сил сопротивления на валу электродвигателя, F — суммарная сила сопротивления движению электромобиля.

Ответ: $\left(m+\frac{4J_1}{r^2}+\frac{J_0}{i^2r^2}\right)\ddot{x}=\frac{M-M'}{ir}-F$.

48.4. Электродвигатель ЭД стабилизирующего привода установлен на вращающейся раме, положение которой задается углом φ. Шестерня 1 на валу электродвигателя обкатывается вокруг шестерни 2, связанной с неподвижным основанием. Составить дифференциальное уравнение движения рамы, если J_1 — момент инерции рамы вместе с электродвигателем, J_0 — момент инерции ротора электродвигателя, i_{12} — передаточное число пары шестерен,



К задаче 48.4



К задаче 48.5

M_0 — вращающий момент электродвигателя, M_0' — момент сил сопротивления на валу электродвигателя, M_1' — момент сил, приложенных к раме вокруг ее оси.

Ответ: $\left[J_0\left(1+\frac{1}{i_{12}}\right)^2+J_1\right]\varphi=(M_0-M_0')\left(1+\frac{1}{i_{12}}\right)-M_1'$.

48.5(48.3). Определить движение груза массы m, висящего на однородном тросе массы m_1 и длины l, трос навернут на барабан радиуса a и массы m_2, ось вращения горизонтальна; трением пренебречь, массу барабана считать равномерно распределенной по его ободу. В начальный момент $t=0$ система находилась в покое, длина свисавшей части троса l_0.

Указание. Пренебречь размерами барабана по сравнению с длиной свешивающейся части троса.

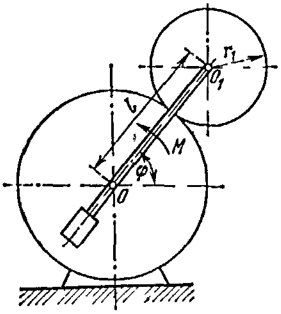
Ответ: $x=-\frac{ml}{m_1}+\left(l_0+\frac{ml}{m_1}\right)\operatorname{ch}\sqrt{\frac{m_1g}{(m+m_1+m_2)\,l}}\,t$.

48.6(48.4). В эпициклическом механизме бегающая шестеренка радиуса r_1 насажена на кривошип с противовесом, вращающийся вокруг оси неподвижной шестеренки под действием приложенного момента M. Определить угловое ускорение вращения кривошипа и окружное усилие S в точке касания шестеренок, если расстояние между осями шестеренок равно l, момент инерции кривошипа с противовесом относительно оси вращения кривошипа равен J_0, масса бегающей шестеренки m_1, момент инерции шестеренки относительно ее оси J_1; трением пренебречь, центр масс шестеренки и кривошипа с противовесом находится на оси вращения кривошипа.

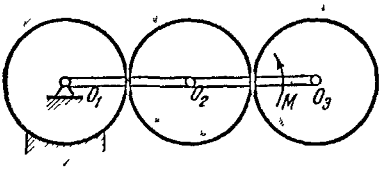
Ответ: $\varepsilon = \dfrac{M}{J_0 + m_1 l^2 + J_1 l^2/r_1^2}$, $\quad S = \dfrac{J_1 l}{r_1^2}\,\varepsilon$

48.7(48.5). В планетарном механизме колесо с осью O_1 неподвижно; к рукоятке O_1O_3 приложен вращающий момент M; механизм расположен в горизонтальной плоскости. Определить угловое ускорение рукоятки, считая колеса однородными дисками с одинаковыми массами m и радиусами r и пренебрегая массой рукоятки.

Ответ: $\varepsilon_1 = \dfrac{M}{22mr^2}$.



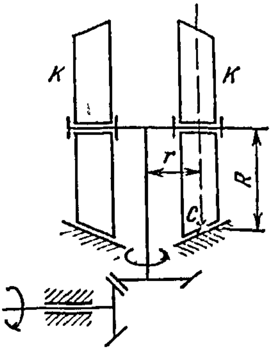
К задаче 48.6



К задаче 48.7

48.8(48.18). Бегуны K, K приводятся в движение от вала двигателя при помощи передачи, схема которой показана на рисунке. Масса одного бегуна равна 3 т, средний радиус $R = 1$ м, радиус вращения $r = 0{,}5$ м. Считаем, что мгновенная ось вращения бегуна проходит через среднюю точку C обода. Отношение радиусов колес конической передачи от двигателя к вертикальному валу равно 2/3. Бегун считаем однородным диском радиуса R и пренебрегаем массой всех движущихся частей по сравнению с массой бегунов. Вычислить, какой постоянный вращающий момент должен быть приложен на валу двигателя, чтобы сообщить вертикальному валу угловую скорость 120 об/мин по истечении 10 с от момента пуска двигателя; силами сопротивления пренебречь.

Ответ 3140 Н м.



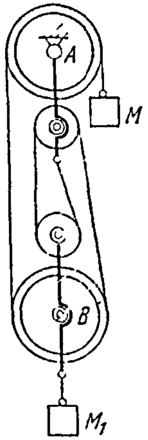
К задаче 48.8

48.9(48.7). Груз M массы 101 кг поднимает с помощью полиспаста груз M_1, который вместе с подвижной обоймой имеет массу 320 кг. Всех блоков четыре, большие блоки имеют массу по 16 кг, малые — по 8 кг, радиусы больших блоков равны r, радиусы малых равны r_1. Определить ускорение груза M. При определении энергии блоков предполагаем, что массы их равномерно распределены по окружности

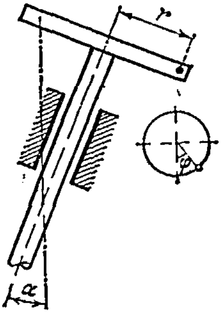
Ответ: $0{,}1g$.

48.10(48.9). В машине для статического уравновешивания роторов подшипники наклонены под углом α к вертикали. Ротор, помещенный в подшипник, имеет момент инерции J (относительно своей оси) и несет неуравновешенную массу m на расстоянии r от оси. Написать дифференциальное уравнение движения ротора и определить частоту малых колебаний около положения равновесия.

Ответ: $(mr^2+J)\varphi + mgr\sin\alpha\sin\varphi = 0$, $k=\sqrt{\dfrac{mgr\sin\alpha}{mr^2+J}}$, где φ — угол поворота ротора



К задаче 48 9



К задаче 48 10

48.11(48.19). Однородный конус катится по шероховатой плоскости, наклоненной под углом α к горизонту. Длина образующей конуса l, угол раствора 2β. Составить уравнение движения конуса.

Указание За обобщенную координату принять угол ϑ, образованный соприкасающейся образующей с прямой наибольшего наклона плоскости

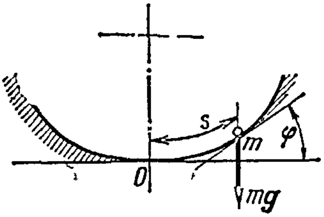
$$\text{Ответ: } \ddot\vartheta + \frac{g\sin\alpha}{l(\cos^2\beta + 1/5)}\sin\vartheta = 0.$$

48.12(48.10). Материальная точка массы m движется под влиянием силы тяжести по циклоидальной направляющей, заданной уравнением $s = 4a\sin\varphi$, где s — дуга, отсчитываемая от точки O, а φ — угол касательной к циклоиде с горизонтальной осью. Определить движение точки

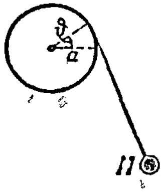
Ответ:

$$s = A\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{a}}\,t + \varphi_0\right),$$

где A и φ_0 — постоянные интегрирования.



К задаче 48 12



К задаче 48 13

48.13(48.11). Составить уравнение движения маятника, состоящего из материальной точки M массы m, подвешенной на нити, навернутой на неподвижный цилиндр радиуса a. Длина свисающей в положении равновесия части нити равна l. Массой нити пренебречь

Ответ: $(l+a\vartheta)\vartheta + a\dot\vartheta^2 + g\sin\vartheta = 0$, где ϑ — угол отклонения маятника от вертикали.

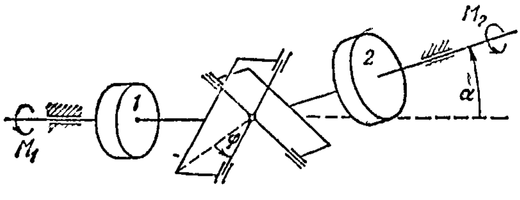
48.14(48.12). Составить уравнение движения маятника, состоящего из материальной точки массы m, подвешенной на нити, длина которой изменяется по произвольно заданному закону $l = l(t)$

Ответ: $\varphi + 2\frac{l}{l}\varphi + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0$, где φ — угол отклонения нити от вертикали

48.15(48.14). Точка подвеса маятника, состоящего из материальной точки массы m на нерастяжимой нити длины l, движется по заданному закону $\xi = \xi_0(t)$ по наклонной прямой, образующей угол α с горизонтом Составить уравнение движения маятника.

Ответ: $\varphi + \frac{g}{l}\sin\varphi + \frac{\xi}{l}\cos(\varphi - \alpha) = 0.$

48.16(48.15). Два вала, находящихся в одной плоскости и образующих между собой угол α, соединены шарниром Кардана Моменты инерции валов равны J_1 и J_2 Составить уравнение движения первого вала, если на него действует вращающий момент M_1, а к другому валу приложен момент сопротивления M_2 Трением в подшипниках пренебречь.

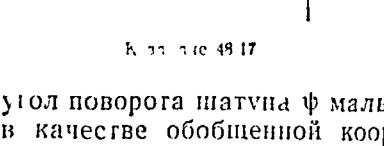


К задаче 48 16

Ответ Обозначая через φ угол поворота первого вала, имеем

$$\left[J_1 + J_2\left(\frac{\cos\alpha}{1 - \sin^2\alpha\cos^2\varphi}\right)^2\right]\varphi - \frac{J_2\sin^2\alpha\cos^2\alpha\sin 2\varphi}{(1 - \sin^2\alpha\cos^2\varphi)^3}\varphi^2 =$$
$$= M_1 - M_2\frac{\cos\alpha}{1 - \sin^2\alpha\cos^2\varphi}.$$

48.17(48.8). Кривошипный механизм состоит из поршня массы m_1, шатуна AB массы m_2, кривошипа OB, вала и махового колеса; J_2 — момент инерции шатуна относительно его центра масс C, J_3 — момент инерции кривошипа OB, вала и махового колеса относительно оси, Ω — площадь поршня, p — давление, действующее на поршень, l — длина шатуна, s — расстояние между точкой A и центром масс шатуна, r — длина кривошипа OB; M — момент сопротивления, действующий на вал Составить уравнение движения механизма, считая угол поворота шатуна ψ малым, т е полагая $\sin\psi = \psi$ и $\cos\psi = 1$; в качестве обобщенной координаты взять угол поворота кривошипа φ Механизм расположен в горизонтальной плоскости



К задаче 48 17

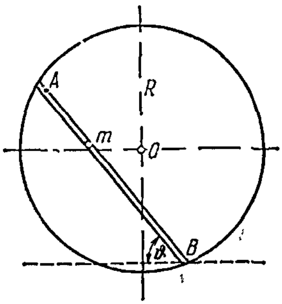
Ответ: $\left[(m_1 + m_2)r^2\sin^2\varphi + (J + m_1s^2)\left(\frac{r}{l}\right)^2\cos^2\varphi + J_3\right]\varphi +$
$+ \left[(m_1 + m_2)r^2 - (J_2 + m_1s^2)\left(\frac{r}{l}\right)^2\right]\cos\varphi\sin\varphi\varphi^2 = -M + p\Omega r\sin\varphi.$

48.18(48.20). По однородному стержню массы M и длины $2a$, концы которого скользят по гладкой, расположенной в горизонтальной плоскости окружности радиуса R, движется с постоянной относительной скоростью v материальная точка массы m. Определить движение стержня. В начальный момент материальная точка находится в центре масс стержня.

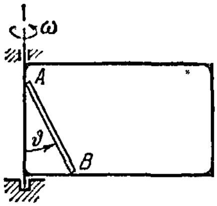
Ответ: $\vartheta-\vartheta_0=C\,\mathrm{arctg}\dfrac{vt}{\sqrt{R^2-a^2+\dfrac{M}{m}\left(R^2-2\dfrac{a^2}{3}\right)}}$, где ϑ_0 и C — произвольные постоянные.

48.19(48.21). Концы однородного тяжелого стержня AB длины $2a$ и массы M скользят без трения по горизонтальному и вертикальному стержням рамки, вращающейся с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной стороны. Составить уравнение движения стержня и определить положение относительного равновесия.

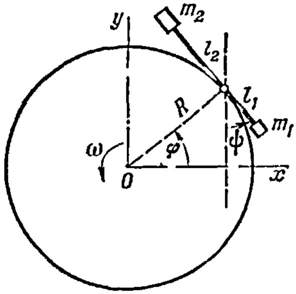
Ответ: $\frac{4}{3}Ma^2\ddot{\vartheta}-\frac{4}{3}M\omega^2a^2\sin\vartheta\cdot\cos\vartheta-Mga\sin\vartheta=0$, где ϑ — угол, образуемый стержнем с вертикалью. В положении равновесия $\vartheta=0$ (неустойчивое равновесие).



К задаче 48.18



К задаче 48.19



К задаче 48.20

48.20(48.22). К окружности диска радиуса R шарнирно присоединен рычаг, несущий на своих концах сосредоточенные массы m_1 и m_2. Расстояния масс от шарнира соответственно равны l_1 и l_2. Диск вращается около вертикальной оси, перпендикулярной его плоскости, с угловой скоростью ω. Составить уравнение движения рычага и определить его относительное положение равновесия. Массой рычага пренебречь. Ось вращения рычага параллельна оси вращения диска. Решить также задачу в предположении, что диск вращается в вертикальной плоскости (учесть действие силы тяжести).

Ответ: Для вращения вокруг вертикальной оси

$$(m_1l_1^2+m_2l_2^2)\ddot{\psi}-R\omega^2(m_1l_1-m_2l_2)\cos(\psi-\omega t)=0.$$

При $m_1l_1=m_2l_2$ рычаг в безразличном относительном равновесии. При $m_1l_1\neq m_2l_2$ существуют два положения относительного равновесия, при которых $\psi = \omega t \pm \pi/2$, т. е рычаг направлен по радиусу Для вращения вокруг горизонтальной оси

$$(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)\psi - R\omega^2 (m_1 l_1 - m_2 l_2)\cos(\psi - \omega t) + (m_1 l_1 - m_2 l_2) g \sin\psi = 0.$$

При $m_1 l_1 \neq m_2 l_2$ относительное равновесие невозможно

48.21(48.24). Тонкий диск массы M может своей плоскостью скользить без трения по горизонтальной плоскости. По диску, верхняя поверхность которого шероховата, движется материальная точка массы m Уравнения относительного движения точки в декартовых координатах x и y, связанных с диском и имеющих начало в его центре масс, заданы в виде $x = x(t)$, $y = y(t)$. Момент инерции диска относительно его центра масс равен J. Определить закон изменения угловой скорости диска. В начальном положении диск неподвижен

Ответ: $$\left[J + \frac{mM}{m+M}(x^2 + y^2)\right]\dot{\varphi} + \frac{mM}{m+M}(xy - y\dot{x}) =$$
$$= \frac{mM}{M+m}(x_0 y_0 - y_0 \dot{x}_0),$$

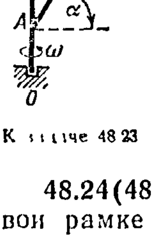
где $x_0, y_0, x_0, \dot{y}_0$ — значения координат и проекций скорости точки в начальный момент времени

48.22(48.25). По диску, описанному в предыдущей задаче, вдоль окружности радиуса R движется материальная точка с относительной скоростью $v = \alpha t$ Найти закон движения диска.

Ответ: $$\varphi = -\frac{mM}{2(m+M)} \frac{R\alpha}{J + \frac{mM}{m+M}R^2} t^2 = \frac{\beta}{2R} t^2,$$

$$\xi = -\frac{mR}{m+M}\cos\frac{\alpha+\beta}{2R}t^2, \qquad \eta = -\frac{mR}{m+M}\sin\frac{\alpha+\beta}{2R}t^2,$$

где φ — угол поворота диска, а ξ и η — координаты центра масс диска в неподвижной декартовой системе, имеющей начало в центре инерции системы.



К задаче 48.23

48.23(48.26). Материальная точка M движется под действием силы тяжести по прямолинейному стержню AB, вращающемуся с постоянной угловой скоростью ω вокруг неподвижной вертикальной оси Стержень AB образует угол α с горизонталью Найти закон движения точки.

Ответ. Расстояние движущейся точки от точки пересечения прямой с вертикальной осью

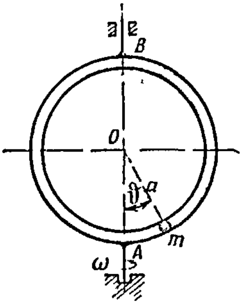
$$r = C_1 e^{\omega t\cos\alpha} + C_2 e^{-\omega t\cos\alpha} + \frac{g}{\omega^2}\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha},$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования

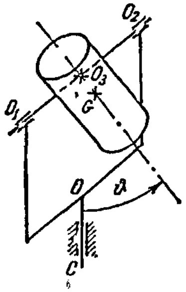
48.24(48.27). Материальная точка массы m движется по круговой рамке радиуса a, которая вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикального диаметра AB. Составить уравнение движения точки и определить момент M, необходимый для поддержания постоянства угловой скорости, *Ответ*: $\ddot{\vartheta} + \left(\frac{g}{a} - \omega^2\cos\vartheta\right)\sin\vartheta = 0, \quad M = 2ma^2\sin\vartheta\cos\vartheta\cdot\omega\dot{\vartheta}$.

48.25(48.41). Тело массы m может вращаться вокруг горизонтальной оси O_1O_2, которая в свою очередь вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси OC. Центр масс тела G лежит на расстоянии l от точки O_3 на прямой, перпендикулярной O_1O_2. Предполагая, что оси O_1O_2 и O_3G являются главными осями инерции тела в точке O_3, составить уравнение движения. Моменты инерции тела относительно главных осей равны A, B, C.

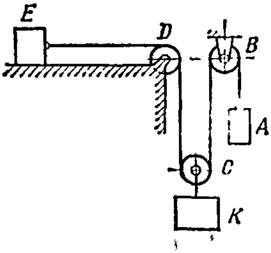
Ответ: $A\ddot{\vartheta} + \omega^2(C-B)\sin\vartheta\cos\vartheta = -mgl\sin\vartheta$, где ϑ — угол поворота вокруг O_1O_2.



К задаче 48.24



К задаче 48.25

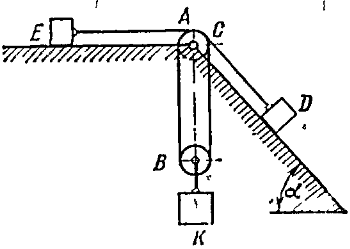


К задаче 48.26

48.26(47.20). Однородная нить, к концу которой привязан груз A массы m, огибает неподвижный блок B, охватывает подвижный блок C, поднимается вверх на неподвижный блок D и проходит параллельно горизонтальной плоскости, где к ее концу привязан груз E массы m. К оси блока C прикреплен груз K массы m_1. Коэффициент трения скольжения груза E о горизонтальную плоскость равен f. При каком условии груз K будет опускаться вниз, если начальные скорости всех грузов равнялись нулю? Найти ускорение груза K. Массами блоков и нити пренебречь.

Ответ: $m_1 > m(1+f)$,

$$w = g\frac{m_1 - m(1+f)}{m_1 + 2m}.$$



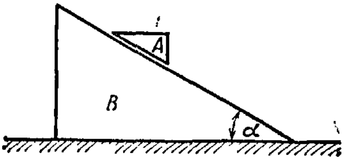
К задаче 48.27

48.27(47.21). Два груза D и E массы m каждый привязаны к концам нерастяжимой нити. Эта нить от груза E идет через неподвижный блок A, затем охватывает подвижный блок B, возвращается вверх на неподвижный блок C, соосный с блоком A, проходит параллельно гладкой наклонной плоскости, где к концу нити привязан груз D. Наклонная плоскость образует угол α с горизонтом. К подвижному блоку B прикреплен груз K массы m_1.

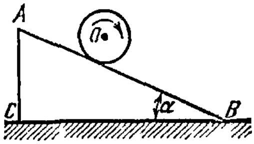
Коэффициент трения скольжения груза E о горизонтальную плоскость равен f. Массами блоков и нити пренебречь. Выяснить условие, при котором груз K будет опускаться. Найти ускорение этого груза. В начальный момент скорости всех грузов равнялись нулю.

Ответ: $m_1 > m(f+\sin\alpha)$, $\quad w = g\dfrac{m_1 - m(f+\sin\alpha)}{m_1+2m}$.

48.28(47.22). Призма A массы m скользит по гладкой боковой грани призмы B массы m_1, образующей угол α с горизонтом. Определить ускорение призмы B. Трением между призмой B и горизонтальной плоскостью пренебречь.



К задаче 48.28



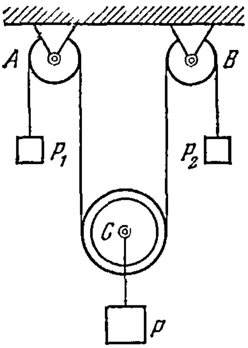
К задаче 48.29

Ответ: $w = g\dfrac{m\sin 2\alpha}{2(m_1+m\sin^2\alpha)}$.

48.29(47.23). На гладкой горизонтальной плоскости помещена треугольная призма ABC массы m, которая может скользить без трения по этой плоскости; по грани призмы AB катится без скольжения однородный круглый цилиндр массы m_1. Определить ускорение призмы.

Ответ: Ускорение направлено влево и равно

$$g\frac{m_1\sin 2\alpha}{3(m+m_1)-2m_1\cos^2\alpha}.$$



К задаче 48.30

48.30(47.24). Через блоки A и B с неподвижными осями переброшен шнур, поддерживающий подвижный блок C; части шнура, не лежащие на концах, вертикальны. Блок C нагружен гирей массы $m=4$ кг, к концам шнура прикреплены грузы массы $m_1=2$ кг и $m_2=3$ кг. Определить ускорения всех трех грузов, пренебрегая массами блоков и шнура и трением на осях.

Ответ: $w=\dfrac{1}{11}g$ (вверх), $\quad w_1=\dfrac{1}{11}g$ (вверх), $\quad w_2=\dfrac{3}{11}g$ (вниз).

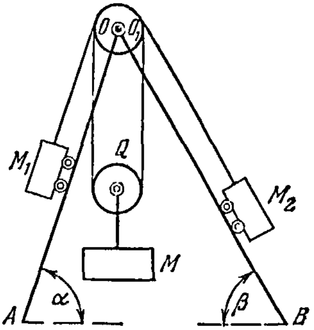
48.31(47.25). Грузы M_1 и M_2 одинаковой массы m движутся по двум наклонным направляющим OA и OB, расположенным в вертикальной плоскости под углами α и β к горизонту; нить, соединяющая эти грузы, идет от груза M_1 через блок O, вращающийся около горизонтальной оси, охватывает подвижный шкив Q, несущий груз M массы m_1, и затем через блок O_1, надетый на ту же ось, что и блок O, идет к грузу M_2. Блоки O_1 и O соосные. Определить ускорение w груза M, пренебрегая трением, а также массами блока, шкива и нити.

Ответ: $w = g\dfrac{m_1 - m(\sin\alpha + \sin\beta)}{m_1 + 2m}$.

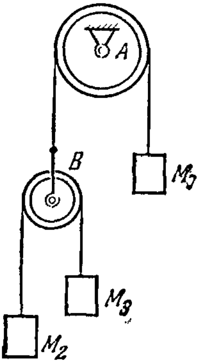
48.32(47.26). Решить предыдущую задачу, заменив грузы M_1 и M_2 катками массы m и радиуса r каждый. Катки считать сплошными однородными круглыми дисками. Коэффициент трения качения катков о наклонные плоскости равен $f_к$. Нити закреплены на осях катков.

Ответ: $w = g\dfrac{m_1 - m\left[\sin\alpha + \sin\beta + \dfrac{f_к}{r}(\cos\alpha + \cos\beta)\right]}{m_1 + 2m}$.

48.33(47.27). Дана система из двух блоков, неподвижного A и подвижного B, и трех грузов M_1, M_2 и M_3, подвешенных с помощью нерастяжимых нитей, как указано на рисунке. Массы грузов соответственно равны m_1, m_2 и m_3, при этом $m_1 < m_2 + m_3$ и $m_2 \gtrless m_3$. Массами блоков пренебречь. Найти, при каком соотношении масс m_1, m_2 и m_3 груз M_1 будет опускаться в том случае, когда начальные скорости грузов равны нулю.



К задаче 48.31



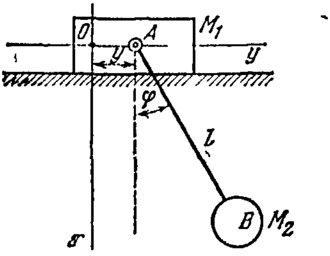
К задаче 48.33

Ответ: Должно быть $m_1 > \dfrac{4m_2m_3}{m_2 + m_3}$.

48.34(48.45). Найти ускорение тележки, по платформе которой катится без скольжения круглый цилиндр, если сама тележка скатывается тоже без скольжения по плоскости, наклоненной к горизонту под углом α и параллельной платформе тележки; образующие цилиндра перпендикулярны линиям наибольшего ската платформы. Масса тележки без колес M, масса всех колес m, масса цилиндра M_1, колеса считать однородными сплошными дисками.

Ответ: $w = \dfrac{6M + 6m + 2M_1}{6M + 9m + 2M_1}\, g \sin\alpha$.

48.35(48.37). Составить уравнения движения эллиптического маятника, состоящего из ползуна M_1 массы m_1, скользящего без трения по горизонтальной плоскости, и шарика M_2 массы m_2, соединенного с ползуном стержнем AB длины l. Стержень может вращаться вокруг оси A, связанной с ползуном и перпендикулярной плоскости рисунка. Массой стержня пренебречь. Определить период малых колебаний эллиптического маятника.



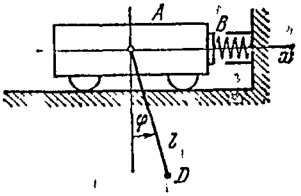
К задаче 48.35

Ответ: $\frac{d}{dt}[(m_1+m_2)y+m_2l\varphi\cos\varphi]=0$;

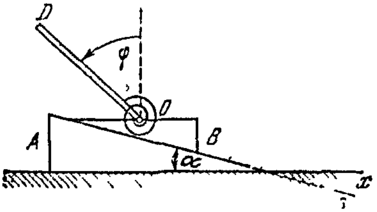
$$l\varphi+\cos\varphi\ddot{y}+g\sin\varphi=0,$$

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m_1}{m_1+m_2}\frac{l}{g}}.$$

48.36(47.28). При наезде тележки A на упругий упор B начинаются колебания подвешенного на стержне груза D. Составить дифференциальные уравнения движения материальной системы, если m_1 — масса тележки, m_2 — масса груза, l — длина стержня, c — коэффициент жесткости пружины упора B. Массой колес и всеми силами сопротивления пренебречь. Начало отсчета оси x взять в левом конце недеформированной пружины. Определить период малых колебаний груза при отсутствии упора B. Массой стержня пренебречь.



К задаче 48.36



К задаче 48.37

Указание. Пренебречь членом, содержащим множитель φ^2, считать $c=0$, $\sin\varphi\approx\varphi$, $\cos\varphi\approx 1$.

Ответ: $(m_1+m_2)\ddot{x}+m_2l\ddot{\varphi}\cos\varphi-m_2l\dot{\varphi}^2\sin\varphi=-cx$,

$$\ddot{x}\cos\varphi+l\varphi=-g\sin\varphi;\qquad T=2\pi\sqrt{\frac{m_1}{m_1+m_2}}\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

48.37(47.32). По неподвижной призме A, расположенной под углом α к горизонту, скользит призма B массы m_2. К призме B, посредством цилиндрического шарнира O и спиральной пружины с коэффициентом жесткости c, присоединен тонкий однородный стержень OD массы m_1 и длины l. Стержень совершает колебания вокруг оси O, перпендикулярной плоскости рисунка. Положения призмы B и стержня OD определены посредством координат s и φ. Написать дифференциальные уравнения движения материальной системы, состоящей из призмы B и стержня OD, пренебрегая силами трения. Определить период малых колебаний стержня OD, если $m_1gl\cos^2\alpha < 2c$.

Указание Считать $\sin\varphi \approx \varphi$, $\cos(\varphi+\alpha) \approx \cos\alpha - \varphi\sin\alpha$, затем пренебречь членами, содержащими множители φ^2 и $\varphi\ddot{\varphi}$.,

Ответ: $$(m_1+m_2)\ddot{s} + \frac{1}{2}m_1l\varphi^2\sin(\varphi+\alpha) - \frac{1}{2}m_1l\varphi\cos(\varphi+\alpha) = (m_1+m_2)g\sin\alpha, \quad \frac{1}{3}m_1l^2\ddot{\varphi} - \frac{1}{2}m_1ls\cos(\varphi+\alpha) = \frac{1}{2}m_1gl\sin\varphi - c\varphi,$$

$$T = 2\pi l\sqrt{\frac{m_1[m_1(1+3\sin^2\alpha)+4m_2]}{6(m_1+m_2)(2c-m_1gl\cos^2\alpha)}}$$

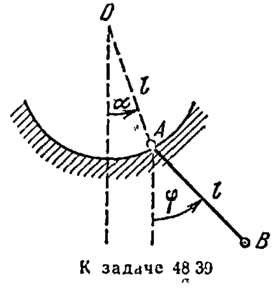
48.38(47.34). Решить задачу 48.37, считая, что призма A массы m_3 движется по гладкой горизонтальной плоскости, а ее положение определяется координатой x

Ответ: $$(m_1+m_2+m_3)\ddot{x} + (m_1+m_2)\ddot{s}\cos\alpha + m_1\frac{l}{2}\varphi^2\sin\varphi - m_1\frac{l}{2}\ddot{\varphi}\cos\varphi = 0,$$

$$(m_1+m_2)\ddot{x}\cos\alpha + (m_1+m_2)\ddot{s} + m_1\frac{l}{2}\dot{\varphi}^2\sin(\varphi+\alpha) - m_1\frac{l}{2}\varphi\cos(\varphi+\alpha) = (m_1+m_2)g\sin\alpha,$$

$$\frac{1}{3}m_1l^2\varphi - \frac{1}{2}m_1l\ddot{x}\cos\varphi - \frac{1}{2}m_1l\ddot{s}\cos(\varphi+\alpha) = \frac{1}{2}m_1gl\sin\varphi - c\varphi$$

48.39(47.30). Материальная точка A массы m_1 движется в вертикальной плоскости по внутренней гладкой поверхности неподвижного цилиндра радиуса l. Материальная точка B массы m_2, присоединенная к точке A посредством стержня AB длины l, может колебаться вокруг оси A, перпендикулярной плоскости рисунка Положения точек A и B определены с помощью углов α и φ, отсчитываемых от вертикали. Составить дифференциальные уравнения движения системы. Написать дифференциальные уравнения малых колебаний системы. Массой стержня AB пренебречь.



К задаче 48.39

Указание Пренебречь членами, содержащими множители φ^2 и α^2 а также считать $\sin(\varphi-\alpha) \approx \varphi-\alpha$, $\cos(\varphi-\alpha) \approx 1$, $\sin\alpha \approx \alpha$, $\sin\varphi \approx \varphi$

Ответ: $$(m_1+m_2)l\ddot{\alpha} + m_2l\varphi\cos(\varphi-\alpha) - m_2l\varphi^2\sin(\varphi-\alpha) = -(m_1+m_2)g\sin\alpha, \quad l\ddot{\varphi} + l\dot{\alpha}\cos(\varphi-\alpha) + l\dot{\alpha}^2\sin(\varphi-\alpha) = -g\sin\varphi,$$

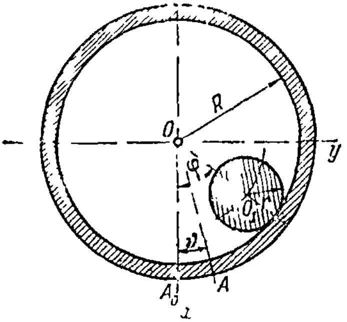
$$(m_1+m_2)l\ddot{\alpha} + m_2l\varphi = -(m_1+m_2)g\alpha, \quad l\varphi + l\ddot{\alpha} = -g\varphi.$$

48.40(48.40). Шероховатый цилиндр массы m и радиуса r катится без скольжения по внутренней поверхности полого цилиндра массы M и радиуса R, могущего вращаться около своей горизонтально расположенной оси O. Моменты инерции цилиндров относительно своих осей равны $mr^2/2$ и MR^2. Составить уравнения движения системы и найти их первые интегралы.

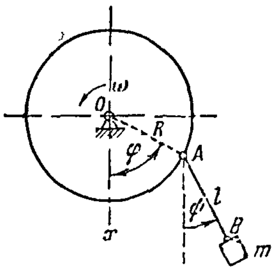
Ответ: $MR^2\dot{\vartheta} - \frac{1}{2}mR\left[(R-r)\varphi - R\vartheta\right] = C_1$,

$$\frac{1}{2}MR^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{4}m\left[(R-r)\dot{\varphi} - R\dot{\vartheta}\right]^2 + \frac{m}{2}(R-r)^2\dot{\varphi}^2 - mg(R-r)\cos\varphi = C_2,$$

где φ — угол поворота отрезка, соединяющего оси цилиндров, а ϑ — угол поворота внешнего цилиндра.



К задаче 48.40



К задаче 48.41

48.41 (48.48). Однородный диск радиуса R, имеющий массу M, может вращаться вокруг своей горизонтальной оси O. К диску на нити AB длины l подвешена материальная точка массы m. Составить уравнения движения системы.

Ответ:

$$\left(m + \frac{M}{2}\right)R^2\ddot{\varphi} + mRl\cos(\varphi-\psi)\ddot{\psi} + mRl\sin(\varphi-\psi)\dot{\psi}^2 + mgR\sin\varphi = 0,$$

$$R\cos(\varphi-\psi)\ddot{\varphi} + l\ddot{\psi} - R\sin(\varphi-\psi)\dot{\varphi}^2 + g\sin\psi = 0,$$

где φ — угол поворота диска, а ψ — угол отклонения нити от вертикали.

48.42 (48.49). Диск системы, описанной в предыдущей задаче, вращается с постоянной угловой скоростью ω. Составить уравнение движения материальной точки.

Ответ: $\ddot{\psi} - \omega^2\frac{R}{l}\sin(\omega t - \psi) + \frac{g}{l}\sin\psi = 0$.

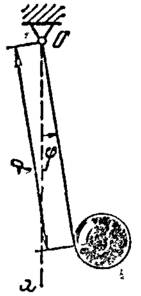
48.43 (48.31). Составить уравнения движения математического маятника массы m, подвешенного на упругой нити; длина нити в положении равновесия l, ее жесткость равна c. Найти движение маятника для случая малых колебаний. В качестве обобщенных координат взять угол φ отклонения маятника от вертикали и относительное удлинение нити z.

Ответ: $(1+z)\ddot{\varphi}+2\dot{z}\dot{\varphi}+\frac{g}{l}\sin\varphi=0,$

$$\ddot{z}-(1+z)\varphi^2+\frac{c}{m}z+\frac{g}{l}(1-\cos\varphi)=0,$$

$z=A\sin\left(\sqrt{\frac{c}{m}}t+\alpha\right)$, $\varphi=B\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t+\beta\right)$, где A, α, B, β — произвольные постоянные.

48.44(48.33). Один конец нерастяжимой тонкой нити обмотан вокруг однородного круглого цилиндра радиуса R, второй конец прикреплен к неподвижной точке O. Цилиндр, разматывая нить, опускается вниз, одновременно раскачиваясь вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку подвеса нити Пренебрегая массой нити, оставить дифференциальные уравнения движения цилиндра



К задаче 48.44

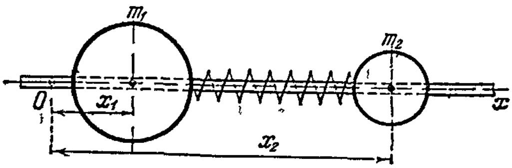
Ответ: $\rho-R\varphi-\frac{2}{3}\rho\varphi^2=\frac{2}{3}g\cos\varphi,$

$$\frac{d}{dt}(\rho^2\varphi)-R\rho\varphi^2=-g\rho\sin\varphi.$$

48.45(48.34). Пользуясь результатами, полученными при решении предыдущей задачи, составить дифференциальное уравнение малых колебаний цилиндра, если движение началось из состояния покоя и при $t=0$, $\rho=\rho_0$, $\varphi=\varphi_0\neq0$.

Ответ: $\frac{d}{dt}[F^2(t)\dot{\varphi}]+gF(t)\varphi=0$, где $F(t)=\frac{gt^2}{3}+\rho_0-R\varphi_0$.

48.46(48.35). Определить движение системы, состоящей из двух масс m_1 и m_2, насаженных на гладкий горизонтальный стержень (ось Ox), массы связаны пружиной жесткости c и могут двигаться поступательно вдоль стержня; расстояние между центрами масс при ненапряженной пружине равно l; начальное состояние системы при $t=0$ определяется следующими значениями скоростей и координат центров масс: $x_1=0$, $\dot{x}_1=u_0$, $x_2=l$, $\dot{x}_2=0$.



К задаче 48.46

Ответ: $x_1=\frac{1}{m_1+m_2}\left\{m_1u_0t+\frac{m_2u_0}{k}\sin kt\right\},$

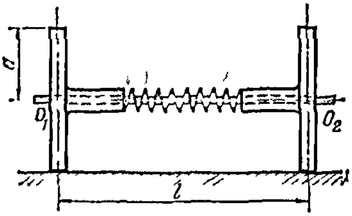
$$x_2-l=\frac{1}{m_1+m_2}\left\{m_1u_0t-\frac{m_1u_0}{k}\sin kt\right\},\quad k=\sqrt{c\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)}.$$

48.47(48.43). Система, состоящая из двух одинаковых колес радиуса a каждое, могущих независимо вращаться вокруг общей нормальной к ним оси O_1O_2 длины l, катится по горизонтальной плоскости Колеса связаны пружиной жесткости c, работающей на кручение (упругий торсион). Масса каждого колеса M, C — момент инерции колеса относительно оси вращения, A — момент инерции колеса относительно диаметра. Составить уравнения движения системы и определить движение, отвечающее начальным условиям $\varphi_1 = 0$, $\dot{\varphi}_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $\dot{\varphi}_2 = \omega$ (φ_1, φ_2 — углы поворота колес). Массой оси пренебречь.

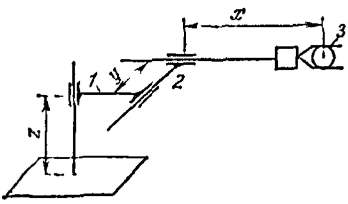
Ответ: $\varphi_1 = \frac{1}{2}\left(\omega t - \frac{\omega}{k}\sin kt\right)$, $\varphi_2 = \frac{1}{2}\left(\omega t + \frac{\omega}{k}\sin kt\right)$,

$$k = \sqrt{\frac{2c}{Ma^2 + C + 4A\left(\frac{a}{l}\right)^2}}$$

48.48. Механизм робота-манипулятора состоит из колонны для вертикального перемещения, устройства для горизонтального перемещения, состоящего из звеньев *1* и *2*, и выдвигающейся горизонтальной руки со схватом *3*. Массы звеньев механизма m_1, m_2 и m_3. Движущие силы, создаваемые приводами в поступательных парах, равны соответственно F_{01}, F_{12} и F_{23}. Составить дифференциальные уравнения движения механизма. Трением пренебречь.



К задаче 48.47

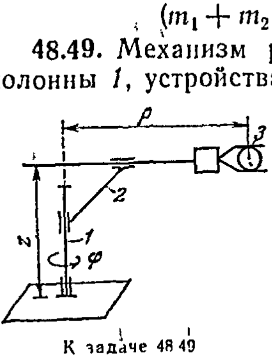


К задаче 48.48

Ответ: $m_3\ddot{x} = F_{23}$, $(m_2 + m_3)\ddot{y} = F_{12}$,

$$(m_1 + m_2 + m_3)\ddot{z} = F_{01} - (m_1 + m_2 + m_3)g.$$

48.49. Механизм робота-манипулятора состоит из поворотной колонны *1*, устройства для вертикального перемещения *2* и выдвигающейся руки со схватом *3*. Момент инерции звена *1* относительно оси поворота J_1; масса звена *2* m_2, момент инерции относительно оси поворота J_2; масса двигающейся руки со схватом m_3, расстояние от оси поворота до центра масс ρ, момент инерции относительно центральной оси J_3. К оси поворота приложен момент M, движущие силы, создаваемые приводами в поступательных парах, равны соответственно F_{12} и F_{23}. Составить дифференциальные уравнения движения механизма. Трением пренебречь.

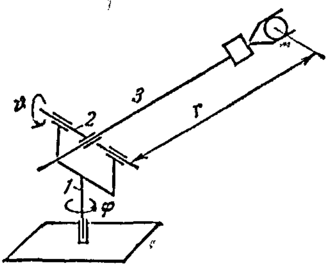


К задаче 48.49

Ответ: $\frac{d}{dt}\left[(J_1 + J_2 + J_3 + m_3\rho^2)\dot{\varphi}\right] = M$,

$$(m_2 + m_3)\ddot{z} = F_{12} - (m_2 + m_3)g, \qquad m_3(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) = F_{23}.$$

48.50. Вертикальная колонна *1*, несущая руку робота-манипулятора, может поворачиваться на угол φ. Рука со схватом поворачивается на угол ϑ и выдвигается на расстояние r. Момент инерции вертикальной колонны относительно оси вращения J_1; звенья *2* и *3* считать тонкими однородными стержнями длины l_2 и l_3 и массы m_2 и m_3; масса переносимого груза m К вертикальной оси вращения приложен момент M_φ, к оси поворота второго звена — момент M_ϑ движущая сила, создаваемая приводом в поступательной паре, F_{23} Составить дифференциальные уравнения движения механизма. Трением пренебречь



К задаче 48 50

Ответ: $\frac{d}{dt}\left[\left(J_1+\frac{1}{12}m_2l_2^2+J(r)\sin^2\vartheta\right)\varphi\right]=M_\varphi$,

$$\frac{d}{dt}(J(r)\dot{\vartheta})-J(r)\dot{\varphi}^2\sin\vartheta\cos\vartheta=M_\vartheta+\left[m_3\left(r-\frac{l_3}{2}\right)+mr\right]g\sin\vartheta,$$

$$(m_3+m)\ddot{r}-\left[m_3\left(r-\frac{l_3}{2}\right)+mr\right](\dot{\vartheta}^2+\dot{\varphi}^2\sin^2\vartheta)=F_{23}-(m_3+m)g\cos\vartheta,$$

где $J(r)=m_3\left(r^2-rl_3+\frac{l_3^2}{3}\right)+mr^2$.

48.51(48.50). Колесо катится без скольжения по горизонтальной плоскости. Радиус колеса a, его масса M; C — момент инерции колеса относительно оси, проходящей перпендикулярно плоскости колеса через его центр, A — момент инерции колеса относительно его диаметра. Составить уравнения движения колеса

Указание Использовать уравнения Лагранжа с множителями для неголономных систем

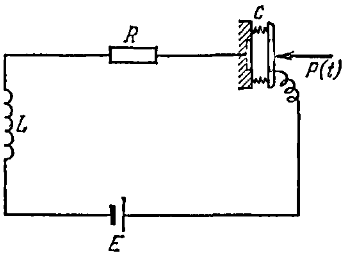
Ответ: $\frac{d}{dt}(A\psi\sin^2\vartheta)-C(\varphi+\psi\cos\vartheta)\dot{\vartheta}\sin\vartheta=0$,

$$(C+ma^2)\frac{d}{dt}(\varphi+\psi\cos\vartheta)-ma^2\vartheta\psi\sin\vartheta=0,$$

$$(A+ma^2)\vartheta-A\psi^2\sin\vartheta\cos\vartheta+$$
$$+(C+ma^2)(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\vartheta)\dot{\psi}\sin\vartheta=-mga\cos\vartheta,$$

где φ — угол поворота колеса вокруг оси, перпендикулярной его плоскости; ϑ — угол наклона плоскости колеса к горизонту, ψ — азимут вертикальной плоскости, содержащей диаметр колеса и проходящей через точку касания.

48.52(48.51). Конденсаторный микрофон состоит из последовательно соединенных катушки самоиндукции L, резистора сопротивления R и конденсатора, пластины которого связаны двумя пружинами общей жесткости c. Цепь присоединена к источнику питания с постоянной э д с. E, а на пластину конденсатора действует переменная сила $P(t)$. Емкость конденсатора в положении равновесия системы C_0, расстояние между пластинами в этом положении a, масса подвижной пластины конденсатора m. Ввести электрические и механические обобщенные координаты и составить уравнения движения системы в форме Лагранжа.



К задаче 48.52

Указания 1 Потенциальная энергия конденсатора равна $V = q^2/(2C)$ (C — емкость конденсатора, q — заряд на его обкладках), электрокинетическая энергия вычисляется по формуле $T = {}^1\!/_2 Li^2$ (L — коэффициент самоиндукции, $i = \dfrac{dq}{dt}$ — сила тока в цепи)

2 За обобщенные координаты принять изменение заряда конденсатора q и смещение пружин из положения равновесия Тогда полный заряд будет $q_0 + q$, а полное смещение $x_0 + x$; здесь q_0 — заряд конденсатора, а x_0 — смещение пружин от нейтрального положения в положение равновесия системы

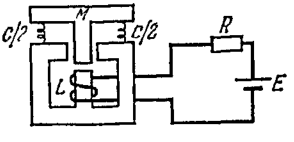
Ответ: $m\ddot{x} + cx - \dfrac{E}{a}q - \dfrac{q^2}{2C_0 a} = P(t)$,

$$L\ddot{q} + R\dot{q} - \frac{E}{a}x + \frac{q}{C_0} - \frac{qx}{aC_0} = 0.$$

48.53(48.52). Определить частоты малых свободных колебаний конденсаторного микрофона, описанного в предыдущей задаче. Сопротивлением резистора пренебречь

Ответ: $k_{1,2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\dfrac{c}{m} + \dfrac{1}{C_0 L} \pm \sqrt{\left(\dfrac{c}{m} - \dfrac{1}{C_0 L}\right)^2 + 4\dfrac{E^2}{a^2 mL}}}$.

48.54(48.54). Изображенная на рисунке система отвечает принципиальной схеме электромагнитного датчика акселерометра. Масса якоря M, общая жесткость пружин c Самоиндукция катушки изменяется вследствие изменения воздушного зазора в магнитопроводе $L = L(x)$ (x — вертикальное смещение якоря из положения, когда пружины не напряжены). К катушке присоединена электрическая цепь, состоящая из элемента с заданной э. д. с. E, сопротивление цепи равно R. Составить уравнения движения системы и определить ее положение равновесия



К задаче 48.54

Указание За обобщенные координаты принять смещение x якоря и заряд q, соответствующий току i в цепи ($i = dq/dt$)

Ответ: Уравнения движения:

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \dot{q}\dot{x}\frac{\partial L}{\partial x} = E; \quad M\ddot{x} - \frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial x}\dot{q}^2 + cx = Mg.$$

В «положении равновесия» $x = x_0$ и $i = \dot{q} = i_0$, где $i_0 = E/R$; $cx_0 = Mg + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial L}{\partial x}\right)_0 i_0^2$.

48.55(48.55). Составить уравнения малых движений вблизи положения равновесия электромагнитного датчика, описанного в предыдущей задаче

Указание. За обобщенные координаты взять изменение заряда e и вертикальное перемещение якоря из положения равновесия ξ. Функцию $L(x)$ разложить в ряд $l = L(x_0 + \xi) = L_0 + L_1\xi +$ и ограничиться в этом ряду первыми двумя членами

Ответ: $L_0 e + Re + L_1 i_0 \xi = 0, \quad M\xi + c\xi - L_1 i_0 \dot{e} = 0.$

48.56(48.56). Основание датчика, описанного в задаче 48.54, совершает малые вертикальные колебания по закону $\xi = \xi_0 \sin \omega t$. Определить закон движения якоря и ток в электрической цепи датчика

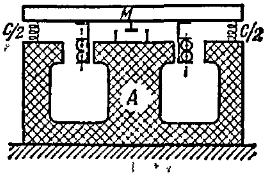
$$\text{Ответ: } i = \frac{M\xi_0\omega^3}{\Delta} L_1 i_0 \{R(c - M\omega^2)\cos\omega t + {}$$

$$+ [L_1^2 i_0^2 \omega + L_0\omega(c - M\omega^2)] \sin\omega t\},$$

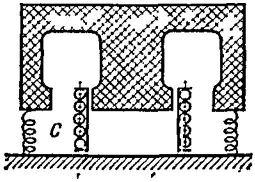
$$x = \frac{M\xi_0\omega^3}{\Delta}\{-[L_1^2 i_0^2 L_0\omega^2 + (R^2 + L_0^2\omega^2(c - M\omega^2)] \sin\omega t + \omega L_1^2 i_0^2 R \cos\omega t\},$$

где $\Delta = R^2(c - M\omega^2)^2 + \omega^2[L_1^2 i_0^2 + L_0(c - M\omega^2)]^2$.

48.57(48.57). Электромеханическая движущая система состоит из цилиндрического постоянного магнита с концентрическими полюсами A, создающего радиальное поле, и якоря массы M, опирающегося на пружину жесткости c. Якорь соединен с катушкой,



К задаче 48.57



К задаче 48.58

состоящей из n витков, и с механическим демпфером, сопротивление которого пропорционально скорости якоря (коэффициент сопротивления β); средний радиус катушки r, ее самоиндукция L, сопротивление R, магнитная индукция в зазоре магнита B. К зажимам катушки приложено переменное напряжение $V(t)$. Составить уравнения движения системы

Указание. Обобщенные силы, отвечающие взаимодействию катушки и магнита, равны $Q_q = -2\pi rn Bx$, $Q_x = 2\pi rn Bq$ (Q_q — электродвижущая сила, индуцированная в электрической цепи, а Q_x — сила взаимодействия катушки с магнитом)

Ответ: $L\ddot{q} + Rq + 2\pi rnB\dot{x} = V(t), \quad M\ddot{x} + \beta\dot{x} + cx - 2\pi rB\dot{q} = 0.$

48.58(48.58). К основанию сейсмометра с индукционным преобразователем прикреплена катушка из n витков радиуса r, соединенная с электрической регистрирующей системой, схематизируемой цепью с самоиндукцией L и сопротивлением R. Магнитный сердечник, создающий радиальное магнитное поле, характеризуемое в зазоре магнитной индукцией B, опирается на основание с помощью пружин общей жесткости c. На сердечник действует также сила сопротивления, пропорциональная его скорости, вызываемая демпфером, создающим силу сопротивления $\beta\dot x$. Составить уравнения, определяющие перемещение сердечника и ток в цепи в случае малых вертикальных колебаний основания сейсмометра по закону $\xi = \xi_0 \sin \omega t$

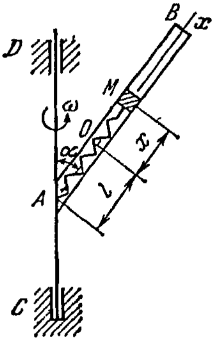
Указание Обобщенные силы, отвечающие взаимодействию катушки и магнита, даются формулами $Q_q = -2\pi rnBx$ и $Q_x = 2\pi rnBq$

Ответ: $M\ddot x + \beta\dot x + cx - 2\pi rnB\dot q = M\xi_0\omega^2 \sin \omega t,$

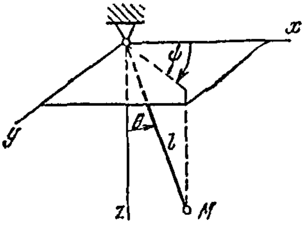
$Lq + R\dot q + 2\pi rnB\dot x = 0.$

§ 49. Интегралы движения, преобразование Рауса, канонические уравнения Гамильтона, уравнения Якоби — Гамильтона, принцип Гамильтона — Остроградского

49.1(49.1). Трубка AB вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси CD, составляя с ней угол α. В трубке находится пружина жесткости c, один конец которой укреплен в точке A; ко второму концу пружины прикреплено тело M массы m, скользящее без трения внутри трубки В недеформированном состоянии длина пружины равна $AO = l$. Приняв за обобщенную координату расстояние x от тела M до точки O, определить кинетическую энергию T тела M и обобщенный интеграл энергии.



К задаче 49.1



К задаче 49.2

Ответ: $T = \frac{1}{2} m [\dot x^2 + (l + x)^2 \omega^2 \sin^2 \alpha],$

$m\dot x^2 - m(l + x)^2 \omega^2 \sin^2 \alpha + cx^2 + 2mg \cos \alpha x = h,$

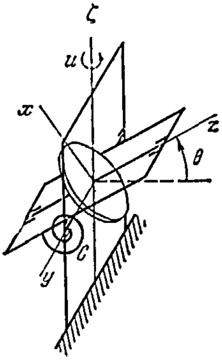
где h — постоянная интегрирования.

49.2(49.2). Найти первые интегралы движения сферического маятника длины l, положение которого определяется углами θ и ψ.

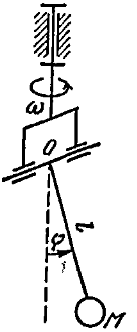
Ответ 1) Интеграл, соответствующий циклической координате ψ (интеграл моментов количества движения относительно оси z): $\dot\psi \sin^2 \theta = n$;

2) интеграл энергии: $\dot\theta^2+\dot\psi^2\sin^2\theta-2\frac{g}{l}\cos\theta=h$, где n и h — постоянные интегрирования.

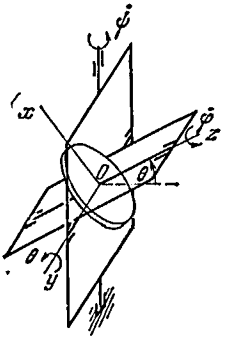
49.3(49.3). Гироскопический тахометр установлен на платформе, вращающейся с постоянной угловой скоростью u вокруг оси ζ. Определить первые интегралы движения, если коэффициент жесткости спиральной пружины равен c, моменты инерции гироскопа относительно главных центральных осей x, y, z соответственно равны A, B и C, причем $B=A$; силы трения на оси z собственного вращения гироскопа уравновешиваются моментом, создаваемым статором электромотора, приводящим во вращение гироскоп; силами трения на оси прецессии y пренебречь.



К задаче 49.3



К задаче 49.4



К задаче 49.5

Ответ: 1) Интеграл, соответствующий циклической координате φ (интеграл моментов количества движения относительно оси z): $\varphi+u\sin\theta=n$;

2) обобщенный интеграл энергии:

$$\frac{1}{2}[(C\varphi^2+A\dot\theta^2)-(Cu^2\sin^2\theta+Au^2\cos^2\theta)]+\frac{1}{2}c\theta^2=h.$$

49.4(49.4). Материальная точка M соединена с помощью стержня OM длины l с плоским шарниром O, горизонтальная ось которого вращается вокруг вертикали с постоянной угловой скоростью ω. Определить условие устойчивости нижнего вертикального положения маятника, период его малых колебаний при выведении его из этого положения и обобщенный интеграл энергии. Массой стержня пренебречь.

Ответ: 1) $\omega^2<\frac{g}{l}$; 2) $T=\frac{2\pi}{\sqrt{g/l-\omega^2}}$;

3) $\dot\varphi^2-\omega^2\sin^2\varphi-2\frac{g}{l}\cos\varphi=h$.

49.5(49.5). Уравновешенный гироскоп в кардановом подвесе движется по инерции. Определить кинетическую энергию системы и первые интегралы уравнений движения, если момент инерции внешней рамки относительно неподвижной оси вращения ξ равен

J_ξ, моменты инерции внутренней рамки относительно главных центральных осей x, y, z равны J'_x, J'_y, J'_z, а соответствующие моменты инерции гироскопа — J_x, J_y и J_z $(J_x = J_y)$.

Ответ. 1) $T = \frac{1}{2}\{[J_\xi + J'_z + (J'_x + J_x - J'_z)\cos^2\theta]\psi^2 +$

$$+ (J_y + J'_y)\theta^2 + J_z(\dot\varphi + \psi\sin\theta)^2\};$$

2) интеграл, соответствующий циклической координате φ (интеграл моментов количества движения гироскопа относительно оси z). $\varphi + \psi\sin\theta = n$,

3) интеграл, соответствующий циклической координате ψ (интеграл моментов количества движения всей системы относительно оси ξ):

$$[J_\xi + J'_z + (J'_x + J_x - J'_z)\cos^2\theta]\psi + J_z n\sin\theta = n_1;$$

4) интеграл энергии:

$$[J_\xi + J'_z + (J'_x + J_x - J'_z)\cos^2\theta]\dot\psi^2 + (J_y + J'_y)\dot\theta^2 = h.$$

49.6(49.8). Гироскоп установлен в кардановом подвесе. Вокруг осей ξ и y вращения рамок подвеса действуют моменты внешних сил M_ξ и M_y. Игнорируя циклическую координату φ, найти 1) дифференциальные уравнения движения для координат ψ и θ, 2) гироскопические члены (См рисунок к задаче 49 5)

Ответ. 1) $[J_\xi + J'_z + (J'_x + J_x - J'_z)\cos^2\theta]\psi -$

$$- 2(J'_x + J_x - J'_z)\cos\theta\sin\theta\theta\psi + J_z n\cos\theta\theta = M_\xi,$$

$$(J_y + J'_y)\theta + (J'_x + J_x - J'_z)\cos\theta\sin\theta\psi^2 - J_z n\cos\theta\psi = M_y,$$

2) $J_z n\cos\theta\theta$, $\quad -J_z n\cos\theta\psi$.

49.7(49.9). Составить функцию Гамильтона и канонические уравнения движения для математического маятника массы m и длины l, положение которого определяется углом φ отклонения его от вертикали. Проверить, что полученные уравнения эквивалентны обычному дифференциальному уравнению движения математического маятника

Ответ. 1) $H = \frac{1}{2}\frac{p^2}{ml^2} - mgl\cos\varphi$; 2) $\varphi = \frac{p}{ml^2}$, $\dot p = -mgl\sin\varphi$.

49.8(49.10). Материальная точка массы m подвешена с помощью стержня длины l к плоскому шарниру, горизонтальная ось которого вращается вокруг вертикали с постоянной угловой скоростью ω (см рисунок к задаче 49 4) Составить функцию Гамильтона и канонические уравнения движения Массу стержня не учитывать.

Ответ: 1) $H = \frac{1}{2}\frac{p^2}{ml^2} - \frac{ml^2}{2}\omega^2\sin^2\varphi - mgl\cos\varphi$;

2) $\dot\varphi = \frac{p}{ml^2}$ $\quad \dot p = ml^2\omega^2\sin\varphi\cos\varphi - mgl\sin\varphi$

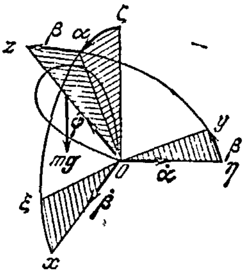
49.9(49.11). Вертикальное положение оси симметрии волчка, вращающегося относительно неподвижной точки O под действием силы тяжести, определяется углами α и β Исключив циклическую координату φ (угол собственного вращения), составить для углов α и β функции Рауса и Гамильтона. Масса волчка равна m, расстояние от его центра масс до точки O равно l, момент инерции относительно оси симметрии z равен C, а относительно осей x и y равен A

Ответ: $R = \frac{1}{2} A (\cos^2 \beta\alpha^2 + \beta^2) -$

$- Cn \sin \beta\dot{\alpha} + mgl \cos\alpha \cos\beta$,

$$H = \frac{1}{2A}\left[\frac{(P_\alpha + Cn \sin\beta)^2}{\cos^2\beta} + P_\beta^2\right] + mgl \cos\alpha \cos\beta,$$

где $n = \varphi - \sin\beta\dot{\alpha} = \text{const}$. (Здесь и в дальнейшем символы P_α, P_β и т. п. означают обобщенные импульсы)



К задаче 49.9

49.10(49.12). Пользуясь результатами, полученными при решении предыдущей задачи, составить для канонических переменных Гамильтона дифференциальные уравнения малых колебаний волчка около верхнего вертикального положения.

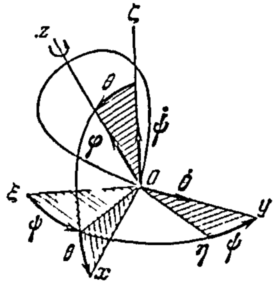
Ответ: $\alpha = \frac{1}{A}(P_\alpha + Cn\beta)$, $\quad \dot{P}_\alpha = mgl\alpha$, $\quad \beta = \frac{1}{A} P_\beta$,

$$\dot{P}_\beta = -\frac{Cn}{A}(P_\alpha + Cn\beta) + mgl\beta$$

49.11(49.13). Положение оси симметрии z волчка, движущегося относительно неподвижной точки O под действием силы тяжести, определяется углами Эйлера, углом прецессии ψ и углом нутации θ Составить функцию Гамильтона для углов ψ, θ и φ (угол собственного вращения) и соответствующих импульсов, если m — масса волчка, l — расстояние от его центра масс до точки O, C — момент инерции относительно оси z, A — момент инерции относительно любой оси, лежащей в экваториальной плоскости, проходящей через точку O

Ответ: $H = \frac{1}{2A}\left[\frac{(P_\psi - P_\varphi \cos\theta)^2}{\sin^2\theta} + P_\theta^2\right] +$

$+ \frac{1}{2C} P_\varphi^2 + mgl \cos\theta$.



К задаче 49.11

49.12(49.14). В условиях предыдущей задачи составить канонические уравнения движения волчка.

Ответ: $\dot{\psi} = \frac{P_\psi - P_\varphi \cos\theta}{A \sin^2\theta}$, $\quad \dot{P}_\psi = 0$,

$$\theta = \frac{P_\theta}{A}, \quad \dot{P}_\theta = -\frac{(P_\varphi \cos\theta - P_\psi)(P_\psi \cos\theta - P_\varphi)}{A \sin^3\theta} + mgl \sin\theta,$$

$$\dot{\varphi} = -\frac{P_\psi - P_\varphi \cos\theta}{A \operatorname{tg}\theta \sin\theta} + \frac{P_\varphi}{C}, \quad P_\varphi = 0.$$

49.13(49.15). Свободная точка единичной массы движется в вертикальной плоскости xy под действием силы тяжести Составить дифференциальное уравнение в частных производных Якоби — Гамильтона и найти его полный интеграл (ось y направлена вертикально вверх)

Ответ: $$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+gy=0,$$
$$V=b_1t+b_2x\pm\frac{1}{3g}\sqrt{(-2gy-2b_1-b_2^2)^3}+C,$$

где b_1, b_2 и C — произвольные постоянные Знак «+» следует брать при подъеме, знак «—» при спуске

49.14(49.16). Пользуясь результатами, полученными при решении предыдущей задачи, и свойствами полного интеграла уравнения Якоби — Гамильтона, найти первые интегралы уравнений движения точки

Ответ: $$\frac{\partial V}{\partial b_1}=t+\frac{1}{g}\sqrt{-2gy-2b_1-b_2^2}=a_1,$$
$$\frac{\partial V}{\partial b_2}=x+\frac{b_2}{g}\sqrt{-2gy-2b_1-b_2^2}=a_2,$$
$$\frac{\partial V}{\partial x}=b_2=\dot{x},\quad \frac{\partial V}{\partial y}=\sqrt{-2gy-2b_1-b_2^2}=\dot{y},$$

где a_1, a_2, b_1 и b_2 — произвольные постоянные.

49.15(49.17). Физический маятник массы M вращается вокруг неподвижной горизонтальной оси Момент инерции маятника относительно этой оси равен J, расстояние от центра масс маятника до оси равно l. Составить дифференциальное уравнение Якоби — Гамильтона, найти его полный интеграл и первые интегралы движения маятника (нулевой уровень потенциальной энергии взять на уровне оси маятника)

Ответ 1) $$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2J}\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)^2-Mgl\cos\varphi=0;$$

2) $$V=bt\pm\sqrt{2J}\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi}\sqrt{Mgl\cos\varphi-b}\,d\varphi;$$

3) $$t\mp\sqrt{\frac{J}{2}}\int\limits_{\varphi}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{Mgl\cos\varphi-b}}=a,\quad \pm\sqrt{2J}\sqrt{Mgl\cos\varphi-b}=J\dot{\varphi},$$

где a и b — произвольные постоянные интегрирования

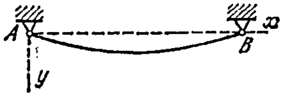
49.16(49.18). Движение волчка, имеющего одну неподвижную точку O, определяется углами Эйлера ψ, θ и φ Пользуясь результатами решения задачи 49 11, составить уравнение в частных производных Якоби — Гамильтона и найти полный интеграл его

Ответ: 1) $$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2A\sin^2\theta}\left(\frac{\partial V}{\partial \psi}-\frac{\partial V}{\partial \varphi}\cos\theta\right)^2+\frac{1}{2A}\left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)^2+$$
$$+\frac{1}{2C}\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)^2+mgl\cos\theta=0;$$

2) $V = b_1 t + b_2\psi + b_3\varphi +$

$$+\int \sqrt{-2Ab_1 - \frac{Ab_3^2}{C} - \frac{(b_2 - b_3\cos\theta)^2}{\sin^2\theta} - 2Amgl\cos\theta}\,d\theta.$$

49.17(49.19). Концы струны закреплены в неподвижных точках A и B, расстояние между которыми равно l. Считая, что натяжение T струны одинаково во всех точках, определить действие по Гамильтону для малых колебаний струны. Предполагается, что колебания происходят в одной вертикальной плоскости xy и что на струну действуют только силы натяжения, линейная плотность струны равна ρ.



К задаче 49 17

Ответ: $S = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\int_0^l \left[\rho\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 - T\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]dx\,dt$, где $y = y(x, t)$.

49.18(49.20). Пользуясь принципом Гамильтона — Остроградского и результатами решения предыдущей задачи, составить дифференциальное уравнение колебаний струны.

Ответ: $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, где $a^2 = \frac{T}{\rho}$; граничные условия: $y(0, t) = y(l, t) = 0$.

49.19(49.21). Абсолютно гибкая однородная и нерастяжимая нить длины l подвешена за один конец в точке O. Определить действие по Гамильтону для малых колебаний нити около вертикали, происходящих под действием силы тяжести. Масса единицы длины нити равна ρ

Ответ: $S = \frac{\rho}{2}\int_{t_1}^{t_2}\int_0^l \left[\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 - g(l-x)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]dx\,dt$,

где $y = y(x, t)$.

К задаче 49 19

49.20(49.22). Пользуясь принципом Гамильтона — Остроградского и результатами решения предыдущей задачи, составить дифференциальное уравнение малых колебаний подвешенной за один конец нити

Ответ: $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = g\frac{\partial}{\partial x}\left[(l-x)\frac{\partial y}{\partial x}\right]$; граничные условия:

1) $y(0, t) = 0$, 2) $y(l, t)$, $\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=l}$ и $\left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{x=l}$ конечны.

49.21. Пользуясь принципом Гамильтона — Остроградского, составить дифференциальное уравнение продольных колебаний тонкого стержня, заделанного на одном конце и с массой m на другом конце, и получить граничные условия. Плотность материала стержня ρ, модуль продольной упругости E, площадь поперечного сечения F, длина l.

Ответ: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, где $u(x, t)$ — перемещение в направлении продольной оси, $a = \sqrt{E/\rho}$; *граничные условия*:

$$u|_{x=0} = 0, \quad m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Big|_{x=l} = -EF \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l}.$$

49.22. Составить дифференциальное уравнение крутильных колебаний стержня, заделанного на одном конце, с диском на другом конце. Плотность материала стержня ρ, модуль сдвига G, поперечное сечение — круг радиуса r, длина стержня l. Момент инерции диска J.

Ответ: $\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}$, где $\vartheta(x, t)$ — *угол поворота поперечного* сечения, $a = \sqrt{G/\rho}$, граничные условия: $\vartheta|_{x=0} = 0$, $J \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2}\Big|_{x=l} = -GJ_p \frac{\partial \vartheta}{\partial x}\Big|_{x=l}$, где $J_p = \pi r^4/2$.

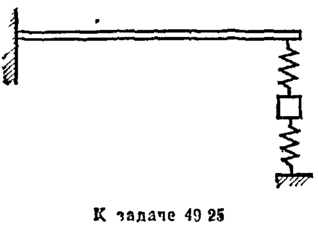
49.23. Пользуясь принципом Гамильтона — Остроградского, составить дифференциальное уравнение поперечных колебаний шарнирно опертой балки, а также получить граничные условия. Плотность материала балки ρ, модуль продольной упругости E, площадь поперечного сечения F, момент инерции поперечного сечения J, длина балки l

Ответ: $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = 0$, где $v(x, t)$ — прогиб балки, $c = \sqrt{\frac{EJ}{\rho F}}$, граничные условия: $v|_{x=0} = 0$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\Big|_{x=0} = 0$, $v|_{x=l} = 0$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\Big|_{x=l} = 0$.

49.24. Пользуясь принципом Гамильтона — Остроградского, получить граничные условия в задаче о поперечных колебаниях консольной балки длины l

Ответ: $v|_{x=0} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0$,

$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\Big|_{x=l} = 0$, $\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\Big|_{x=l} = 0$.



К задаче 49.25

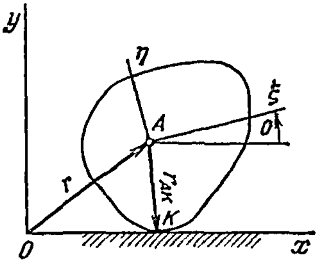
49.25. Пользуясь принципом Гамильтона — Остроградского, составить уравнения малых колебаний системы, состоящей из консольной балки длины l и груза массы m, прикрепленного к балке и к основанию пружинами жесткости c. Плотность материала балки ρ, модуль продольной упругости E, площадь поперечного сечения F, момент инерции поперечного сечения J.

Ответ: $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = 0$, где $c = \sqrt{\frac{EJ}{\rho F}}$, $v|_{x=0} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\Big|_{x=l} = 0$, $EJ \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\Big|_{x=l} = c(v|_{x=l} - u)$, $m\ddot{u} = c(v|_{x=l} - 2u)$.

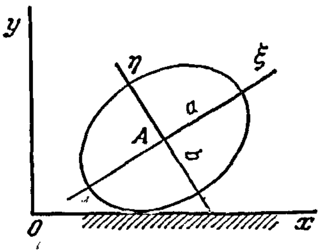
§ 50. Системы с качением. Неголономные связи

50.1. Показать, что условие качения диска без проскальзывания по заданной кривой на поверхности выражается в виде конечного соотношения между обобщенными координатами

Ответ: $s = r\varphi$, где s — путь, пройденный точкой контакта вдоль кривой, r — радиус диска, φ — угол поворота вокруг оси, ортогональной плоскости диска ($\varphi = 0$ при $s = 0$).



К задаче 50 2



К задаче 50 3

50.2. Получить условие качения без скольжения тела, поверхность которого является цилиндрической поверхностью, по плоскости.

Указание Считать заданным уравнение направляющей — кривой, которая получается в плоскости поперечного сечения цилиндрической поверхности в системе координат, жестко скрепленной с телом В качестве параметров, определяющих положение сечения тела на плоскости, принять x, y — координаты полюса A, угол θ поворота системы координат $A\xi\eta\zeta$, скрепленной с телом

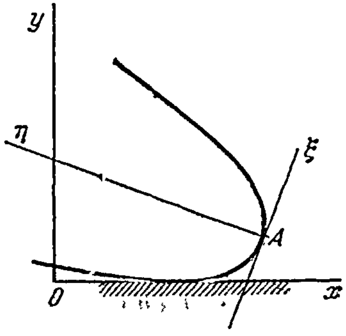
Ответ: $x - (\xi_K \sin\theta + \eta_K \cos\theta)\,\theta = 0$, $y + (\xi_K \cos\theta - \eta_K \sin\theta)\,\theta = 0$, где ξ_K, η_K — координаты точки соприкосновения.

50.3. Решить предыдущую задачу в случае, когда направляющая цилиндрической поверхности является эллипсом.

Ответ: $x + (a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta)^{1/2}\,\theta = 0$,

$$y - \frac{(a^2 - b^2)\,\theta \sin\theta \cos\theta}{(a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta)^{1/2}} = 0,$$

где x, y — координаты центра эллипса, a — большая, b — малая полуоси эллипса В частном случае $b = a$ получаем известное условие $\dot{x} + a\theta = 0$, $y = 0$ качения кругового цилиндра по плоскости.



К задаче 50 4

50.4. Решить задачу 50 2 в случае, когда направляющая цилиндрической поверхности является параболой.

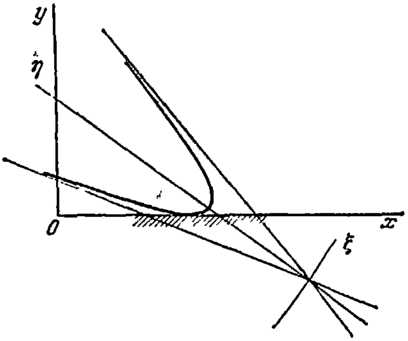
Ответ: $2x + p\theta \sin\theta \operatorname{tg}\theta = 0$, $2y - p\theta(2 + \operatorname{tg}^2\theta)\sin\theta = 0$, где x, y — координаты вершины параболы $\xi^2 = 2p\eta$.

50.5. Решить задачу 50 2 в случае, когда направляющая цилиндрической поверхности является ветвью гиперболы.

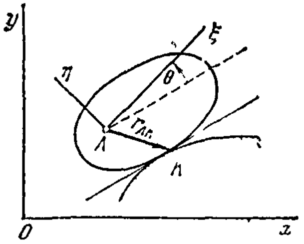
Ответ: $\dot{x} - (a^2\cos^2\theta - b^2\sin^2\theta)^{1/2}\,\theta = 0,$

$$\dot{y} - \frac{(a^2+b^2)\,\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta}{(a^2\cos^2\theta - b^2\sin^2\theta)^{1/2}} = 0,$$

где x, y — координаты точки пересечения асимптот гиперболы $\eta^2/a^2 - \xi^2/b^2 = 1$.



К задаче 50 5

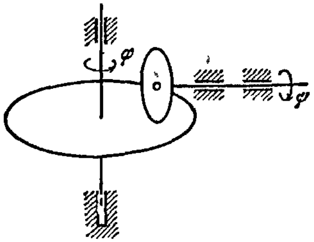


К задаче 50 6

50.6. Получить условие качения без скольжения тела, ограниченного цилиндрической поверхностью, по цилиндрической поверхности. В качестве параметров, определяющих положение сечения тела на плоскости, принять s, θ, где s — длина дуги вдоль направляющей опорной поверхности, отсчитываемая от некоторой точки до точки K соприкосновения двух направляющих, θ — угол между осью $A\xi$ системы координат $A\xi\eta$, скрепленной с сечением тела, и касательной в точке K

Ответ: $$ds = \left[\left(\frac{d\xi_K}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{d\eta_K}{d\theta}\right)^2\right]^{1/2} d\theta,$$

где ξ_K, η_K — координаты точки K в системе координат $A\xi\eta$.



К задаче 50 8

50.7. Решить предыдущую задачу в случае, когда по круговому цилиндру радиуса r катится без скольжения цилиндрическое тело, направляющей которого является 1) эллипс; 2) парабола, 3) ветвь гиперболы

Ответ: 1) $r\,d\psi = a^2b^2(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)^{-3/2}\,d\theta,$

2) $r\,d\psi = p\cos^{-3}\theta\,d\theta,$ 3) $r\,d\psi = a^2b^2(a^2\cos^2\theta - b^2\sin^2\theta)^{-3/2}\,d\theta.$

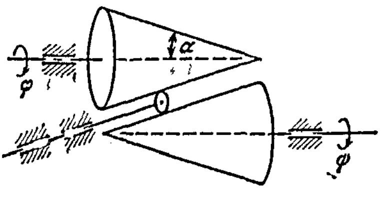
Смысл параметров такой же, как в задачах 50 3, 50.4, 50 5

50.8. В вариаторе угловой скорости (см рисунок) расстояние диска радиуса r от оси горизонтального абсолютно шероховатого диска может изменяться по произвольному закону. Найти связь между углами поворота φ и ψ дисков.

Ответ: $r\,d\psi = x\,d\varphi$. Это соотношение в общем случае не интегрируется.

50.9. Два шероховатых круговых конуса, оси которых параллельны, соприкасаются при помощи колесика. Ось колесика параллельна образующим конусов Колесико может перемещаться вдоль своей оси по произвольному закону. Найти связь между угловыми скоростями вращения конусов, если α — угол между осью и образующей конуса, h — высота конуса.

Ответ: $x\dot\varphi = \left(\frac{h}{\cos\alpha} - x\right)\dot\psi$, где x — расстояние колесика от вершины верхнего конуса.

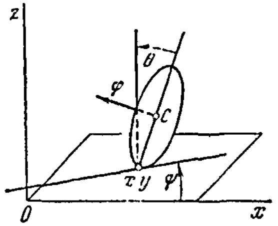


К задаче 50 9

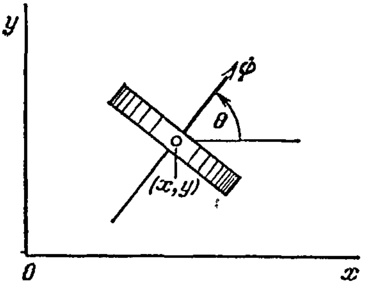
50.10. Конек с полукруглым лезвием катится по льду. Написать условие отсутствия проскальзывания конька в поперечном направлении

Ответ: $\dot x\sin\theta - \dot y\cos\theta = 0$, где x, y — координаты точки соприкосновения конька со льдом, θ — угол между прямой пересечения плоскости конька с плоскостью льда и осью Ox

50.11. Найти уравнение кинематической связи при качении диска радиуса a по абсолютно шероховатой плоскости, приняв в качестве параметров, определяющих положение диска,



К задаче 50 11



К задаче 50 13

1) координаты x_C, y_C, z_C центра диска и углы Эйлера θ, ψ, φ, 2) координаты x, y точки контакта диска с плоскостью и углы Эйлера θ, ψ, φ.

Ответ: 1) $x_C - a\theta\cos\theta\sin\psi - a\dot\psi\sin\theta\cos\psi - a\varphi\cos\psi = 0$,

$\dot y_C + a\theta\cos\theta\cos\psi - a\dot\psi\sin\theta\sin\psi - a\dot\varphi\sin\psi = 0$, $\dot z_C + a\dot\theta\sin\theta = 0$. Последнее уравнение сводится к конечному соотношению $z_C = a\cos\theta$.

2) $x = a\dot\varphi\cos\psi$, $\dot y = a\dot\varphi\sin\psi$.

50.12. Решить предыдущую задачу для диска с острым краем, когда проскальзывание отсутствует лишь в поперечном направлении.

Ответ: 1) $\dot x_C\sin\psi - \dot y_C\cos\psi - a\theta\cos\theta = 0$, $z_C = a\cos\theta$,

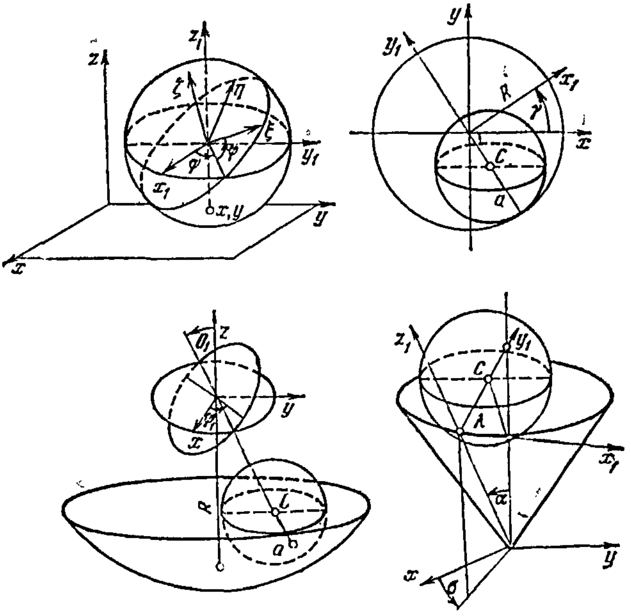
2) $\dot x\sin\psi - \dot y\cos\psi = 0$.

50.13. Колесо радиуса a с поперечной насечкой (шестерня) катится по плоскости так, что его ось всегда параллельна плоскости. Найти уравнение кинематической связи

Указание Поперечная насечка не препятствует скольжению колеса в направлении оси собственного вращения

Ответ: $\dot x \sin\theta - \dot y \cos\theta - a\dot\varphi = 0$

50.14. Шар радиуса a катается по абсолютно шероховатой поверхности. Найти уравнения кинематической связи в случаях,



К задаче 50 14

когда поверхность представляет собой 1) плоскость, 2) цилиндр радиуса R, 3) сферическую чашку радиуса R $(R > a)$ 4) конус с углом α между осью и образующей

Указание В качестве обобщенных координат выбрать координаты точки соприкосновения шара с поверхностью и углы Эйлера

Ответ 1) $\dot x - a\theta \sin\psi + a\varphi \sin\theta \cos\psi = 0,$

$$\dot y + a\theta \cos\psi + a\dot\varphi \sin\theta \sin\psi = 0;$$

2) $(R - a)\dot\gamma + a(\varphi\cos\theta + \psi) = 0,$

$$\dot z - a\theta \cos(\psi - \gamma) - \dot a\varphi \sin\theta \sin(\psi - \gamma) = 0;$$

3) $(R - a)\dot\psi_1 \sin\theta_1 + a\theta \cos\theta_1 \sin(\dot\psi - \psi_1) + a\dot\psi \sin\theta_1 +$

$$+ a\varphi[\cos\theta \sin\theta_1 - \sin\theta \cos\theta_1 \cos(\psi - \psi_1)] = 0,$$

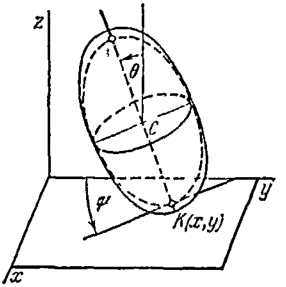
$$(R - a)\theta_1 + a\theta \cos(\psi - \psi_1) + a\varphi \sin\theta \sin(\psi - \psi_1) = 0;$$

4) $\lambda\dot\sigma \sin\alpha + a\dot\theta\cos\alpha\sin(\psi-\sigma) + a\dot\psi\sin\alpha +$
$+ a\dot\varphi[\cos\theta\cos\alpha - \sin\theta\cos\alpha\cos(\psi-\sigma)] = 0,$

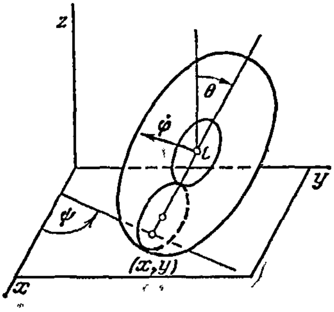
$\lambda - a\theta\cos(\psi-\sigma) + a\varphi\sin\theta\sin(\psi-\sigma) = 0.$

50.15. Эллипсоид вращения (a — большая полуось, b — малая полуось) катается по абсолютно шероховатой плоскости Написать уравнение кинематической связи, приняв за обобщенные координаты x, y, θ, ψ, φ, где x, y — координаты точки соприкосновения эллипсоида с плоскостью, θ, ψ, φ — углы Эйлера

Ответ: $(\dot x\sin\psi - y\cos\psi)(a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta)^{3/2} - a^2b^2\theta = 0,$
$(\dot x\cos\psi + \dot y\sin\psi)(a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta)^{3/2} + b^2\varphi\sin\theta = 0.$



К задаче 50 15

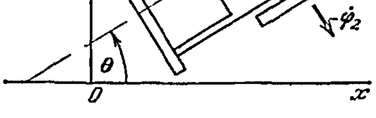


К задаче 50 16

50.16. Тороидальное тело катается по абсолютно шероховатой плоскости, b — радиус кривизны меридиана тора на экваторе, $a+b$ — радиус экваториальной окружности тора. Найти уравнения кинематической связи, приняв за обобщенные координаты x, y, θ, ψ, φ, где x, y — координаты точки соприкосновения тора с плоскостью, θ — угол наклона тора, ψ — угол между следом средней плоскости тора и осью Ox, φ — угол собственного вращения тора

Ответ: $\dot x + \dot\varphi(a + b\cos\theta)\cos\psi +$
$+ b\theta\sin\psi = 0,$

$\dot y + \dot\varphi(a+b\cos\theta)\sin\psi - b\theta\cos\psi = 0.$



К задаче 50 17

50.17. Определить число обобщенных координат и число степеней свободы двухколесной тележки Корпус тележки движется параллельно плоскости, по которой катаются без скольжения колеса, свободно вращающиеся на общей оси, r — радиус колес, l — длина полуоси

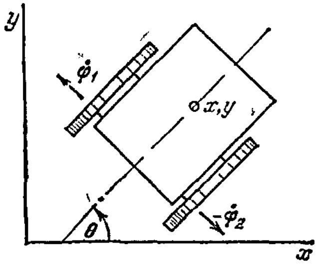
Ответ: Четыре обобщенных координаты x, y, φ_1, θ, которые связаны двумя неинтегрируемыми соотношениями

$$\dot x\cos\theta + y\sin\theta - r\dot\varphi_1 - l\theta = 0, \qquad \dot x\sin\theta - y\cos\theta = 0.$$

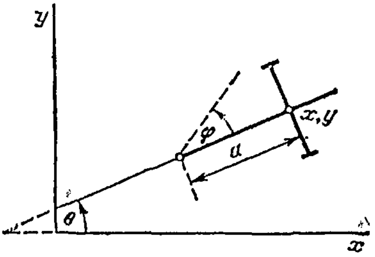
Система обладает двумя степенями свободы.

50.18. Определить число обобщенных координат и число степеней свободы гусеничного трактора, учитывая, что гусеницы обеспечивают качение без скольжения лишь в продольном направлении, r — радиус опорных колес, $2l$ — ширина колеи.

Ответ Четыре обобщенных координаты x, y, φ_1, θ, которые связаны одним неинтегрируемым соотношением $\dot x\cos\theta+\dot y\sin\theta-r\dot\varphi_1-l\dot\theta=0$ Система имеет три степени свободы



К задаче 50.18



К задаче 50.19

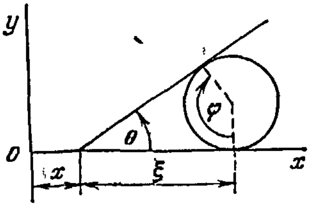
50.19. Определить число обобщенных координат и число степеней свободы буера.

Ответ: Четыре обобщенных координаты x, y, θ, φ, которые связаны двумя неинтегрируемыми соотношениями

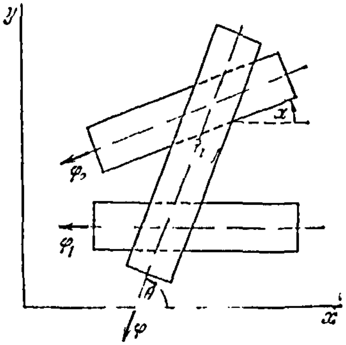
$$(\dot x\cos\theta+\dot y\sin\theta)\,\mathrm{tg}\,\varphi-a\dot\theta=0,\quad \dot x\sin\theta-\dot y\cos\theta=0.$$

Система имеет две степени свободы

50.20. Абсолютно шероховатый диск радиуса r катится по прямой На диск опирается стержень, конец которого скользит по той же прямой. Определить число обобщенных координат и число степеней свободы системы, состоящей из диска и стержня.



К задаче 50.20



К задаче 50.21

Ответ: Одна обобщенная координата, за которую можно принять угол θ между стержнем и прямой Остальные параметры, определяющие положение стержня и диска, выражаются через угол θ при помощи конечных соотношений $\xi=r\,\mathrm{ctg}(\theta/2)$, $x=-2r(\mathrm{ctg}(\theta/2)+\theta/2)+c_1$, $\varphi+\mathrm{ctg}(\theta/2)+\theta=c_2$.

50.21. Определить число обобщенных координат и число степеней свободы системы, состоящей из трех шероховатых цилиндров.

Два одинаковых цилиндра радиуса r катаются по горизонтальной плоскости, а третий цилиндр радиуса R катается по этим двум цилиндрам.

Ответ: Шесть обобщенных координат x, y, θ, φ, φ_1, φ_2, которые удовлетворяют четырем дифференциальным уравнениям:

$$\dot{x} - R\varphi \sin\theta - \theta(r\varphi_1 - y) = 0,$$

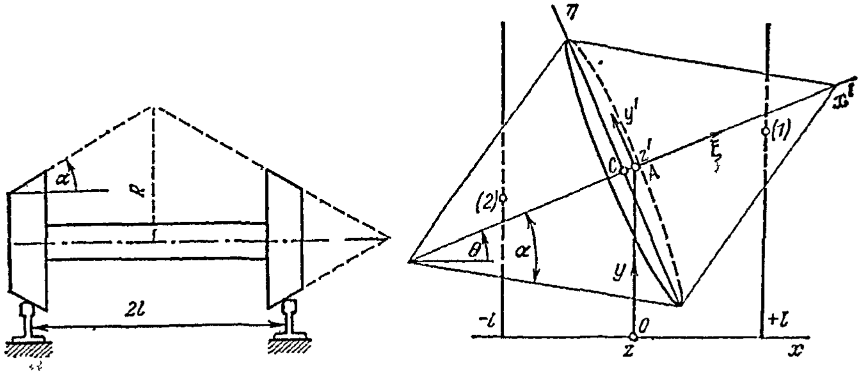
$$\dot{y} + R\dot{\varphi}\cos\theta + \theta(r\varphi_1 - y)\operatorname{ctg}\theta - 2r\varphi_1 = 0,$$

$$\dot{x}\sin(\theta - \alpha) - R\varphi\sin\theta\sin(\theta - \alpha) + 2r\varphi_2\sin\alpha\sin(\theta - \alpha) - \\ - \theta(r\varphi_2 + x\sin\alpha - y\cos\alpha)\sin\theta = 0,$$

$$y\sin(\theta - \alpha) + R\varphi\cos\theta\sin(\theta - \alpha) - 2r\varphi_2\cos\alpha\sin(\theta - \alpha) + \\ + \theta(r\varphi_2 + x\sin\alpha - y\cos\alpha)\cos\theta = 0.$$

Система имеет две степени свободы.

50.22. Составить уравнения движения гусеничного трактора, описанного в задаче 50.18, при условии, что момент сил, передаваемый от двигателя на левую гусеницу, равен $M_1(t)$, а на правую гусеницу — $M_2(t)$, m — масса трактора. Массой гусениц и колес пренебречь; J — момент инерции трактора относительно вертикальной оси, проходящей через центр масс.



К задаче 50.23

Ответ: $mrx = (M_1 + M_2)\cos\theta$, $mry = (M_1 + M_2)\sin\theta$,

$$Jr\theta = l(M_2 - M_1), \quad r\dot{\varphi}_1 = \dot{x}\cos\theta + y\sin\theta - l\dot{\theta}.$$

50.23. Показать, что железнодорожная колесная пара (скат) при качении по рельсам без скольжения имеет одну степень свободы.

Указание. За модель колесной пары принять тело, состоящее из двух одинаковых конусов, склеенных основаниями, рельсы считать геометрическими прямыми. Рассмотреть случай малых отклонений от прямолинейного движения.

Ввести неподвижную систему координат $Oxyz$ и две подвижных системы $Ax'y'z'$ и $C\xi\eta\zeta$ определяемые таблицами косинусов углов между осями

$$\begin{array}{c|ccc} & x' & y' & z' \\ \hline x & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ y & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ z & 0 & 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} & \xi & \eta & \zeta \\ \hline x' & \cos\psi & 0 & -\sin\psi \\ y' & 0 & 1 & 0 \\ z' & \sin\psi & 0 & \cos\psi \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} & \xi & \eta & \zeta \\ \hline x & \cos\theta\cos\psi & -\sin\theta & -\cos\theta\sin\psi \\ y & \sin\theta\cos\psi & \cos\theta & -\sin\theta\sin\psi \\ z & \sin\psi & 0 & \cos\psi \end{array}$$

где θ, ψ — углы Крылова, за обобщенные координаты принять y, θ, ψ, φ, где y — ордината центра масс C, φ — угол поворота тела вокруг оси колесной пары

Ответ Условия качения без скольжения имеют вид

$$\theta - \psi\varphi = 0, \qquad \psi + \varphi\theta\left(\frac{R}{l} - \operatorname{tg}\alpha\right)\operatorname{tg}\alpha = 0, \qquad \dot y = \varphi\,(R - l\operatorname{tg}\alpha),$$

они интегрируются; колесная пара имеет одну степень свободы.

50.24. Однородный диск радиуса a и массы m катится без скольжения по горизонтальной плоскости Составить уравнения движения диска 1) в координатах x_C, y_C, θ, ψ, φ, где x_C, y_C — координаты центра масс диска, θ, ψ, φ — углы Эйлера, 2) в координатах x, y, θ, ψ, φ, где x, y — координаты точки контакта диска с плоскостью, θ, ψ, φ — углы Эйлера (см задачу 50.11); 3) в квазикоординатах p, q, r, являющихся проекциями вектора мгновенной угловой скорости вращения диска на главные оси центрального эллипсоида инерции, A, C — главные центральные моменты инерции диска

Ответ: 1) $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot x_C} = \lambda_1, \quad \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot y_C} = \lambda_2,$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\theta} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = -a\,(\lambda_1\sin\psi - \lambda_2\cos\psi)\cos\theta,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\psi} = -a\,(\lambda_1\cos\psi + \lambda_2\sin\psi)\sin\theta,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = -a\,(\lambda_1\cos\psi + \lambda_2\sin\psi),$$

$$\dot x_C - a\dot\theta\cos\theta\sin\psi - a\dot\psi\sin\theta\cos\psi - a\dot\varphi\cos\psi = 0,$$

$$\dot y_C + a\dot\theta\cos\theta\cos\psi - a\dot\psi\sin\theta\sin\psi - a\dot\varphi\sin\psi = 0,$$

где λ_1, λ_2 — неопределенные множители, L — функция Лагранжа,

$$L = \frac{1}{2}m\,(\dot x_C^2 + \dot y_C^2 + a^2\dot\theta^2\sin^2\theta) + \frac{1}{2}A\,(\dot\theta^2 + \dot\psi^2\cos^2\theta) +$$
$$+ \frac{1}{2}C\,(\dot\psi\sin\theta + \dot\varphi)^2 - mga\cos\theta;$$

2) $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot x} = \lambda_1, \quad \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot y} = \lambda_2, \quad \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot\theta} - \dfrac{\partial L}{\partial \theta} = 0, \quad \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot\psi} = 0,$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = -a\,(\lambda_1\cos\psi + \lambda_2\sin\psi)$$

$$\dot x - a\dot\varphi\cos\psi = 0, \qquad \dot y - a\dot\varphi\sin\psi = 0,$$

где λ_1, λ_2 — неопределенные множители, L — функция Лагранжа,

$$L = \frac{1}{2} m\,[\dot{x}^2 + y^2 + a^2(\theta^2 + \psi^2 \sin^2\theta) + $$
$$+ 2ax(\theta\cos\theta\sin\psi + \psi\sin\theta\cos\psi) -$$
$$- 2a\dot{y}\,(\dot{\theta}\cos\theta\cos\psi - \dot{\psi}\sin\theta\sin\psi)] + \frac{1}{2} A\,(\theta^2 + \dot{\psi}^2\cos^2\theta) +$$
$$+ \frac{1}{2} C\,(\dot{\psi}\sin\theta + \varphi)^2 - mga\cos\theta;$$

3) $(A + ma^2)\,p + Aq^2\,\mathrm{tg}\,\theta - (C + ma^2)\,qr = mga\sin\theta,$

$$A\dot{q} + Cpr - Apq\,\mathrm{tg}\,\theta = 0 \quad (C + ma^2)\,r + pq = 0, \quad \theta = p$$

После того, как эти уравнения проинтегрированы, обобщенные координаты x, y, ψ, φ находятся из соотношений

$$\dot{\psi}\cos\theta = q, \quad \varphi = r - q\,\mathrm{tg}\,\theta, \quad x = a\varphi\cos\psi, \quad y = a\varphi\sin\psi.$$

50.25. Используя решение предыдущей задачи, найти все возможные стационарные движения диска.

Указание. Стационарные движения диска отображаются состояниями равновесия в пространстве (θ, Ω, ω), где $\Omega = \dot{\psi}$, $\omega = \dot{\varphi} + \dot{\psi}\sin\theta$

Ответ: Состояния равновесия в пространстве (θ, Ω, ω) образуют поверхность П, уравнение которой $(C + ma^2)\,\Omega\omega - A\Omega^2\sin\theta + mga\sin\theta = 0$, представляющую двумерное многообразие стационарных движений диска. На этой поверхности точки прямой $\theta = \Omega = 0$ соответствуют такому качению диска по прямой, при котором плоскость диска сохраняет вертикальное положение. Точки прямой $\theta = \omega = 0$ соответствуют верчению диска вокруг неподвижного вертикального диаметра. Все остальные точки поверхности П соответствуют круговым движениям.

50.26. Найти условия устойчивости движения диска: 1) при качении диска по прямой, когда плоскость диска вертикальна; 2) при верчении диска вокруг неподвижного вертикального диаметра; 3) при качении диска по окружности, когда плоскости диска вертикальны.

Указание. Использовать решение задачи 50.24 (3) и задачи 50.25.

Ответ: 1) $\omega^2 > \omega^2_{\text{кр}} = \dfrac{mgaA}{C(C + ma^2)}$,

2) $\Omega^2 > \Omega^2_{\text{кр}} = \dfrac{mga}{A + ma^2}$;

3) $$\Omega^2\,[A(1 + 2\sin^2\theta) + ma^2\cos^2\theta] + \Omega\omega\,(3C + ma^2)\sin\theta +$$
$$+ \frac{C}{A}(C + ma^2)\,\omega^2 > mga\cos\theta.$$

Входящие в это неравенство величины связаны соотношением

$$(C + ma^2)\,\Omega\omega - A\Omega^2\sin\theta + mga\sin\theta = 0.$$

ГЛАВА XII

ДИНАМИКА КОСМИЧЕСКОГО ПОЛЕТА

§ 51. Кеплерово движение (движение под действием центральной силы)

51.1(50.1). Модуль силы всемирного тяготения, действующий на материальную точку массы m, определяется равенством $F = m\mu/r^2$, где $\mu = fM$ — гравитационный параметр притягивающего центра (M — его масса, f — гравитационная постоянная) и r — расстояние от центра притяжения до притягиваемой точки. Зная радиус R небесного тела и ускорение g силы тяжести *) на его поверхности, определить гравитационный параметр μ небесного тела и вычислить его для Земли, если ее радиус $R = 6370$ км, а $g = 9{,}81$ м/с^2.

Ответ: $\mu = gR^2$; для Земли $\mu = 3{,}98\cdot 10^5$ км^3/с^2.

51.2(50.2). Определить гравитационный параметр μ_n и ускорение силы тяжести g_n на поверхности небесного тела, если известны отношения его массы M_n и радиуса R_n к массе M и радиусу R Земли. Вычислить эти величины для Луны, Венеры, Марса и Юпитера, для которых соответствующие отношения даны в следующей таблице:

	M_n/M	R_n/R		M_n/M	R_n/R
Луна	0,0123	0,273	Марс	0,107	0,535
Венера	0,814	0,953	Юпитер	317	10,95

Ответ:

	μ км^3/с^2	g, м/с^2		μ км^3/с^2	g, м/с^2
Луна	$4{,}90\cdot 10^3$	1,62	Марс	$42{,}8\cdot 10^3$	3,69
Венера	$326\cdot 10$	8,75	Юпитер	$126\cdot 10^3$	26,0

51.3(50.3). Материальная точка равномерно движется по круговой орбите на высоте H над поверхностью небесного тела радиуса R под действием силы всемирного тяготения. Определить скорость движения v_1 и период обращения T материальной точки **).

Ответ: 1) $v_1 = \sqrt{\dfrac{\mu}{r}} = \sqrt{\dfrac{gR^2}{R+H}}$ (круговая скорость на высоте H для данного небесного тела);

---

*) Здесь и в дальнейшем предполагается, что сила притяжения небесного тела направлена к его центру, ускорения сил тяжести g даются без учета вращения небесных тел.

**) Во всех задачах этой главы сопротивлением атмосферы пренебрегаем.

2) $T = 2\pi r\sqrt{\frac{r}{\mu}} = 2\pi\frac{(R+H)^{h}}{R\sqrt{g}}$ Здесь r — расстояние от материальной точки до центра небесного тела, μ — его гравитационный параметр, g — ускорение силы тяжести на его поверхности.

51.4(50.4). Пренебрегая высотой полета искусственного спутника над поверхностью небесного тела, определить первую космическую скорость v_1 и соответствующий период T обращения для Земли, Луны, Венеры, Марса и Юпитера.

Ответ:

	v_1 км/с	T, мин		v_1, км/с	T, мин
Земля	7,91	84,3	Марс	3,54	101
Луна	1,68	108	Юпитер	12,6	172
Венера	7,30	87,5			

51.5(50.5). На какой высоте нужно запустить круговой спутник Земли, обращающийся в плоскости экватора, для того, чтобы он все время находился над одним и тем же пунктом Земли?

Ответ: $H = 35\,800$ км

51.6(50.6). Под каким углом β пересекается с земным экватором трасса спутника (проекция его траектории на земную поверхность), если он движется по круговой орбите высоты H, наклоненной под углом α к плоскости экватора?

Ответ: $\operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha + \Omega\sqrt{(R+H)^{3}\cdot\mu}}$, где Ω — угловая скорость суточного вращения Земли и μ — ее гравитационный параметр.

51.7(50.7). Точка массы m притягивается к неподвижному центру по закону всемирного тяготения $F = m\mu/r^2$, где μ — гравитационный параметр центра притяжения. Найти интеграл энергии.

Ответ: $v^2 - 2\mu/r = h$.

51.8(50.8). Определить, при какой высоте H круговой орбиты спутника его потенциальная энергия относительно поверхности планеты радиуса R равна его кинетической энергии.

Ответ: $H = R/2$

51.9(50.9). Определить, с какой скоростью войдет метеорит в земную атмосферу, если его скорость на бесконечности $v_\infty = 10$ км/с.

Ответ: $v \approx 15$ км/с.

51.10(50.10). Какую минимальную скорость v_2 нужно сообщить космическому аппарату на поверхности планеты, чтобы он удалился в бесконечность?

Ответ: $v_2 = \sqrt{2}\,v_1$ — вторая космическая скорость (v_1 — первая космическая скорость).

51.11(50.11). Определить вторую космическую скорость для Земли, Луны, Венеры, Марса и Юпитера.

Ответ:

	v_2 км/с		v_2 км/с
Земля	11,2	Марс	5,0
Луна	2,37	Юпитер	60,2
Венера	10,3		

51.12(50.12). Точка движется под действием центральной силы. Считая, что модуль радиус-вектора r точки зависит от времени t сложным образом через полярный угол φ, определить скорость и ускорение точки *).

Ответ: $v^2 = c^2\left[u^2 + \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2\right]$; $\quad w_\varphi = 0$, $w_r = \pm c^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u\right)$, где $u = 1/r$, $c = r^2\dot{\varphi} = |r \times v| = \mathrm{const}$ — удвоенная секторная скорость, знак плюс для силы отталкивания, знак минус — для силы притяжения

51.13(50.13). Точка массы m движется под действием центральной силы по коническому сечению, уравнение которого в полярных координатах имеет вид $r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}$, где p и e — параметр и эксцентриситет траектории. Определить силу, под действием которой движется точка

Ответ: $F_\varphi = 0$, $F_r = -m\mu/r^2$, где $\mu = c^2/p$ и c — удвоенная секторная скорость

51.14(50.14). Точка массы m притягивается к неподвижному полюсу по закону всемирного тяготения $F = m\mu/r^2$. Найти траекторию движения точки.

Ответ: Кривая второго порядка (коническое сечение), уравнение которой в полярных координатах имеет вид $r = \frac{p}{1 + e\cos(\varphi - \varepsilon)}$, где $p = c^2/\mu$, а e и ε — произвольные постоянные интегрирования.

Указание Воспользоваться ответом к задаче 51 12

51.15(50.15). Материальная точка движется под действием силы всемирного тяготения по эллиптической траектории, эксцентриситет которой $e < 1$, а параметр p. Зная интеграл площадей $c = r^2\dot{\varphi} = |r \times v|$, определить полуоси a и b эллиптической траектории и период обращения T.

Ответ: $a = \frac{p}{1 - e^2}$, $\quad b = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}}$; $\quad T = \frac{2\pi p^2}{c(1 - e^2)^{3/2}} = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$.

51.16(50.16). В условиях предыдущей задачи определить ускорение точки в моменты, когда она проходит апогей и перигей

Ответ: $w_a = \frac{c^2}{p^3}(1 - e)^2$, $\quad w_п = \frac{c^2}{p^3}(1 + e)^2$.

---

*) Здесь и в дальнейшем предполагается, что полюс полярной системы координат совпадает с центром притяжения (отталкивания)

51.17(50.17). Зная период обращения T спутника вокруг Земли по эллиптической орбите и разность его апогея и перигея H, определить эксцентриситет орбиты.

Ответ: $e = H\sqrt[3]{\dfrac{\pi^2}{2\mu T^2}}$

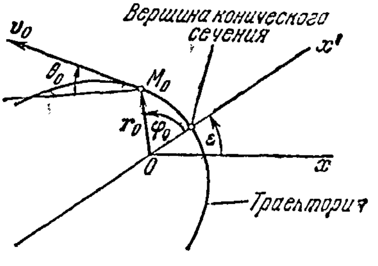
51.18(50.18). Спутник движется около планеты радиуса R по эллиптической орбите с эксцентриситетом e. Найти большую полуось его орбиты, если отношение высот перигея и апогея равно $\gamma < 1$.

Ответ: $a = \dfrac{1-\gamma}{1-\gamma-e(1+\gamma)}R$

51.19(50.19). Точка движется под действием силы всемирного тяготения $F = m\mu/r^2$. Выразить постоянную энергии h (см. задачу 51.7) через элементы траектории точки и гравитационный параметр μ

Ответ: $h = -\mu/a$ для эллиптической траектории (a — большая полуось эллипса), $h = 0$ для параболической траектории и $h = \mu/a$ для гиперболической траектории (a — вещественная полуось гиперболы)

51.20(50.20). В начальный момент материальная точка, движущаяся по закону всемирного тяготения, находилась в положении M_0 на расстоянии r_0 от притягивающего центра и имела скорость v_0; угол между вектором скорости v_0 и линией горизонта (касательной, проведенной в точке M_0 к окружности, центр которой совпадает с центром притяжения) равнялся θ_0, а полярный угол был равен φ_0 Определить эксцентриситет e и угол ε между полярной осью и фокусной линией конического сечения *).



К задаче 51 20

Ответ: $e = \sqrt{1+\dfrac{c^2}{\mu^2}h}$, $\operatorname{tg}(\varphi_0-\varepsilon) = \dfrac{\operatorname{tg}\theta_0}{1-r_0/p}$, где $c = r_0v_0\cos\theta_0$ — интеграл площадей, $h = v^2 - 2\mu/r$ — интеграл энергии.

51.21(50.21). Определить, какую скорость надо сообщить космическому аппарату, чтобы, достигнув высоты H над поверхностью планеты и отделившись от последней ступени ракеты, он двигался по эллиптической, параболической или гиперболической траектории. Радиус планеты R

Указание Воспользоваться ответом к предыдущей задаче

Ответ: При $v_0 < v_2$ траектория — эллипс, при $v_0 = v_2$ — парабола, при $v_0 > v_2$ — гипербола, где $v_2 = \sqrt{2\dfrac{gR^2}{R+H}} = \sqrt{2}\,v_1$ —

---

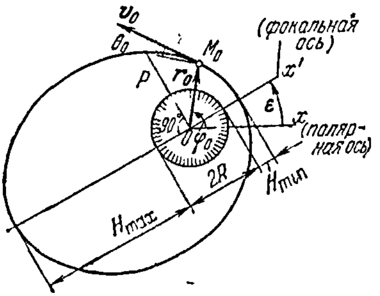
*) За положительное направление фокальной оси конического сечения принимается направление от полюса, совпадающего с одним из фокусов сечения, к ближайшей вершине.

параболическая скорость на высоте H (v_1 — круговая скорость).

51.22. Какую нужно сообщить начальную скорость $v_0 = v_3$ материальной точке у поверхности Земли, чтобы она могла покинуть пределы Солнечной системы

Ответ: $v_0 = v_3 = \sqrt{v_2^2 + V^2\left(\sqrt{2} - 1\right)^2} \approx 16{,}7$ км/с, где $V \approx 30$ км/с — круговая скорость Земли, v_2 — вторая космическая скорость.

51.23(50.22 и 50.23). В момент отделения космического аппарата от последней ступени ракеты он находился в точке M_0 на высоте $H = 230$ км от поверхности Земли и имел начальную скорость $v_0 = 8{,}0$ км/с, причем вектор скорости v_0 составлял с линией горизонта (касательной, проведенной в точке M_0 к окружности радиуса r_0) угол $\theta_0 = 0{,}02$ рад



К задаче 51.23

Определить постоянную площадей c, параметр p траектории, постоянную энергии h, направление большой оси эллиптической траектории спутника, эксцентриситет e траектории; апогей (H_{max}) и перигей (H_{min}) и период T обращения спутника

Ответ: $c = 52790$ км²/с, $p = 7002$ км, $h = -56{,}6$ км²/с², $\varepsilon = \varphi_0 - 0{,}335$ рад, где φ_0 — начальный полярный угол радиус-вектора r_0; $e = 0{,}0649$, $H_{max} = 1120$ км, $H_{min} = 210$ км; $T = 98{,}5$ мин.

51.24(50.24). При каком направлении начальной скорости космический аппарат упадет на поверхность планеты радиуса R вне зависимости от величины начальной скорости?

Ответ: Если начальная скорость будет направлена внутрь конуса, описанного вокруг планеты из начальной точки.

51.25(50.25). При каких начальных условиях траектория космического аппарата, запущенного на высоте H от поверхности планеты радиуса R, не пересечет ее поверхности?

Ответ: 1) $v_0^2 > v_1^2 \dfrac{2RH}{(R+H)^2 \cos^2 \theta_0 - R^2}$ $\cos\theta_0 > \dfrac{R}{R+H}$, где v_1 — круговая скорость для данной планеты на высоте H.

2) Начальная скорость должна быть направлена вне конуса, описанного вокруг планеты из начальной точки

51.26(50.26). Найти зависимость между периодами T_i обращения планет вокруг Солнца и большими полуосями a_i их эллиптических траекторий

Ответ: $\dfrac{a_1^3}{T_1^2} = \dfrac{a_2^3}{T_2^2}$ для любых планет (третий закон Кеплера).

51.27(50.27). Период обращения одного из спутников Юпитера, называемого Ио, равен 1,77 суток, причем радиус его орбиты составляет 5,91 радиуса Юпитера Среднее расстояние Юпитер —

Солнце равно 5,20 среднего расстояния Земля — Солнце (5,20·23 000 земных радиусов), а период обращения Юпитера вокруг Солнца равен 11,8 лет. Определить отношение массы Юпитера к массе Солнца (радиус Юпитера равен 11,14 радиуса Земли).

Ответ: Масса Юпитера в 1000 раз меньше массы Солнца.

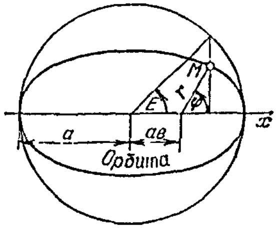
51.28(50.28). Под средним значением $[r]$ радиус-вектора точки, движущейся по эллиптической траектории, понимается величина, определяемая равенством $[r]=\frac{1}{T}\int\limits_0^T r\,dt$, где T — период обращения.

Определить среднее значение радиус-вектора планеты, если a — большая полуось, а e — эксцентриситет ее эллиптической траектории

Ответ: $[r]=a(1+{}^1/_2 e^2)$.

51.29(50.29). Два спутника, имеющие равные массы, движутся в одном направлении вокруг притягивающего центра по компланарным орбитам, одна из которых — круговая радиуса r_0, а другая — эллиптическая с расстояниями перигея и апогея r_0 и $8r_0$ соответственно. Полагая, что спутники путем непосредственной стыковки соединились друг с другом в точке соприкосновения их орбит и дальнейшее движение продолжали вместе, найти апогей их новой орбиты.

Ответ: $r_а=\frac{49}{23}r_0$.



К задаче 51 30

51.30(50.30). Определить связь между истинной φ и эксцентрической E аномалиями точки на эллиптической орбите эксцентриситета e.

Ответ: $\operatorname{tg}\frac{E}{2}=\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$.

51.31(50.31). Выразить скорость в любой точке эллиптической орбиты через эксцентрическую аномалию.

Ответ: $v=\sqrt{\frac{\mu}{a}}\sqrt{\frac{1+e\cos E}{1-e\cos E}}$.

51.32(50.32). Найти на эллиптической орбите такие точки, скорость движения в которых равна среднему геометрическому скоростей в перигее и апогее.

Ответ: $E=\pm\pi/2$ (точки расположены на концах малой оси эллипса).

51.33(50.33). Зная выражения для радиус-вектора точки, совершающей эллиптическое движение вокруг притягивающего центра:

$$\boldsymbol{r}=\frac{p}{1+e\cos\varphi}\boldsymbol{e}_r,\quad \boldsymbol{r}=a(1-e\cos E)\boldsymbol{e}_r,$$

где $\boldsymbol{e}_r$ — орт радиус-вектора $\boldsymbol{r}$, проведенного из центра притяжения, φ — истинная, а E — эксцентрическая аномалии, найти выражения для вектора орбитальной скорости этой точки, записанные в орбитальной и инерциальной системах координат

Ответ: $\mathbf{v}=\sqrt{\frac{\mu}{p}}\,[\mathbf{e}_r e\sin\varphi+\mathbf{e}_\varphi(1+e\cos\varphi)]$,

$$\mathbf{v}=\sqrt{\frac{\mu}{p}}\left[-\mathbf{e}_1\frac{\sqrt{1-e^2}\sin E}{1-e\cos E}+\mathbf{e}_2\frac{(1-e^2)\cos E}{1-e\cos E}\right],$$

где $\mathbf{e}_1$ — орт, направленный из полюса в перигей, а $\mathbf{e}_2$ — орт перпендикулярного орту $\mathbf{e}_1$ направления

51.34(50.34). В какой точке эллиптической орбиты угол наклона траектории к местному горизонту (плоскость, перпендикулярная радиус-вектору) достигает наибольшего значения?

Ответ: $E=\pm\pi/2$

51.35(50.35). Спутник движется по круговой орбите радиуса r, делая один оборот за время T В результате получения радиального импульса скорости величины u он переходит на эллиптическую орбиту. Определить период обращения по эллиптической орбите

Ответ: $T_1=\dfrac{T}{\left[1-\left(\dfrac{uT}{2\pi r}\right)^2\right]^{3/2}}$.

51.36(50.36). Спутник движется по круговой орбите радиуса r, делая один оборот за время T В результате получения тангенциального (касательного) импульса скорости величины u он переходит на эллиптическую орбиту Определить период обращения по эллиптической орбите T_1

Ответ: $T_1=\dfrac{T}{\left[1-\left(\dfrac{uT}{2\pi r}\right)^2-\dfrac{uT}{\pi r}\right]^{3/2}}$.

51.37(50.37). Спутник движется по круговой околоземной орбите радиуса r. Определить величину радиального импульса скорости, в результате которого спутник перейдет на эллиптическую орбиту с перигеем r_1

Ответ: $u=\sqrt{\frac{\mu}{r_1}}\left(\sqrt{\frac{r}{r_1}}-\sqrt{\frac{r_1}{r}}\right)$.

51.38(50.38). Космический корабль движется со скоростью $v=30$ км/с по орбите Земли, имеющей радиус $r_1=150\cdot10^6$ км Какой касательный импульс скорости u он должен получить, чтобы в афелии своей новой орбиты он достиг орбиты Марса ($r_2=$ $=228\cdot10^6$ км)?

Решить такую же задачу для случая полета к орбите Венеры ($r_3=108\cdot10^6$ км).

Ответ: На орбиту Марса: $u=2{,}95$ км/с.

На орбиту Венеры: $u=2{,}55$ км/с

51.39(50.39). Спутник движется по эллиптической околоземной орбите с радиусом перигея и апогея соответственно r_1 и r_2 Определить величину касательного прироста скорости u в перигее, при котором высота апогея увеличится на H.

Ответ: $u=\sqrt{\frac{2\mu}{r_1}}\left(\sqrt{\frac{r_2+H}{r_1+r_2+H}}-\sqrt{\frac{r_2}{r_1+r_2}}\right).$

51.40(50.40). Космический корабль, движущийся по круговой спутниковой орбите, должен стартовать с нее путем получения касательного импульса скорости и выйти на гиперболическую орбиту с заданным значением скорости на бесконечности v_∞. При каком радиусе r_0 начальной круговой орбиты величина необходимого импульса u будет наименьшей?

Ответ: $r_0=2\mu/v_\infty^2$.

§ 52. Разные задачи

52.1(51.1). Две свободные точки, массы которых равны m_1 и m_2, движутся под действием сил взаимного притяжения. Определить закон движения первой точки относительно второй

Ответ: Относительное движение происходит по тем же законам, что и абсолютное с гравитационным параметром

$$\mu=f(m_1+m_2).$$

52.2(51.2). Какой вид примет зависимость между периодами T_i обращения планет вокруг Солнца и большими полуосями a_i их эллиптических орбит, если учесть движение Солнца, вызванное притяжением соответствующей планеты?

Ответ: $\frac{a_1^3}{T_1^2}:\frac{a_2^3}{T_2^2}=\frac{M+m_1}{M+m_2}$, где m_1, m_2, M — массы планет и Солнца соответственно (сравнить с ответом к задаче 51.26).

52.3(51.3). Два однородных шара радиусов R_1 и R_2 начали двигаться из состояния покоя под действием сил взаимного притяжения. Определить, с какой относительной скоростью v_r столкнутся шары, если первоначальное расстояние между их центрами равнялось L, а массы шаров равны m_1 и m_2.

Ответ: $v_r=\sqrt{2\mu\left(\frac{1}{R_1+R_2}-\frac{1}{L}\right)}$, где $\mu=f(m_1+m_2)$.

52.4(51.4). Две точки, массы которых равны m_1 и m_2, начали двигаться из состояния покоя под действием сил взаимного притяжения. Определить время T, через которое столкнутся точки, если первоначальное расстояние между ними равнялось L.

Ответ: $T=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{L^3}{2\mu}}$, где $\mu=f(m_1+m_2)$.

52.5(51.5). Две свободные точки, массы которых равны m_1 и m_2, движутся под действием сил взаимного притяжения. Определить закон движения точек относительно их центра масс C.

Ответ. Движение по отношению к центру масс происходит по тем же законам, что и абсолютное движение с гравитационными параметрами $\mu_1=f\frac{m_2^3}{(m_1+m_2)^2}$ и $\mu_2=f\frac{m_1^3}{(m_1+m_2)^2}$.

52.6(51.6). Проекция центральной силы на радиус-вектор равна $-\left(\frac{\mu}{r^2}+\frac{\nu}{r^3}\right)$, где $\mu > 0$ и ν — некоторые постоянные. Определить траекторию движущейся точки

Ответ. 1) $\nu < c^2$, $r = \frac{p}{1+e\cos k(\varphi-\varepsilon)}$, где $c = r^2\dot{\varphi} = \text{const}$, $p = \frac{c^2-\nu}{\mu}$, $k^2 = 1-\frac{\nu}{c^2}$, e и ε — произвольные постоянные

2) $\nu = c^2$, $\frac{1}{r} = \frac{\mu}{c^2}\frac{\varphi^2}{2}+C_1\varphi+C_2$, C_1 и C_2 — постоянные интегрирования;

3) $\nu > c^2$, $r = \frac{p}{1+e\,\mathrm{ch}\,k(\varphi-\varepsilon)}$, где $p = -\frac{\nu-c^2}{\mu}$, $k^2 = \frac{\nu}{c^2}-1$, e и ε — произвольные постоянные

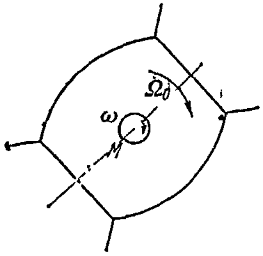
52.7(51.7). Космический аппарат массы m приближается к планете по прямой, проходящей через ее центр. На какой высоте H от поверхности планеты нужно включить двигатель, чтобы создаваемая им постоянная тормозящая сила, равная mT, обеспечила мягкую посадку (посадку с нулевой скоростью)? Скорость космического аппарата в момент включения двигателя равна v_0, гравитационный параметр планеты μ, ее радиус R; притяжением других небесных тел, сопротивлением атмосферы и изменением массы двигателя пренебречь

Ответ:

$$H = \frac{1}{2T}\left\{\frac{\mu}{R}+TR+\frac{v_0^2}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\mu}{R}+TR+\frac{v_0^2}{2}\right)^2-4\mu T}\right\}-R;$$ знак плюс, если $T > \mu/R^2$, и знак минус, если $T < \mu/R^2$.

52.8(51.8). Определить полезную работу, которую должен совершить двигатель ракеты, чтобы поднять космический аппарат на высоту H над поверхностью планеты и сообщить ему на этой высоте круговую и параболическую космические скорости Масса космического аппарата на поверхности планеты равна M, радиус планеты R; сопротивлением атмосферы пренебречь. Вычислить эту работу для второй космической скорости для Земли, если $M = 5000$ кг

Ответ: $A_1 = MgR\frac{R+2H}{2(R+H)}$, $A_2 = MgR$, $A_2 = 31{,}85\cdot10^7$ кН · м



К задаче 52.9

52.9(51.9). Космический аппарат вращается с угловой скоростью Ω_0 Определить, какую полную работу должен совершить двигатель маховика M, чтобы остановить вращение космического аппарата, считая, что вращение последнего происходит вокруг поступательно перемещающейся оси, проходящей через его центр масс. Ось вращения маховика совпадает с осью вращения аппарата; J и J_0 — моменты инерции маховика и аппарата (вместе с маховиком) относительно общей оси вращения В начальный момент угловая скорость маховика равна угловой скорости аппарата.

Ответ: $A = \frac{1}{2}\frac{J_0(J_0 - J)}{J}\Omega_0^2$.

52.10(51.10). Считая, что статор электромотора системы, описанной в задаче 52.9, создает вращающий момент $M_{вр} = M_0 - \varkappa\omega$, где M_0 и $\varkappa$ — некоторые положительные постоянные, ω — относительная угловая скорость маховика, найти условие, необходимое для того, чтобы торможение вращения космического аппарата произошло за конечное время. Предполагая, что это условие выполнено, определить время T торможения

Ответ: $M_0 > \varkappa\frac{J_0}{J}\Omega_0$, $T = \frac{J(J_0 - J)}{\varkappa J_0}\ln\frac{JM_0}{JM_0 - \varkappa J_0\Omega_0}$.

52.11(51.11). Определить угол ψ, на который повернется космический аппарат за время торможения вращения, если оно осуществляется способами, описанными в задачах 52 9 и 52.10.

Ответ: $\psi = \frac{J(J_0 - J)}{\varkappa J_0}\Omega - \frac{J(J_0 - J)}{J_0^2\varkappa^2}(M_0 J - \Omega\varkappa J_0)\ln\frac{JM_0}{JM_0 - \varkappa J_0\Omega_0}$.

52.12(51.12). Для поворота корпуса космического аппарата используется электродвигатель-маховик, уравнение движения которого на вращающемся аппарате имеет вид $\dot{\omega} + \omega/T = u$, где ω — относительная угловая скорость маховика, T — его постоянная времени, u — управляющее напряжение, принимающее значения $\pm u_0$. Определить длительность t_1 разгона $(u = u_0)$ и торможения $t_2(u = -u_0)$ маховика, если первоначально невращающийся корпус при неподвижном маховике требуется повернуть на заданный угол φ и остановить. Ось вращения маховика проходит через центр масс космического аппарата; движение считать плоским. Моменты инерции маховика и аппарата относительно общей оси вращения соответственно равны J и J_0

Ответ: $t_1 = \tau + T\ln\left(1 + \sqrt{1 - e^{-\tau/T}}\right)$, $t_2 = T\ln\left(1 + \sqrt{1 - e^{-\tau/T}}\right)$, где $\tau = \frac{J_0\varphi}{Ju_0T}$.

ГЛАВА XIII

УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ СИСТЕМЫ. ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ, УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ

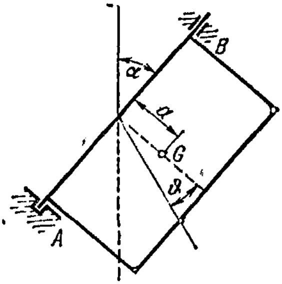
§ 53. Определение условий равновесия системы. Устойчивость равновесия

53.1(52.1). Ось вращения AB прямоугольной пластины наклонена под углом α к вертикали. Определить момент сил M относительно оси AB, который нужно приложить к пластине для ее поворота на угол ϑ. Вес пластины P, расстояние от центра масс G пластины до оси AB равно a.

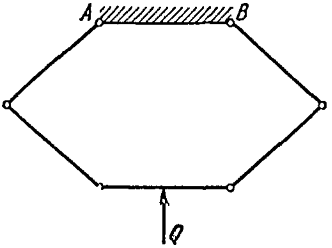
Ответ: $M = Pa\sin\alpha\sin\vartheta$.

53.2(52.2). Шарнирный шестиугольник, состоящий из шести равных однородных стержней веса p каждый, расположен в вертикальной плоскости. Верхняя сторона шестиугольника AB неподвижно закреплена в горизонтальном положении, остальные стороны расположены симметрично по отношению к вертикали, проходящей через середину AB. Определить, какую вертикальную силу Q надо приложить в середине горизонтальной стороны, противоположной AB, для того чтобы система находилась в безразличном равновесии.

Ответ: $Q = 3p$.



К задаче 53.1

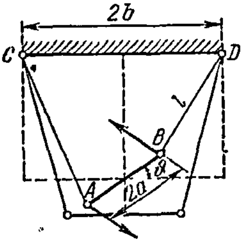


К задаче 53.2

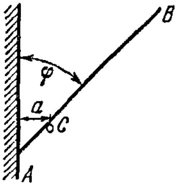
53.3(52.3). К однородному стержню AB длины $2a$ и веса Q, подвешенному на двух нитях длины l каждая, приложена пара сил с моментом M. Точки подвеса нитей, расположенные на одной горизонтали, находятся на расстоянии $2b$ друг от друга. Найти угол ϑ, определяющий положение равновесия стержня.

Ответ: В положении равновесия угол ϑ находится из уравнения $M\sqrt{l^2-(a-b)^2-4ab\sin^2(\vartheta/2)} = Qab\sin\vartheta$.

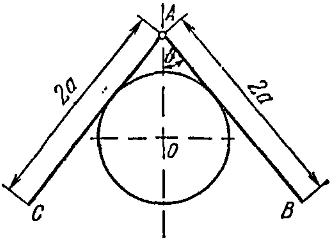
53.4(52.4). Прямолинейный однородный стержень AB длины $2l$ упирается нижним концом A в вертикальную стену, составляя с ней угол φ. Стержень опирается также на гвоздь C, параллельный стене. Гвоздь отстоит от стены на расстоянии a. Определить угол φ в положении равновесия стержня.



К задаче 53.3



К задаче 53.4



К задаче 53.5

Ответ: $\sin\varphi = \sqrt[3]{a/l}$.

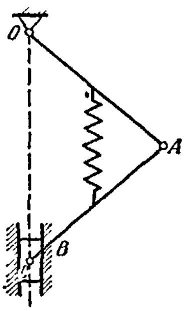
53.5(52.5). На гладкий цилиндр радиуса r опираются два однородных тяжелых стержня, соединенных шарниром A. Длина каждого стержня равна $2a$. Определить угол 2ϑ раствора стержней, соответствующий положению равновесия.

Ответ. Угол ϑ определяется из уравнения $a\,\mathrm{tg}^3\vartheta - r\,\mathrm{tg}^2\vartheta - r = 0$.

53.6. Система состоит из двух однородных стержней OA и AB длины a и массы m, расположенных в вертикальной плоскости. В точке A стержни соединены шарниром. В точке O — неподвижный шарнир. В точке B стержень AB соединен шарниром с телом C массы m_1, которое может перемещаться по вертикали, проходящей через точку O. Середины стержней OA и AB соединены пружиной жесткости c. Длина пружины в ненапряженном состоянии $l_0 < a$. Найти положения равновесия и условия их устойчивости. Трением и массой пружины пренебречь.

Ответ: При $2(m+m_1)g > c(a-l_0)$ одно устойчивое состояние равновесия $\varphi_1 = 0$, при $2(m+m_1)g < c(a-l_0)$ два состояния равновесия — неустойчивое $\varphi_1 = 0$ и устойчивое

$$\varphi_2 = \arccos\frac{2(m+m_1)g + cl_0}{ca}.$$



К задаче 53.6

53.7(52.7). Концы однородного тяжелого стержня длины l могут скользить без трения по кривой, заданной уравнением $f(x, y) = 0$. Определить положения равновесия стержня. (Ось y направлена по вертикали вверх, ось x — по горизонтали вправо.)

Ответ: Координаты концов стержня, отвечающие положениям равновесия, будут решениями системы

$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2-l^2=0,\quad f(x_1, y_1)=0,\quad f(x_2, y_2)=0,$$

$$2(y_2-y_1)\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_2} = (x_2-x_1)\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial y_2}+\frac{\partial f}{\partial y_1}\frac{\partial f}{\partial x_2}\right].$$

53.8(52.8). Однородный тяжелый стержень длины l может скользить своими концами без трения по параболе $y = ax^2$. Определить возможные положения равновесия. (Ось y направлена по вертикали вверх, ось x — по горизонтали вправо.)

Ответ: Первое положение равновесия:

$$x_2 = -x_1 = l/2,\quad y_1 = y_2 = al^2/4.$$

Второе положение равновесия определяется из уравнения $\mathrm{ch}\,\xi = \sqrt{al}$ по формулам

$$x_1 = -\frac{1}{2a}e^{-\xi},\quad y_1 = \frac{1}{4a}e^{-2\xi},\quad x_2 = \frac{1}{2a}e^{\xi},\quad y_2 = \frac{1}{4a}e^{2\xi}.$$

53.9(52.9). Решить задачу 53.7 в предположении, что кривая является эллипсом $\left(f(x, y) = \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0\right)$, а длина стержня удовлетворяет условию $l < 2a$. Определить возможные положения равновесия стержня.

Указание. Вместо декартовых координат следует ввести координату φ (эксцентрическую аномалию) с помощью соотношений $x = a\cos\varphi$, $y = b\sin\varphi$.

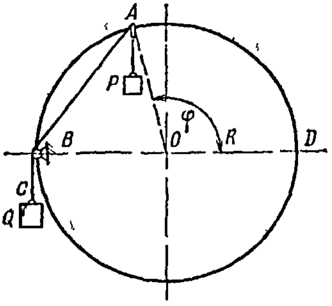
Ответ: Положения равновесия отвечают значениям эксцентрических аномалий, определяемым из уравнений

а) $\varphi_1 = \pi - \varphi_2$, $\cos\varphi_2 = \sqrt{\frac{l}{2a}}$ (существует при $l \leqslant 2a$);

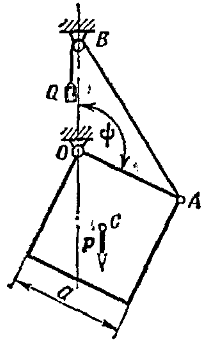
б) $\sin\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} = \sqrt{\frac{l}{2b}}$, $\cos\frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} = \sqrt{\frac{1 - lb/(2a^2)}{1 - b^2/(a^2)}}$ (существует при $a > b$ и $l < 2b$).

53.10(52.10). По гладкому проволочному кольцу радиуса R, расположенному в вертикальной плоскости, может скользить без трения колечко A. К этому колечку на нити подвешен груз массы m_1, другая нить, перекинутая через ничтожно малый блок B, расположенный на конце горизонтального диаметра большого кольца, имеет на конце C другой груз Q массы m_2. Определить положения равновесия колечка A и исследовать, какие из них устойчивы, какие нет.

Указание. Положение колечка A следует характеризовать центральным углом $\varphi = \angle DOA$. Надо отдельно рассматривать равновесие колечка на верхней и нижней полуокружностях.



К задаче 53.10



К задаче 53.11

Ответ: На верхней полуокружности ($0 < \varphi < \pi$) при любых значениях m_2/m_1 существует положение неустойчивого равновесия $\sin\frac{\varphi_0}{2} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{m_2^2}{m_1^2} + 8} - \frac{m_2}{m_1}\right)$, причем $0 < \varphi_0 < \pi/2$. На нижней полуокружности ($\pi < \varphi < 2\pi$) при $m_2/m_1 \leqslant 1$ существует положение устойчивого равновесия $\sin\frac{\varphi_0}{2} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{m_2^2}{m_1^2} + 8} + \frac{m_2}{m_1}\right)$, причем $\pi < \varphi_0 < \frac{3\pi}{2}$.

53.11(52.11). Однородная квадратная пластинка может вращаться в вертикальной плоскости около оси, проходящей через угол O; вес пластинки P, длина ее стороны a. К углу A пластинки привязана нить длины l, перекинутая через малый блок B, отстоящий на расстоянии a по вертикали от точки O. На нити висит груз веса $Q=\frac{\sqrt{2}}{2}P$. Определить положения равновесия системы и исследовать их устойчивость

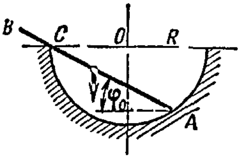
Ответ: Положения равновесия отвечают следующим значениям угла ψ. $\psi_1=0$, $\psi_2=\pi/6$, $\psi_3=\pi/2$, $\psi_4=3\pi/2$. Первое и третье положения равновесия устойчивы.

53.12(52.12). Однородный тяжелый стержень AB длины $2a$ опирается на криволинейную направляющую, имеющую форму полуокружности радиуса R. Определить, пренебрегая трением, положение равновесия и исследовать его устойчивость

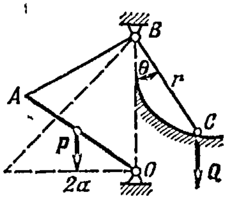
Ответ: В положении равновесия стержень наклонен к горизонтальной линии под углом φ_0, определяемым из уравнения

$$\cos\varphi_0=\frac{1}{8R}\left[a+\sqrt{a^2+32R^2}\right]$$

(предполагается, что $\sqrt{2/3}\,R<a<2R$). Это положение равновесия устойчиво



К задаче 53.12

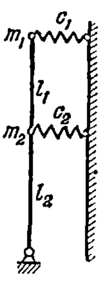


К задаче 53.13

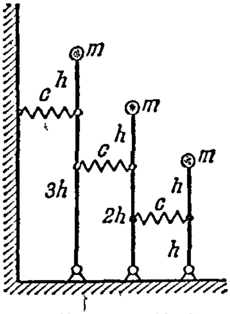
53.13(52.13). Подъемный мост OA схематически изображен на рисунке в виде однородной пластины веса P и длины $2a$. К середине края пластины прикреплен канат длины l, перекинутый через малый блок, лежащий на вертикали на расстоянии $2a$ над точкой O. Другой конец C каната соединен с противовесом, скользящим без трения по криволинейной направляющей. Определить форму этой направляющей и вес противовеса Q так, чтобы система находилась в безразличном равновесии. При горизонтальном положении моста противовес C находится на прямой OB.

Ответ: $Q=P/\sqrt{2}$; уравнение направляющей в полярных координатах r, ϑ: $r^2=2\left(l-2\sqrt{2}\,a\cos\vartheta\right)r+4\sqrt{2}\,al-l^2-8a^2$.

53.14(52.14). Исследовать устойчивость вертикального положения равновесия «обращенного» двойного маятника, изображенного на рисунке. Маятник может быть схематизирован в виде двух материальных точек масс m_1 и m_2, связанных стержнями длин l_1 и l_2. В вертикальном положении равновесия пружины (жесткости их c_1 и c_2) не напряжены.



К задаче 53.14



К задаче 53.15

Ответ: Условия устойчивости имеют вид $c_1l_1>m_1g$, $\left[(c_1+c_2)\,l_2-(m_1+m_2)\,g\right]\left[c_1l_1-m_1g\right]>c_1^2l_1l_2$.

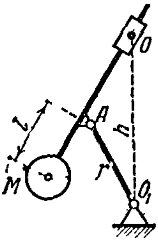
53.15(52.15). Исследовать устойчивость вертикального положения равновесия системы маятников, изображенной на рисунке; длина стержня первого маятника $4h$, второго $3h$ и третьего $2h$.

Массы всех маятников и жесткости пружин одинаковы и соответственно равны m и c. Расстояния точек прикрепления пружин от центров масс равны h. Массой стержней пренебречь, а массы m рассматривать как материальные точки; когда маятники находятся в вертикальном положении, пружины не напряжены.

Ответ: Условия устойчивости имеют вид

$$13ch^2 - 4mgh > 0, \quad 49c^2h^4 - 59mgch^3 + 12m^2g^2h^2 > 0,$$
$$36c^3h^6 - 153mgc^2h^5 + 130m^2g^2ch^4 - 24m^3g^3h^3 > 0.$$

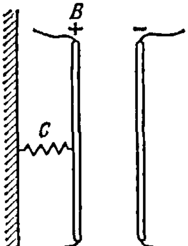
53.16(52.16). В маятнике паллографа груз M подвешен на стержне OM, свободно проходящем через вращающийся цилиндрик O и шарнирно соединенном в точке A с коромыслом AO_1, вращающимся около оси O_1. Длина коромысла r, расстояние от центра масс груза до шарнира A равно l, расстояние $OO_1 = h$. Исследовать устойчивость вертикального положения равновесия маятника. Размерами груза и массой стержней пренебречь.



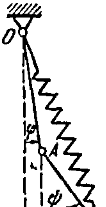
К задаче 53.16

Ответ: При $\sqrt{rl} > h - r$ — положение равновесия устойчиво; при $\sqrt{rl} < h - r$ — неустойчиво.

53.17(52.17). Прямолинейный проводник, по которому течет ток силы i_1, притягивает параллельный ему провод AB, по которому течет ток силы i_2. Провод AB имеет массу m; к нему присоединена пружина жесткости c, длина каждого из проводов l. При отсутствии в проводе AB тока расстояние между проводами равно a. Определить положения равновесия системы и исследовать их устойчивость.



К задаче 53.17



К задаче 53.18

Указание. Сила взаимодействия двух параллельных проводников с токами i_1 и i_2 длины l, отстоящих на расстоянии d друг от друга, определяется по формуле $F = \frac{2i_1i_2}{d} l$.

Ответ: При $\alpha = \frac{2i_1i_2l}{c} < \frac{a^2}{4}$ имеются два положения равновесия: $x_1 = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - \alpha}$ и $x_2 = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - \alpha}$; x_1 отвечает устойчивому положению равновесия, x_2 — неустойчивому. При $\alpha > a^2/4$ положений равновесия нет. При $\alpha = a^2/4$ имеем единственное положение равновесия, которое неустойчиво.

53.18. Стержень OA длины a может свободно вращаться вокруг точки O. К концу A стержня шарнирно прикреплен стержень AB длины a, на другом конце которого закреплен груз B массы m. Точка O и точка B соединены между собой пружиной жесткости c. Масса пружины пренебрежимо мала, длина пружины в ненапряженном состоянии равна a. Найти положения равновесия, считая, что система расположена в вертикальной плоскости. Массой стержней AB и OA пренебречь.

Ответ: Четыре состояния равновесия

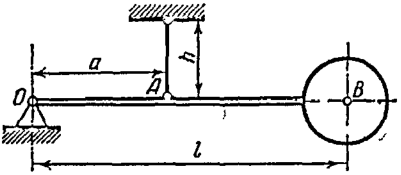
$$\varphi_1 = 0,\quad \psi_1 = 0;\quad \varphi_2 = \pi,\quad \psi_2 = \pi;\quad \varphi = \mp\varphi_3,\quad \psi = \pm\psi_3,$$

где $\cos\varphi_3 = \cos\psi_3 = \frac{mg + ca}{2ca}$. При $mg > ca$ устойчиво состояние равновесия $\varphi_1 = 0$, $\psi_1 = 0$ При $mg < ca$ устойчивы состояния равновесия $\varphi = \mp\varphi_3$, $\psi = \pm\psi_3$. Состояние равновесия $\varphi_2 = \pi$, $\psi_2 = \pi$ всегда неустойчиво

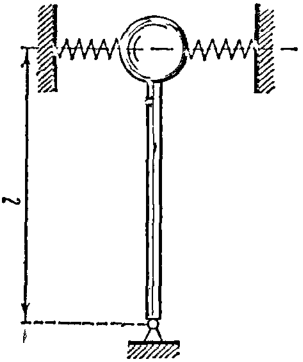
§ 54. Малые колебания системы с одной степенью свободы

54.1(53.1). Жесткий стержень OB длины l может свободно качаться на шаровом шарнире около конца O и несет шарик веса Q на другом конце. Стержень удерживается в горизонтальном положении посредством нерастяжимого вертикального шнура длины h Расстояние $OA = a$. Если шарик оттянуть перпендикулярно плоскости рисунка и затем отпустить, то система начнет колебаться Пренебрегая массой стержня, определить период малых колебаний системы.

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{\frac{hl}{ag}}$.



К задаче 54 1



К задаче 54 2

54.2(53.2). Определить период малых колебаний астатического маятника, употребляемого в некоторых сейсмографах для записи колебаний почвы. Маятник состоит из жесткого стержня длины l, несущего на конце массу m, зажатую между двумя горизонтальными пружинами жесткости c с закрепленными концами. Массой стержня пренебречь, и считать пружины в положении равновесия ненапряженными

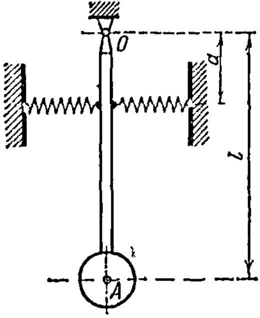
Ответ: $T = \frac{2\pi}{\sqrt{2\frac{c}{m} - \frac{g}{l}}}$.

54.3(53.3). Маятник состоит из жесткого стержня длины l, несущего массу m на своем конце К стержню прикреплены две пружины жесткости c на расстоянии a от его верхнего конца; противоположные концы пружин закреплены. Пренебрегая массой стержня, найти период малых колебаний маятника.

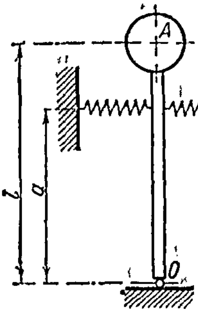
Ответ: $T = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{2ca^2}{ml^2} + \dfrac{g}{l}}}$.

54.4(53.4). Предполагая, что маятник, описанный в предыдущей задаче, установлен так, что масса m расположена выше точки подвеса, определить условие, при котором вертикальное положение равновесия маятника устойчиво, и вычислить период малых колебаний маятника.

Ответ: $a^2 > \dfrac{mgl}{2c}$, $\quad T = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{2ca^2}{ml^2} - \dfrac{g}{l}}}$.



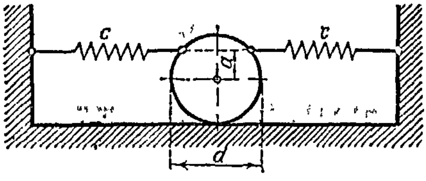
К задаче 54.3



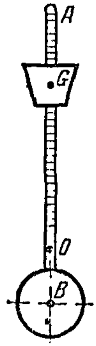
К задаче 54.4

54.5(53.5). Цилиндр диаметра d и массы m может катиться без скольжения по горизонтальной плоскости. Две одинаковые пружины жесткости c прикреплены посредине его длины на расстоянии a от оси цилиндра; противоположные концы пружин закреплены. Определить период малых колебаний цилиндра.

Ответ: $T = \dfrac{\pi\sqrt{3}}{1 + 2a/d}\sqrt{\dfrac{m}{c}}$.



К задаче 54.5



К задаче 54.6

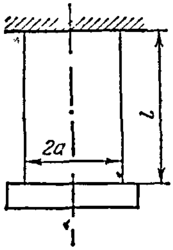
54.6(53.6). Определить период малых колебаний метронома, состоящего из маятника и добавочного подвижного груза G массы m. Момент инерции всей системы относительно горизонтальной оси вращения изменяется путем смещения подвижного груза G.

Масса маятника M, расстояние центра масс маятника от оси вращения O равно s_0; расстояние $OG = s$, момент инерции маятника относительно оси вращения J_0

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{J_0 + ms^2}{(Ms_0 - ms)\,g}}$

54.7(53.7). Тело, подвешенное на двух вертикальных нитях длины l каждая, расстояние между которыми $2a$, закручивается вокруг вертикальной оси, лежащей в плоскости нитей и равноудаленной от них (бифилярный подвес). Радиус инерции тела относительно оси вращения ρ. Найти период малых колебаний

Ответ: $T = 2\pi\dfrac{\rho}{a}\sqrt{\dfrac{l}{g}}$.

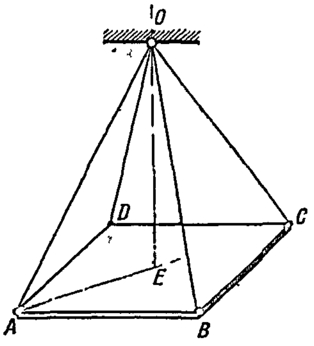


К задаче 54 7

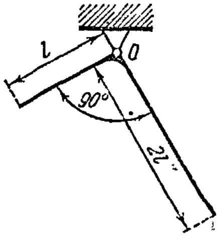
54.8(53.8). Круглый обруч подвешен к трем неподвижным точкам тремя одинаковыми нерастяжимыми нитями длины l, так, что плоскость обруча горизонтальна. Нити в положении равновесия обруча вертикальны и делят окружность обруча на три равные части. Найти период малых колебаний обруча вокруг оси, проходящей через центр обруча

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{l/g}$.

54.9(53.9). Тяжелая квадратная платформа $ABCD$ массы M подвешена на четырех упругих канатах, жесткости c каждый, к неподвижной точке O, отстоящей в положении равновесия системы на расстоянии l по вертикали от центра E платформы. Длина диагонали платформы a. Определить период вертикальных колебаний системы.



К задаче 54 9



К задаче 54 10

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{M}{c}\,\dfrac{(a^2 + 4l^2)}{16l^2}\,\dfrac{1}{1 + \dfrac{Mga^2}{16cl^3}}}$.

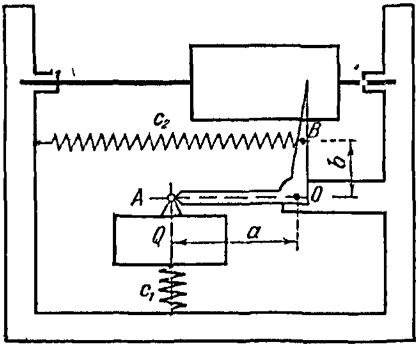
54.10(53.10). Уголок, составленный из тонких однородных стержней длин l и $2l$ с углом между стержнями 90°, может вращаться вокруг точки O. Определить период малых колебаний уголка около положения равновесия.

Ответ: $T = 2\pi \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{17}} \sqrt{\frac{l}{g}} = 7{,}53 \sqrt{\frac{l}{g}}$.

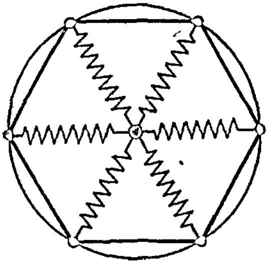
54.11(53.11). Определить период малых свободных колебаний маятника массы M, ось вращения которого образует угол β с горизонтальной плоскостью Момент инерции маятника относительно оси вращения J, расстояние центра масс от оси вращения s

Ответ: $T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{Mgs \cos \beta}}$.

54.12(53.12). В приборе для регистрации вертикальных колебаний фундаментов машин груз Q массы m, закрепленный на вертикальной пружине, коэффициент жесткости которой c_1, шарнирно соединен со статически уравновешенной стрелкой, выполненной в виде ломаного рычага с моментом инерции J относительно оси вращения O и отжимаемой к равновесному положению горизонтальной пружиной с коэффициентом жесткости c_2 Определить период свободных колебаний стрелки около ее вертикального равновесного положения, если $OA = a$ и $OB = b$ Размерами груза и влиянием первоначального натяжения пружины пренебречь.



К задаче 54 12



К задаче 54 13

Ответ: $T = 2\pi \sqrt{\frac{J + ma^2}{c_1 a^2 + c_2 b^2}}$.

54.13(53.13). Амортизационное устройство может быть схематизировано в виде материальной точки массы m, соединенной n пружинами жесткости c с вершинами правильного многоугольника. Длина каждой пружины в ненапряженном состоянии a, радиус окружности, описанной около многоугольника b. Определить частоту горизонтальных свободных колебаний системы, расположенной в горизонтальной плоскости

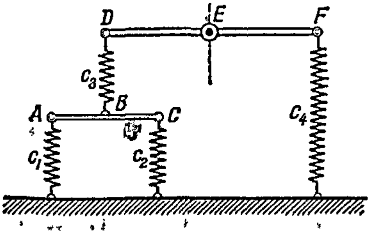
Указание Для вычисления потенциальной энергии с точностью до величин второго порядка малости включительно следует определить удлинение пружин с той же степенью точности

Ответ. $k = \sqrt{\frac{nc}{2m} \frac{2b - a}{b}}$.

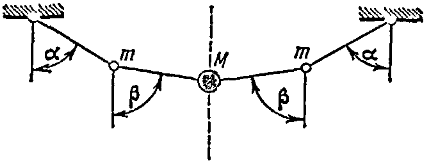
54.14(53.14). В предыдущей задаче определить частоту колебаний, перпендикулярных плоскости многоугольника. Массами пружин пренебречь.

Ответ: $k=\sqrt{\dfrac{nc\,(b-a)}{mb}}$.

54.15(53.15). Определить частоту малых вертикальных колебаний материальной точки E, входящей в состав системы, изображенной на рисунке. Масса материальной точки m. Расстояния $AB=BC$ и $DE=EF$; жесткости пружин c_1, c_2, c_3, c_4 заданы. Бруски AC и DF считать жесткими, не имеющими массы.



К задаче 54.15



К задаче 54.16

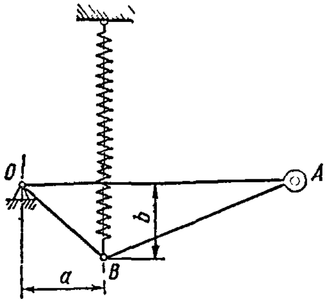
Ответ: $k=\sqrt{\dfrac{4}{m\left(\dfrac{1}{4c_1}+\dfrac{1}{4c_2}+\dfrac{1}{c_3}+\dfrac{1}{c_4}\right)}}$.

54.16(53.16). На нерастяжимой нити длины $4a$ находятся три груза, массы которых соответственно равны m, M, m. Нить симметрично подвешена за концы так, что ее начальный и конечный участки образуют углы α с вертикалью, а средние участки — углы β. Груз M совершает малые вертикальные колебания. Определить частоту свободных вертикальных колебаний груза M.

Ответ:

$$k=\sqrt{\frac{g\,(\cos^2\beta\sin\beta+\cos^2\alpha\sin\alpha)}{a\cos\beta\cos\alpha\sin(\beta-\alpha)\cos(\beta-\alpha)}},$$

при этом $2m=\dfrac{M\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\cos\beta}$.

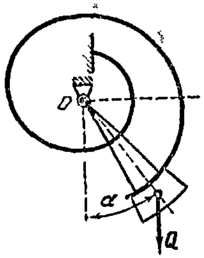


К задаче 54.17

54.17(53.17). Вертикальный сейсмограф Б. Б. Голицина состоит из рамки AOB, на которой укреплен груз веса Q. Рамка может вращаться вокруг горизонтальной оси O. В точке B рамки, отстоящей от O на расстоянии a, прикреплена пружина жесткости c, работающая на растяжение. В положении равновесия стержень OA горизонтален. Момент инерции рамки и груза относительно O равен J, высота рамки b. Пренебрегая массой пружины и считая, что центр масс груза и рамки находится в точке A, отстоящей от O на расстоянии l, определить частоту малых колебаний маятника.

Ответ: $k=\sqrt{\frac{ca^2 - F_0 b\,(1-b/L)}{J}}$, где $F_0 = Q\frac{l}{a}$ — натяжение пружины в положении равновесия, L — длина пружины в положении равновесия

54.18(53.18). В вибрографе, предназначенном для записи колебаний фундаментов, частей машин и т. п., маятник веса Q удерживается под углом α к вертикали с помощью спиральной пружины жесткости c; момент инерции маятника относительно оси вращения O равен J, расстояние центра масс маятника от оси вращения s. Определить период свободных колебаний вибрографа.

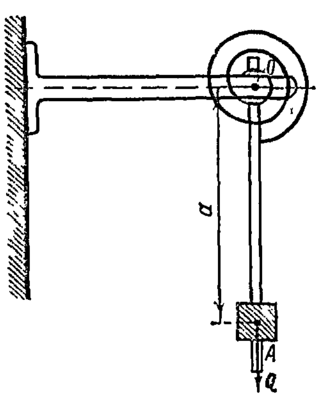


К задаче 54.18

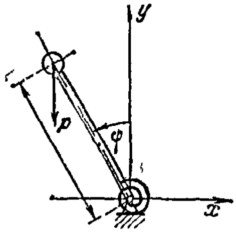
Ответ: $T=2\pi\sqrt{\frac{J}{Qs\sin\alpha + c}}$.

54.19(53.19). В вибрографе для записи горизонтальных колебаний маятник OA, состоящий из рычага и груза, может качаться вокруг горизонтальной оси O около вертикального положения устойчивого равновесия, удерживаясь в этом положении собственным весом и спиральной пружиной. Зная максимальный статический момент силы тяжести маятника $Qa = 45$ Н·см, момент инерции относительно оси O $J = 0{,}3$ кг·см^2 и жесткость при кручении пружины $c = 45$ Н·см, определить период собственных колебаний маятника при малых углах отклонения.

Ответ: $T = 0{,}364$ с.



К задаче 54.19



К задаче 54.20

54.20(53.20). Найти, при каком условии верхнее вертикальное положение равновесия маятника является устойчивым, если свободному вращению маятника препятствует спиральная пружина жесткости c, установленная так, что при верхнем вертикальном положении маятника она не напряжена. Вес маятника P. Расстояние от центра масс маятника до точки подвеса равно a. Найти также период малых колебаний маятника, если его момент инерции относительно оси вращения равен J_0.

Ответ: $c > Pa$, $T = 2\pi\sqrt{\frac{J_0}{c-Pa}}$.

54.21(53.21). Показать, что при $c < Pa$ маятник, рассмотренный в предыдущей задаче, будет иметь не менее трех положений равновесия. Найти также период малых колебаний.

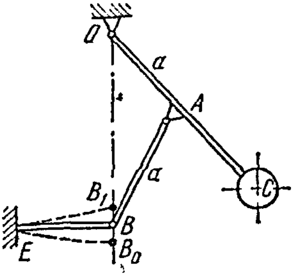
Ответ: При $\varphi = 0$ — неустойчивое положение равновесия. Устойчивые положения равновесия будут при $\varphi = \varphi_0 > 0$, $\varphi = -\varphi_0 < 0$, где φ_0 — корень уравнения $\sin\varphi = \frac{c}{Pa}\varphi$.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_0\varphi_0}{Pa\cos\varphi_0(\operatorname{tg}\varphi_0 - \varphi_0)}}.$$

54.22(53.22). Стержень OA маятника при помощи шатуна AB соединен с маленькой стальной рессорой EB жесткости c. В ненапряженном состоянии рессора занимает положение EB_1; известно, что к рессоре нужно приложить силу F_0, направленную по OB, чтобы привести ее в положение EB_0, соответствующее равновесию маятника, $OA = AB = a$, массой стержней пренебрегаем; расстояние центра масс маятника от оси вращения $OC = l$; вес маятника Q. С целью достижения наилучшего изохронизма (независимость периода колебаний от угла первоначального отклонения) система отрегулирована так, чтобы в уравнении движения маятника

$$\varphi = f(\varphi) = -\beta\varphi + \ldots$$

первый из отброшенных членов был порядка φ^5. Установить, какая зависимость должна для этого иметь место между постоянными Q, F_0, c, a, l, и вычислить период малых колебаний маятника.



К задаче 54 22

Ответ: $Ql - 2aF_0 = 12a^2c$, $\quad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\frac{1}{\sqrt{1 - 2aF_0/(Ql)}}$.

54.23(53.23). Показать, что при условии предыдущей задачи увеличение периода колебаний при отклонениях маятника от положения равновесия на угол $\varphi_0 = 45°$ не превышает 0,4 %. Каково будет при этих условиях изменение периода простого маятника?

Ответ: Сохраняя в уравнении движения маятника член φ^5, получим $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\frac{1}{\sqrt{1 - 2aF_0/Ql}}\left(1 + \frac{\varphi_0^4}{96}\right)$; для простого маятника при отклонении на угол 45° изменение периода составляет 4 %.

54.24(53.24). При условиях задачи 54 22 маятник отрегулирован так, что $Ql = 2aF_0$. Найти период малых колебаний маятника при отклонении его от положения равновесия на угол φ_0.

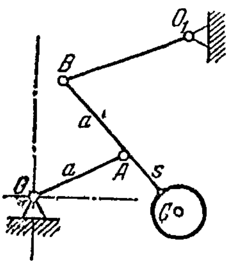
Ответ: $T = \frac{4l}{a\varphi_0}\sqrt{\frac{Q}{cg}}\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{1 - x^4}} = 5{,}24\frac{l}{a\varphi_0}\sqrt{\frac{Q}{cg}}$.

54.25(53.25). В маятнике паллографа груз M маятника повешен на стержне, свободно проходящем через вращающийся цилиндрик

O и шарнирно соединенном в точке A с коромыслом AO_1, качающимся вокруг неподвижной оси O_1. При каком условии вертикальное положение стержня OM маятника будет положением устойчивого равновесия? Найти период малых колебаний маятника около этого положения. Размерами груза и массой стержней пренебречь. (Размеры стержней указаны на рисунке к задаче 53.16.)

Ответ: $h - r < \sqrt{rl}$, $T = 2\pi (h - r + l) \sqrt{\dfrac{r}{[rl - (h - r)^2]\, g}}$.

54.26(53.26). Пренебрегая массой стержней, найти период малых колебаний маятника, изображенного на рисунке. Центр масс груза находится на продолжении шатуна шарнирного четырехзвенника $OABO_1$ в точке C. В положении равновесия стержни OA и BC вертикальны, стержень O_1B горизонтален: $OA = AB = a$, $AC = s$.



К задаче 54.26

Ответ: $T = 2\pi \dfrac{s + a}{\sqrt{g\,(s - a)}}$.

54.27(53.27). Определить период колебания груза P массы m, подвешенного на пружине с закрепленным верхним концом, если коэффициент жесткости пружины равен c, масса пружины m_0. Принять, что отношение отклонений двух точек пружины от своих положений равновесия равно отношению соответствующих расстояний этих точек до закрепленного конца пружины.

Ответ: $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{m + \frac{1}{3} m_0}{c}}$.

54.28(53.28). На нижнем конце вертикального цилиндрического упругого стержня с закрепленным верхним концом прикреплен в своем центре горизонтальный диск с моментом инерции J относительно вертикальной оси, проходящей через центр, момент инерции стержня относительно его оси равен J_0, коэффициент жесткости стержня при закручивании, т. е. момент, необходимый для закручивания нижнего конца стержня на один радиан, равен c. Определить период колебаний системы.

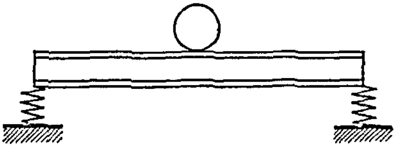
Ответ: $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{J + J_0/3}{c}}$.

54.29(53.29). Груз веса Q укреплен посредине балки, свободно опертой на концах, длина балки l, момент инерции поперечного сечения J, модуль упругости материала E. Определить, пренебрегая массой балки, число колебаний, совершаемых грузом в минуту.

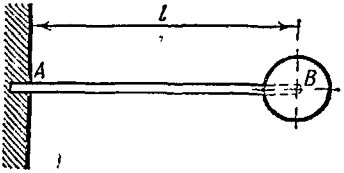
Ответ: $n = 2080 \sqrt{\dfrac{EJ}{Ql^3}}$, причем за единицу длины принят сантиметр.

54.30(54.33). Двутавровая балка с моментом инерции сечения $I = 180$ см^4, длины $l = 4$ м лежит на двух одинаковых упругих опорных пружинах, жесткость которых $c = 1{,}5$ кН/см, и несет посредине груз веса $Q = 2$ кН. Пренебрегая весом балки, определить период свободных колебаний системы. Модуль упругости материала балки $E = 2 \cdot 10^4$ кН/см^2.

Ответ: $T = 0{,}238$ с.



К задаче 54.30

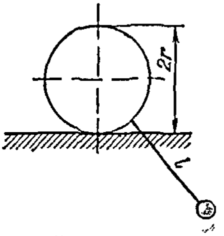


К задаче 54.31

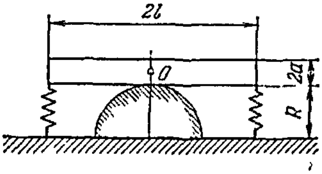
54.31(53.34). В конце B горизонтального стержня AB длины l, заделанного другим концом, находится груз веса Q, совершающий колебания с периодом T. Момент инерции сечения стержня относительно центральной оси сечения, перпендикулярной плоскости колебаний, равен J. Найти модуль упругости материала стержня.

Ответ: $E = \dfrac{4\pi^2 Q l^3}{3JgT^2}$

54.32(53.35). Диск массы M и радиуса r может катиться без скольжения по горизонтальной прямой. К диску жестко прикреплен стержень длины l, на конце которого находится точечная масса m. Найти период малых колебаний системы. Массой стержня пренебречь.



К задаче 54.32



К задаче 54.33

Ответ: $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{3Mr^2 + 2ml^2}{2mg\,(r + l)}}$.

54.33(53.36). На шероховатый круглый полуцилиндр радиуса R положен призматический брусок массы M с прямоугольным поперечным сечением. Продольная ось бруска перпендикулярна оси цилиндра. Длина бруска $2l$, высота $2a$. Концы бруска соединены с полом пружинами одинаковой жесткости c. Предполагая, что брусок не скользит по цилиндру, найти период его малых колебаний. Момент инерции бруска относительно поперечной горизонтальной оси, проходящей через центр масс, равен J_0.

Ответ. $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{Ma^2 + J_0}{Mg\,(R - a) + 2cl^2}}$.

54.34(53.37). Острота амплитудно-частотной характеристики системы с одной степенью свободы при действии силы трения, пропорциональной скорости, характеризуется «половинной шириной» амплитудно-частотной характеристики «Половинная ширина» амплитудно-частотной характеристики измеряется разностью между двумя частотами, для которых амплитуда колебаний равна половине амплитуды, соответствующей резонансу. Выразить «половинную ширину» амплитудно-частотной характеристики Δ через «коэффициент расстройки частот» $z = \omega/k$ и через приведенный коэффициент затухания $\delta = n/k$. Дать приближенную формулу для случая $\delta \ll 1$ (ω — частота вынуждающей силы, k — частота собственных колебаний; при резонансе $z = 1$).

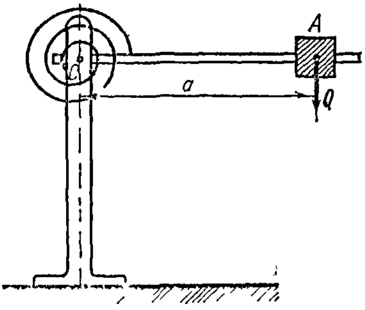
Ответ: «Половинная ширина» амплитудно-частотной характеристики равна

$$\Delta = z_2 - z_1 = \sqrt{1 - 2\delta^2 + 2\delta\sqrt{3 + \delta^2}} - \sqrt{1 - 2\delta^2 - 2\delta\sqrt{3 + \delta^2}},$$

или, если $\delta \ll 1$, $\Delta \approx 2\delta\sqrt{3}$.

54.35(53.38). В вибрографе, употребляемом для записи вертикальных колебаний, стержень OA, соединенный с пишущим пером прибора, может вращаться вокруг горизонтальной оси O. Стержень OA на конце A несет груз Q и удерживается в горизонтальном положении равновесия спиральной пружиной Определить относительное движение стержня OA, если виброграф укреплен на фундаменте, совершающем вертикальные колебания по закону $z = 0{,}2 \sin 25t$ см. Жесткость при кручении пружины $c = 1$ Н·см, момент инерции стержня OA с грузом Q относительно O равен $J = 4$ кг·см², $Qa = 100$ Н·см. Собственными колебаниями стержня пренебречь.

Ответ: $\varphi = 0{,}0051 \sin 25t$.

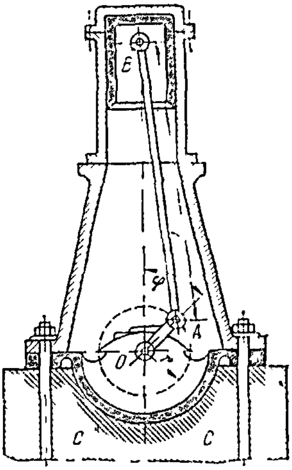


К задаче 54.35

54.36(53.39). В вибрографе, описанном в задаче 54.35, стержень снабжен электромагнитным тормозом в виде алюминиевой пластины, колеблющейся между полюсами неподвижно закрепленных магнитов Возникающие в пластине вихревые токи создают торможение, пропорциональное первой степени скорости движения пластины и доведенное до границы апериодичности Определить вынужденные колебания стрелки прибора, если последний закреплен на фундаменте, совершающем вертикальные колебания по закону $z = h \sin pt$

Ответ: $x = a\varphi = \dfrac{Qah}{Jg\left[1 + \dfrac{c}{Jp^2}\right]} \sin(pt - \varepsilon)$, $\quad \operatorname{tg}\varepsilon = \dfrac{2\sqrt{\dfrac{J}{c}}\,p}{1 - \dfrac{J}{c}p^2}$.

54.37(53.40). Вертикальный двигатель массы M_1 закреплен на фундаменте, имеющем площадь основания S; удельная жесткость грунта равна λ. Длина кривошипа двигателя r, длина шатуна l, угловая скорость вала ω, масса поршня и неуравновешенных частей, совершающих возвратно-поступательное движение, равна M_2, масса фундамента M_3; кривошип считать уравновешенным при помощи противовеса. Массой шатуна пренебречь. Определить вынужденные колебания фундамента.



К задаче 54.37

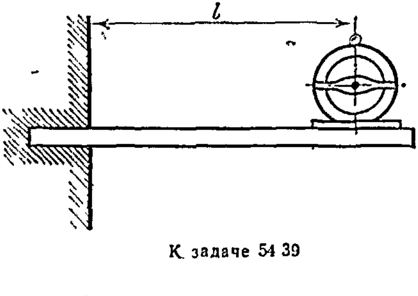
Указание. При расчетах пренебречь всеми членами, содержащими малое отношение r/l в степенях выше первой.

Ответ: Смещение центра масс фундамента от положения равновесия

$$\xi = \frac{M_2 r\omega^2}{(M_1+M_3)(k^2-\omega^2)}\cos\omega t + \frac{r}{l}\,\frac{M_2 r\omega^2}{(M_1+M_3)(k^2-4\omega^2)}\cos 2\omega t,$$

где $k = \sqrt{\dfrac{\lambda S}{M_1+M_3}}$.

54.38(53.41). Рассчитать вес фундамента под вертикальный двигатель массы $M = 10^4$ кг таким образом, чтобы амплитуда вынужденных вертикальных колебаний фундамента не превосходила 0,25 мм. Площадь основания фундамента $S = 100$ м^2, удельная жесткость грунта, находящегося под фундаментом, $\lambda = 490$ кН/м^3. Длина кривошипа двигателя $r = 30$ см, длина шатуна $l = 180$ см, угловая скорость вала $\omega = 8\pi$ рад/с, масса поршня и других неуравновешенных частей, совершающих возвратно-поступательное движение, $m = 250$ кг, кривошип считать уравновешенным при помощи противовеса. Массой шатуна пренебречь.



К задаче 54.39

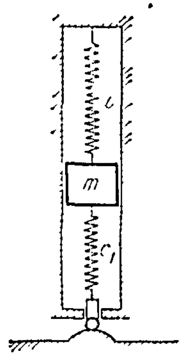
Указание. Воспользоваться результатом решения предыдущей задачи и ограничиться приближенным решением, отбросив член, содержащий r/l. Проверить законность указанного приближения.

Ответ: $G = 3592{,}7$ кН.

54.39(53.42). Электромотор массы $M = 1200$ кг установлен на свободных концах двух горизонтальных параллельных балок, заделанных вторыми концами в стену. Расстояние от оси электромотора до стены $l = 1{,}5$ м. Якорь электромотора вращается со скоростью $n = 50\pi$ рад/с, масса якоря $m = 200$ кг, центр масс его отстоит от оси вала на расстоянии $r = 0{,}05$ мм. Модуль упругости мягкой стали, из которой сделаны балки, $E = 19{,}6 \cdot 10^7$ Н/см². Определить момент инерции площади поперечного сечения так, чтобы амплитуда вынужденных колебаний не превосходила 0,5 мм. Весом балки пренебречь

Ответ: $J = 8740$ см⁴ или $J = 8480$ см⁴.

54.40(53.43). Кулачковый механизм для привода клапана может быть схематизирован в виде массы m, прикрепленной с одной стороны с помощью пружины жесткости c к неподвижной точке и получающей с другой стороны через пружину жесткости c_1 движение от поступательно движущегося кулачка, профиль которого таков, что вертикальное смещение определяется формулами



К задаче 54.40

$$x_1 = a\,[1 - \cos \omega t] \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi/\omega,$$
$$x_2 = 0 \quad \text{при} \quad t > 2\pi/\omega$$

Определить движение массы m.

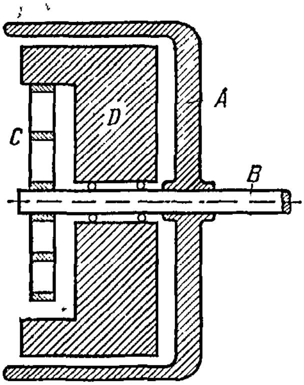
Ответ При $0 \leqslant t \leqslant 2\pi/\omega$

$$x = \frac{c_1 a}{m(k^2 - \omega^2)}\,[\cos kt - \cos \omega t] + \frac{c_1 a}{mk^2}\,[1 - \cos kt],$$

где $k = \sqrt{\dfrac{c + c_1}{m}}$ При $t > 2\pi/\omega$ груз совершает свободные колебания

$$x = \left[\frac{c_1 a}{m(k^2 - \omega^2)} - \frac{c_1 a}{mk^2}\right]\left[\cos kt - \cos k\left(t - \frac{2\pi}{\omega}\right)\right].$$

54.41(53.44). Для записи крутильных колебаний употребляется торсиограф, состоящий из легкого алюминиевого шкива A, заклиненного на валу B и тяжелого маховичка D, который может свободно вращаться относительно вала B Вал связан с маховичком D спиральной пружиной жесткости c Вал B движется по закону



К задаче 54.41

$$\varphi = \omega t + \varphi_0 \sin \omega t$$

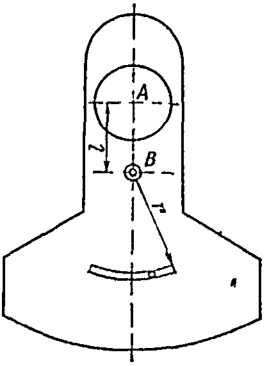
(равномерное вращение с наложением гармонических колебаний) Момент инерции маховичка относительно оси вращения J Исследовать вынужденные колебания маховичка торсиографа

Ответ: Угол относительного поворота маховичка $\psi = \dfrac{\varphi_0 \omega^2}{c/J - \omega^2}\sin \omega t$.

54.42(53.45). Для гашения колебаний коленчатого вала авиационного мотора в противовесе коленчатого вала делается желоб в форме дуги окружности радиуса r с центром, смещенным на $AB = l$ от оси вращения; по желобу может свободно двигаться дополнительный противовес, схематизируемый в виде материальной точки Угловая скорость вращения вала равна ω Пренебрегая влиянием силы тяжести, определить частоту малых колебаний дополнительного противовеса.

Ответ: $k = \omega\sqrt{l/r}$.

54.43(53.46). К грузу веса P, висящему на пружине жесткости c, в начальный момент времени приложена постоянная сила F, действие которой прекращается по прошествии времени τ Определить движение груза



К задаче 54 42

Ответ: При $0 \leqslant t \leqslant \tau$

$$x = \frac{l}{c}\left[1 - \cos\sqrt{\frac{cg}{P}}\,t\right];$$

при $\tau \leqslant t$

$$x = \frac{F}{c}\left[\cos\sqrt{\frac{cg}{P}}(t-\tau) - \cos\sqrt{\frac{cg}{P}}\,t\right].$$

54.44(53.47). Определить максимальное отклонение от положения равновесия системы, описанной в предыдущей задаче, в случае действия сил различной продолжительности: 1) $\tau = 0$, $\lim\limits_{\tau > 0} F\tau = S$ (удар); 2) $\tau = T/4$, 3) $\tau = T/2$, где T — период свободных колебаний системы

Ответ: 1) $x_{\max} = \sqrt{\frac{g}{cP}}\,S$; 2) $x_{\max} = \sqrt{2}\,\frac{F}{c} = \sqrt{2}\,x_{\text{ст}}$; 3) $x_{\max} = 2\,\frac{F}{c} = 2x_{\text{ст}}$.

54.45(53.48). Найти закон движения маятника, состоящего из материальной точки, висящей на нерастяжимой нити длины l Точка подвеса маятника движется по заданному закону $\xi = \xi(t)$ по горизонтальной прямой

Ответ: Угол отклонения маятника от вертикали φ изменяется по закону

$$\varphi = c_1 \sin kt + c_2 \cos kt - \frac{\xi(t)}{l} + \frac{k}{l}\int\limits_0^t \xi(\tau)\sin k(t-\tau)\,d\tau,$$

где $k = \sqrt{g/l}$.

54.46(53.49). На материальную точку массы m, подвешенную на пружине жесткости c, действует возмущающая сила, заданная условиями:

$$F = 0 \quad \text{при} \quad t < 0;$$

$$F = \frac{t}{\tau} F_0 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau;$$

$$F = F_0 \quad \text{при} \quad t > \tau.$$

Определить движение точки и найти амплитуду колебаний при $t > \tau$

Ответ: $x = \frac{\Gamma_0}{c}\left[1 - \frac{2}{k\tau}\cos k\left(t - \frac{\tau}{2}\right)\sin\frac{k\tau}{2}\right]$; $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$; $A = \frac{2\Gamma_0}{kc\tau}\sin\frac{kt}{2}$.

54.47(53.50). На груз массы m, висящий на пружине жесткости c, действует возмущающая сила, изменяющаяся по закону $Q(t) = \Gamma|\sin\omega t|$. Определить колебания системы, имеющие частоту возмущающей силы.

Ответ: При $0 \leqslant t \leqslant \pi/\omega$

$$x = \frac{\Gamma\omega}{mk(\omega^2 - k^2)}\left[\sin kt + \operatorname{ctg}\frac{k\pi}{2\omega}\cos kt\right] - \frac{F}{m(\omega^2 - k^2)}\sin\omega t;$$

$$k = \sqrt{c/m}.$$

54.48(53.51). Определить критическую угловую скорость (относительно поперечных колебаний) легкого вала, несущего посредине диск веса P. Рассмотреть следующие случаи: 1) вал на обоих концах опирается на длинные подшипники (концы можно считать заделанными); 2) на одном конце вал опирается на длинный подшипник (конец заделан), а на другом — на короткий подшипник (конец оперт). Жесткость вала на изгиб EJ, длина вала l.

Ответ: 1) $\omega_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{192EJg}{Pl^3}}$; 2) $\omega_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{768EJg}{7Pl^3}}$.

54.49(53.52). Определить критическую скорость вращения легкого вала длины l, если вал лежит на двух коротких подшипниках и на выступающем конце длиной a несет диск веса P. Жесткость вала на изгиб EJ.

Ответ: $\omega_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{3EJg}{Pla^2}}$.

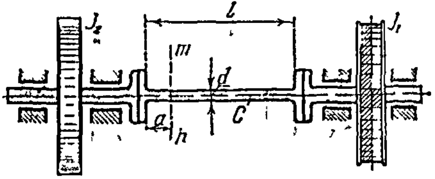
54.50(53.53). Определить критическую скорость вращения тяжелого вала, лежащего одним концом в коротком подшипнике, а другим — в длинном; длина вала l, жесткость вала на изгиб EJ, вес единицы длины вала q

Ответ $\omega_{\text{кр}} = 15{,}4\sqrt{\frac{EJg}{ql^4}}$.

§ 55. Малые колебания систем с несколькими степенями свободы

55.1(54.1). Для экспериментального исследования процесса регулирования гидравлических турбин сконструирована установка, состоящая из турбины, ротор которой имеет момент инерции относительно оси вращения $J_1 = 50$ кг·см², маховика с моментом инерции $J_2 = 1500$ кг·см² и упругого вала C, соединяющего ротор турбины с маховиком, вал имеет длину $l = 1552$ мм, диаметр $d = 25{,}4$ мм, модуль сдвига материала вала $G = 8800$ кН/см², Пренебрегая массой вала и скручиванием его толстых участков, найти то сечение *mn* вала, которое при свободных колебаниях данной системы остается неподвижным (узловое сечение), а также вычислить период T свободных колебаний системы.

Ответ: $a = 50$ мм, $T = 0{,}09$ с



К задаче 55.1

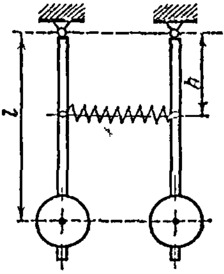
55.2(54.2). Определить частоты свободных крутильных колебаний системы, состоящей из вала, закрепленного на одном конце, с насаженными посредине и на другом конце однородными дисками. Момент инерции каждого диска относительно оси вала J; жесткость на кручение участков вала $c_1 = c_2 = c$. Массой вала пренебречь.

Ответ: $k_1 = 0{,}62\sqrt{c/J}$, $k_2 = 1{,}62\sqrt{c/J}$.

55.3(54.3). Определить частоты главных крутильных колебаний системы, состоящей из вала с насаженными на него тремя одинаковыми дисками. Два диска закреплены на концах вала, а третий — посредине. Момент инерции каждого диска относительно оси вала J; жесткость на кручение участков вала $c_1 = c_2 = c$. Массой вала пренебречь.

Ответ: $k_1 = \sqrt{c/J}$, $k_2 = \sqrt{3c/J}$.

55.4(54.4). Два одинаковых маятника длины l и массы m каждый соединены на уровне h упругой пружиной жесткости c, прикрепленной концами к стержням маятников. Определить малые колебания системы в плоскости равновесного положения маятников, после того как одному из маятников сообщено отклонение на угол α от положения равновесия; начальные скорости маятников равны нулю. Массами стержней маятников и массой пружины пренебречь.

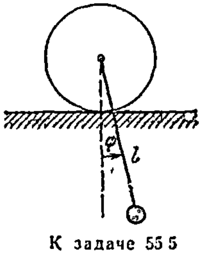


К задаче 55.4

Ответ: $\varphi_1 = \alpha\cos\frac{k_1 + k_2}{2}t\cos\frac{k_2 - k_1}{2}t$,

$$\varphi_2 = \alpha\sin\frac{k_1 + k_2}{2}t\sin\frac{k_2 - k_1}{2}t,$$

где φ_1 и φ_2 — углы отклонения маятников от вертикали и $k_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}$, $k_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2ch^2}{ml^2}}$.



К задаче 55.5

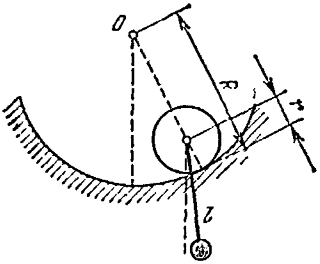
55.5(54.5). Диск массы M может катиться без скольжения по прямолинейному рельсу. К центру диска шарнирно прикреплен стержень длины l, на конце которого находится точечный груз массы m. Найти период малых колебаний маятника. Массой стержня пренебречь.

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{\frac{3M}{3M+2m}\frac{l}{g}}$.

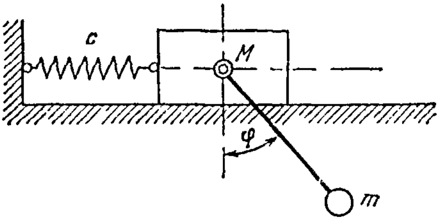
55.6(54.6). Заменяя в предыдущей задаче прямолинейный рельс дугой окружности радиуса R, найти частоты малых колебаний рассматриваемой системы.

Ответ: Главные частоты являются корнями уравнения

$$\frac{3M}{3M+2m}k^4 - \left[\frac{2(M+m)g}{(3M+2m)(R-r)} + \frac{g}{l}\right]k^2 + \frac{2(M+m)g^2}{(3M+2m)(R-r)l} = 0.$$



К задаче 55.6



К задаче 55.7

55.7(54.7). Маятник состоит из ползуна массы M, скользящего без трения по горизонтальной плоскости, и шарика массы m, соединенного с ползуном стержнем длины l, могущим вращаться вокруг оси, связанной с ползуном. К ползуну присоединена пружина жесткости c, другой конец которой закреплен неподвижно. Определить частоты малых колебаний системы.

Ответ. Искомые частоты являются корнями уравнения

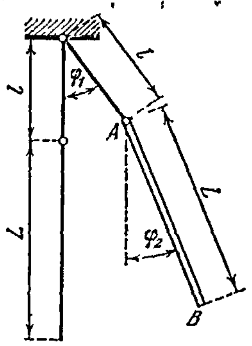
$$k^4 - \left[\frac{c}{M} + \frac{g}{l}\frac{M+m}{M}\right]k^2 + \frac{c}{M}\frac{g}{l} = 0.$$

55.8(54.8). Два одинаковых физических маятника подвешены на параллельных горизонтальных осях, расположенных в одной горизонтальной плоскости, и связаны упругой пружиной, длина которой в ненапряженном состоянии равна расстоянию между осями маятников. Пренебрегая сопротивлением движению и массой пружины, определить частоты и отношения амплитуд главных колебаний системы при малых углах отклонения от равновесного положения. Вес каждого маятника P, радиус инерции его относительно оси, проходящей через центр масс параллельно оси подвеса, ρ; жесткость пружины c, расстояния от центра масс маятника и от точки прикрепления пружины к маятникам до оси подвеса равны соответственно l и h. (См. рисунок к задаче 55.4.)

Ответ: $k_1^2 = \frac{gl}{\rho^2+l^2}$, $k_2^2 = \frac{(Pl+2ch^2)g}{P(\rho^2+l^2)}$, $\frac{A_1^{(1)}}{A_2^{(1)}} = 1$, $\frac{A_1^{(2)}}{A_2^{(2)}} = -1$.

55.9(54.9). Однородный стержень AB длины L подвешен при помощи нити длины $l = 0{,}5L$ к неподвижной точке. Пренебрегая массой нити, определить частоты главных колебаний системы и найти отношение отклонений стержня и нити от вертикали при первом и втором главных колебаниях.

Ответ. $k_1 = 0{,}677\sqrt{g/l}$, $k_2 = 2{,}558\sqrt{g/l}$, в первом главном колебании $\varphi_1 = 0{,}847\varphi_2$, во втором $\varphi_1 = -1{,}180\varphi_2$, где φ_1 и φ_2 — амплитуды углов, составляемых нитью и стержнем с вертикалью



К задаче 55.9

55.10(54.10). Предполагая в предыдущей задаче, что длина нити весьма велика по сравнению с длиной стержня, и пренебрегая квадратом отношения L/l, определить отношение низшей частоты свободных колебаний системы к частоте колебаний математического маятника длины l

Ответ: $1 - \frac{1}{4}\frac{L}{l}$.

55.11(54.11). Считая в задаче 55.9, что длина нити весьма мала по сравнению с длиной стержня, и пренебрегая квадратом отношения l/L, определить отношение низшей частоты свободных колебаний системы к частоте колебаний физического маятника, если ось вращения поместить в конце стержня.

Ответ: $1 - \frac{9}{16}\frac{l}{L}$

55.12(54.12). Определить частоты главных колебаний двойного математического маятника при условии, что массы грузов M_1 и M_2 соответственно равны m_1 и m_2, $OM_1 = l_1$, $M_1M_2 = l_2$, а к грузу M_1 присоединена пружина, массой которой можно пренебречь Длина пружины в ненапряженном состоянии равна l_0, жесткость пружины c

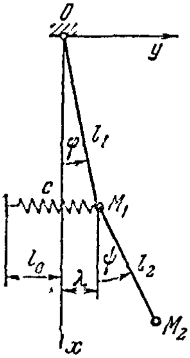
Ответ: $k^2_{1,2} =$

$$= \frac{n_1^2 + n_2^2 \mp \sqrt{(n_1^2 - n_2^2)^2 + 4n_1^2 n_2^2 \gamma_{12}^2}}{2(1 - \gamma_{12}^2)},$$

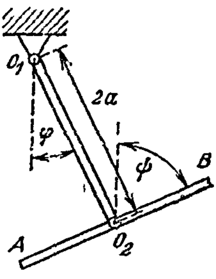
где

$$n_1^2 = \frac{(m_1 + m_2)g + cl_1}{(m_1 + m_2)l_1},$$

$$n_2^2 = \frac{g}{l_2}, \quad \gamma_{12}^2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}.$$



К задаче 55.12



К задаче 55.13

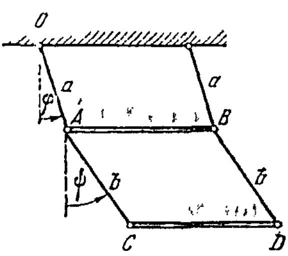
55.13(54.13). Двойной физический маятник состоит из однородного прямолинейного стержня O_1O_2 длины $2a$ и веса P_1, вращающегося вокруг неподвижной горизонтальной оси O_1, и из однородного прямолинейного стержня AB веса P_2, шарнирно соединенного в своем центре масс с концом O_2 первого стержня Определить движение системы, если в начальный момент стержень O_1O_2 отклонен на угол φ_0 от вертикали, а стержень AB занимает вертикальное положение и имеет начальную угловую скорость ω_0

Ответ $\varphi=\varphi_0\cos\sqrt{\frac{3}{4}\frac{P_1+2P_2}{P_1+3P_2}\frac{g}{a}}\,t$, $\psi=\omega_0 t$, где ψ — угол, образуемый стержнем AB с вертикальным направлением

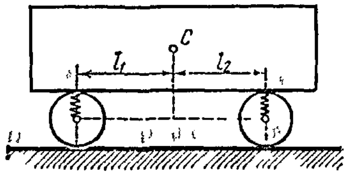
55.14(54.14). Стержень AB веса P подвешен за концы A и B к потолку на двух одинаковых нерастяжимых нитях длины a. К стержню AB подвешена на двух одинаковых нерастяжимых нитях длины b балка CD веса Q Предполагая, что колебания происходят в вертикальной плоскости, найти частоты главных колебаний Массами нитей пренебречь

Ответ: $k_{1,2}^2=\dfrac{n_1^2+n_2^2\mp\sqrt{\left(n_1^2-n_2^2\right)^2+4n_1^2n_2^2\gamma_{12}^2}}{2\left(1-\gamma_{12}^2\right)}$, где $n_1^2=\dfrac{g}{a}$, $n_2^2=\dfrac{g}{b}$, $\gamma_{12}^2=\dfrac{Q}{P+Q}$.

55.15(54.15). Исследовать колебания железнодорожного вагона в его средней вертикальной плоскости, если вес подрессоренной



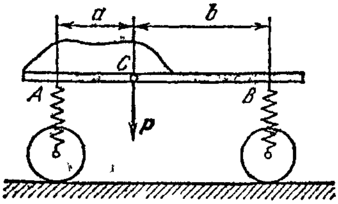
К задаче 55 14



К задаче 55 15

части вагона Q, расстояния центра масс от вертикальных плоскостей, проведенных через оси, $l_1=l_2=l$; радиус инерции относительно центральной оси, параллельной осям вагона, ρ, жесткость рессор для обеих осей одинакова $c_1=c_2=c$

Ответ: $x=A\sin(k_1t+\alpha)$, $\psi=B\sin(k_2t+\beta)$, где x — вертикальное смещение центра масс вагона, ψ — угол, образуемый полом вагона с горизонтом; A, B, α, β — постоянные интегрирования; $k_1=\sqrt{2cg/Q}$, $k_2=\sqrt{2cgl^2/(Q\rho^2)}$.



К задаче 55 16

55.16(54.16). Исследовать малые свободные колебания груженой платформы веса P, опирающейся в точках A и B на две рессоры одинаковой жесткости c. Центр масс C платформы с грузом находится на прямой AB, причем $AC=a$ и $CB=b$ Платформа выведена из положения равновесия путем сообщения центру масс начальной скорости v_0, направленной вертикально вниз без начального отклонения. Массы рессор и силы трения не учитывать Момент инерции платформы относительно горизонтальной поперечной оси, проходящей через центр масс платформы, равен $J_C=$

$=0{,}1(a^2+b^2)P/g$. Колебания происходят в вертикальной плоскости За обобщенные координаты принять: y — отклонение центра масс от положения равновесия вниз, ψ — угол поворота платформы вокруг центра масс

Ответ: $y=\dfrac{v_0}{1-\dfrac{\alpha_1}{\alpha}}\left(\dfrac{1}{k_1}\sin k_1t-\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2k_2}\sin k_2t\right)$,

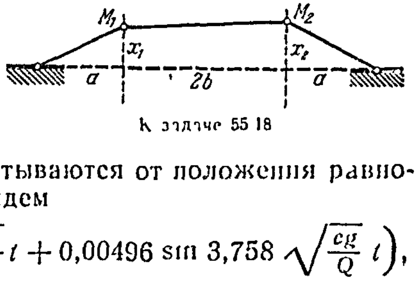
$$\varphi=\frac{v_0\alpha_1}{1-\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}}\left(\frac{1}{k_1}\sin k_1t-\frac{1}{k_2}\sin k_2t\right),$$

$$k_{1,2}^2=\frac{6cg}{P}\left(1\mp\sqrt{1-0{,}278\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2}}\right),$$

$$\alpha_1=\frac{2c-\dfrac{P}{g}k_1^2}{c(b-a)},\quad \alpha_2=\frac{2c-\dfrac{P}{g}k_2^2}{c(b-a)}.$$

55.17(54.17). Платформа тележки опирается в точках A и B на две рессоры одинаковой жесткости c, расстояние между осями рессор $AB=l$; центр масс C платформы расположен на прямой AB, являющейся осью симметрии платформы, на расстоянии $AC=$ $=a=l/3$ от точки A (см. рисунок к задаче 55 16) Радиус инерции платформы относительно оси, проходящей через ее центр масс перпендикулярно прямой AB и лежащей в плоскости платформы, принять равным $0{,}2l$, вес платформы равен Q

Найти малые колебания платформы, возникающие под действием удара, приложенного в центре масс платформы перпендикулярно ее плоскости Импульс удара равен S



К задаче 55 18

Ответ: Пусть z — вертикальное смещение центра масс платформы, φ — угол поворота ее вокруг оси, указанной в условии задачи (та и другая координаты отсчитываются от положения равновесия центра масс платформы); найдем

$$z=\sqrt{\frac{g}{cQ}}S\left(0{,}738\sin 1{,}330\sqrt{\frac{cg}{Q}}t+0{,}00496\sin 3{,}758\sqrt{\frac{cg}{Q}}t\right),$$

$$l\varphi=\sqrt{\frac{g}{cQ}}S\left(0{,}509\sin 1{,}330\sqrt{\frac{cg}{Q}}t-0{,}180\sin 3{,}758\sqrt{\frac{cg}{Q}}t\right)$$

55.18(54.18). Две одинаковые материальные точки M_1 и M_2 массы m каждая прикреплены симметрично на равных расстояниях от концов к натянутой нити, имеющей длину $2(a+b)$; натяжение нити равно p. Определить частоты главных колебаний и найти главные координаты

Ответ: $k_1=\sqrt{\dfrac{p}{ma}}$, $k_2=\sqrt{\dfrac{p}{m}\left[\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right]}$. Главные координаты. $\theta_1=\dfrac{1}{2}(x_1+x_2)$, $\theta_2=\dfrac{1}{2}(x_2-x_1)$.

55.19(54.19). Определить частоты малых колебаний тяжелой материальной точки, колеблющейся около положения равновесия на гладкой поверхности, обращенной вогнутой стороной кверху, главные радиусы кривизны поверхности в точке, отвечающей положению равновесия, равны ρ_1 и ρ_2.

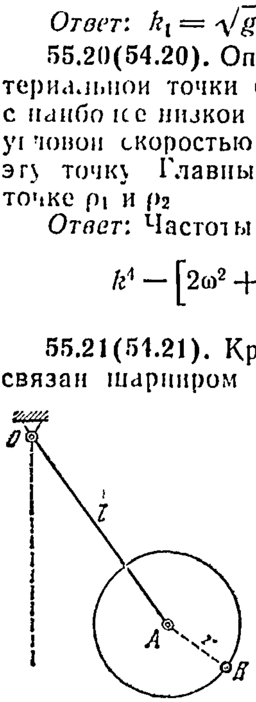
Ответ: $k_1 = \sqrt{g/\rho_1}$, $k_2 = \sqrt{g/\rho_2}$.

55.20(54.20). Определить частоты малых колебаний тяжелой материальной точки около ее положения равновесия, совпадающего с наиболее низкой точкой поверхности, вращающейся с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, проходящей через эту точку. Главные радиусы кривизны поверхности в ее нижней точке ρ_1 и ρ_2.

Ответ: Частоты малых колебаний являются корнями уравнения

$$k^4 - \left[2\omega^2 + \frac{g}{\rho_1} + \frac{g}{\rho_2}\right]k^2 + \left(\omega^2 - \frac{g}{\rho_1}\right)\left(\omega^2 - \frac{g}{\rho_2}\right) = 0$$

55.21(54.21). Круглый однородный диск радиуса r и массы M связан шарниром со стержнем OA длины l, могущим поворачиваться около неподвижной горизонтальной оси. На окружности диска закреплена материальная точка B массы m. Определить частоты свободных колебаний системы. Массой стержня пренебречь. Диск может вращаться в плоскости колебаний стержня OA.

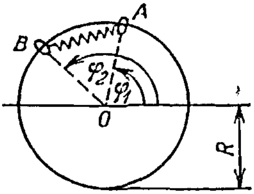


К задаче 55.21

Ответ. Частоты свободных колебаний являются корнями уравнения

$$k^4 - \frac{M+m}{M+3m}\left[1 + 2\frac{m}{M}\frac{r+l}{r}\right]\frac{g}{l}k^2 + \frac{2m(M+m)}{M(M+3m)}\frac{g^2}{lr} = 0.$$

55.22(54.22). На проволочную окружность радиуса R, плоскость которой горизонтальна, надеты два одинаковых колечка, соединенные пружиной жесткости c, имеющей в ненапряженном состоянии длину l_0. Определить движение колечек, приняв их за материальные точки массы m. Принять, что в начальный момент $\varphi_1 = 0$, а колечко B отклонено от своего равновесного положения на величину дуги, равную $2R\beta$. Начальные скорости колечек равны нулю.



К задаче 55.22

Ответ. $\varphi_1 = \beta(1 - \cos kt)$, $\varphi_2 = 2\alpha + \beta(1 + \cos kt)$, $\alpha = \arcsin\frac{l_0}{2R}$, $k = \sqrt{\frac{2c}{m}}\cos\alpha$.

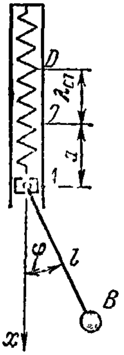
55.23(54.23). Определить малые колебания математического маятника длины l и веса P_2, подвешенного к вертикально движущемуся ползуну A веса P_1, прикрепленному к пружине жесткости c. Ползун при своем движении испытывает сопротивление, пропорциональное его скорости (b — коэффициент пропорциональности). Найти условия, при которых в случае $b = 0$ главные частоты данной системы будут равны между собой.

Ответ: 1) $x = A_1 e^{-ht} \sin\left(\sqrt{k_1^2 - h^2}\, t + \varepsilon_1\right)$, $\varphi = A_2 \sin(k_2 t + \varepsilon_2)$, где A_1, A_2, ε_1, ε_2 — постоянные интегрирования, $h = \frac{bg}{2(P_1 + P_2)}$, $k_1 = \sqrt{\frac{cg}{P_1 + P_2}}$, $k_2 = \sqrt{\frac{g}{l}}$.

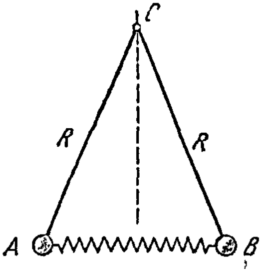
2) Главные частоты будут одинаковы (при $b = 0$), если

$$c = \frac{P_1 + P_2}{l}$$

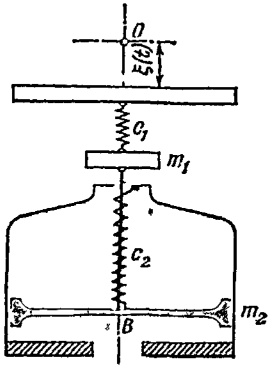
55.24(54.24). Два одинаковых жестких стержня длины R имеют общую точку подвеса O. Стержни могут вращаться в вертикальной плоскости вокруг точки подвеса независимо друг от друга. К концам стержней прикреплены два одинаковых груза A и B массы m каждый, соединенные между собой пружиной жесткости c. Длина пружины в состоянии устойчивого равновесия системы равна l. Пренебрегая массой стержней, найти частоты главных колебаний около устойчивого положения равновесия грузов.



К задаче 55.23



К задаче 55.24



К задаче 55.25

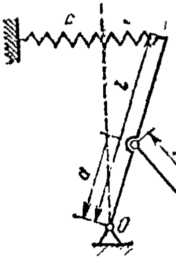
Ответ: $k_1 = \sqrt{\frac{g}{R}\cos\alpha}$, $k_2 = \sqrt{\frac{2c}{m}\cos^2\alpha + \frac{g}{R}\cos\alpha}$, где $\alpha = \arcsin\frac{l}{2R}$.

55.25(54.25). К движущейся по заданному закону $\xi = \xi(t)$ платформе подвешена на пружине жесткости c_1 механическая система, состоящая из массы m_1, к которой жестко присоединен в точке B поршень демпфера. Камера демпфера, масса которого равна m_2, опирается на пружину жесткости c_2, противоположный конец которой прикреплен к поршню. Вязкое трение в демпфере пропорционально относительной скорости поршня и камеры; β — коэффициент сопротивления. Составить уравнения движения системы.

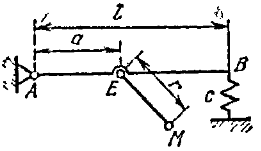
Ответ: $m_1\ddot{x}_1 + \beta\dot{x}_1 - \beta\dot{x}_2 + (c_1 + c_2)x_1 - c_2x_2 = c_1\xi(t)$, $m_2\ddot{x}_2 - \beta\dot{x}_1 + \beta\dot{x}_2 - c_2x_1 + c_2x_2 = 0$.

55.26. Тяжелый однородный стержень длины l и массы m_1 нижним концом опирается на шарнир и удерживается в вертикальном положении с помощью пружины жесткости c. К точке стержня, отстоящей от шарнира на расстоянии a, подвешен на нити длины r груз M массы m_2. При вертикальном положении стержня пружина находится в ненапряженном состоянии и расположена горизонтально. При какой жесткости пружины стержень и груз могут совершать малые колебания около вертикального положения? Найти уравнение частот этих колебаний. Массой нити пренебречь.

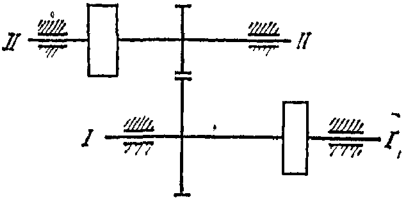
Ответ: $c > \frac{(m_1l + 2m_2a)g}{2l^2}$. $(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)k^4 - (a_{11}c_{22} + a_{22}c_{11})k^2 + c_{11}c_{22} = 0$, где $a_{11} = \frac{m_1l^2 + 3m_2a^2}{3}$, $a_{12} = m_2ar$, $a_{22} = m_2r^2$, $c_{11} = cl^2 - \frac{(m_1l + 2m_2a)g}{2}$, $c_{22} = m_2gr$.



К задаче 55.26



К задаче 55.27



К задаче 55.28

55.27. Однородная балка AB длины l, массы m_1 опирается в точке B на пружину жесткости c, а в точке A на цилиндрический шарнир. В точке E балки на расстоянии a от шарнира A на стержне длины r с помощью шарнира подвешен груз M массы m_2. В положении равновесия балка AB горизонтальна. Найти уравнение малых колебаний балки и груза. Массой стержня пренебречь.

Ответ: $\varphi = a_1 \sin(k_1t + \varepsilon_1)$, $\psi = a_2 \sin(k_2t + \varepsilon_2)$, где $k_1 = \sqrt{\frac{3cl^2}{m_1l^2 + 3m_2a^2}}$, $k_2 = \sqrt{\frac{g}{2}}$, а a_1, a_2, ε_1, ε_2 — постоянные интегрирования.

55.28(54.27). Определить частоты свободных крутильных колебаний системы, состоящей из двух валов, соединенных зубчатой передачей. Моменты инерции масс, насаженных на валы, и моменты инерции зубчатых колес относительно оси валов имеют величины $J_1 = 875 \cdot 10^3$ кг·см², $J_2 = 560 \cdot 10^3$ кг·см², $i_1 = 3020$ кг·см², $i_2 = 105$ кг·см², передаточное число $k = z_1/z_2 = 5$, жесткости валов при кручении $c_1 = 316 \times 10^7$ Н·см, $c_2 = 115 \cdot 10^7$ Н·см; массами валов пренебречь.

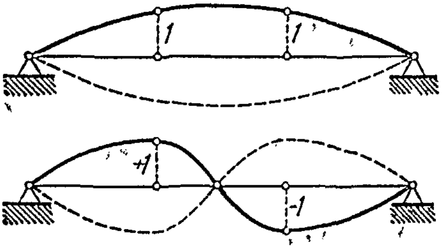
Ответ. $k_1 = 54{,}8\,c^{-1}$, $k_2 = 2{,}38 \cdot 10^3\,c^{-1}$.

55.29(54.28). Определить, пренебрегая массой зубчатых колес, частоту свободных крутильных колебаний системы, описанной в предыдущей задаче.

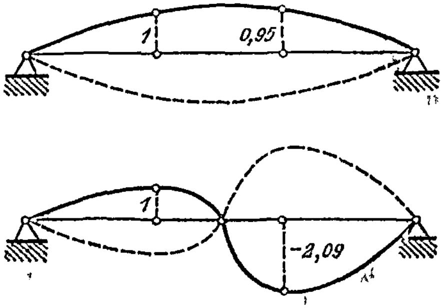
Ответ: $k = 58{,}7\ \text{с}^{-1}$.

55.30(54.29). Найти частоты и формы главных поперечных колебаний балки длины l, свободно лежащей на двух опорах и нагруженной в точках $x = \frac{1}{3}l$ и $x = \frac{2}{3}l$ двумя равными грузами веса Q. Момент инерции поперечного сечения балки J, модуль упругости E. Массой балки пренебречь.

Ответ: $k_1 = 5{,}69\sqrt{\frac{EJg}{Ql^3}}$, $k_2 = 22{,}04\sqrt{\frac{EJg}{Ql^3}}$, $\frac{A_1^{(1)}}{A_2^{(1)}} = 1$, $\frac{A_2^{(2)}}{A_2^{(2)}} = -1$; формы главных колебаний указаны на рисунке.



К задаче 55.30

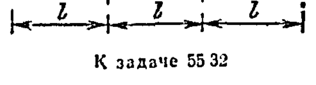


К задаче 55.31

55.31(54.30). Найти частоты и формы главных поперечных колебаний балки длины l, опертой по концам и несущей два груза $Q_1 = Q$ и $Q_2 = 0{,}5Q$, равноудаленных от опор на расстояние $l/3$. Массой балки пренебречь.

Ответ: $k_1 = 6{,}55\sqrt{\frac{EJg}{Ql^3}}$, $k_2 = 27{,}2\sqrt{\frac{EJg}{Ql^3}}$, $\frac{A_2^{(1)}}{A_1^{(1)}} = 0{,}95$, $\frac{A_2^{(2)}}{A_1^{(2)}} = -2{,}09$, формы главных колебаний указаны на рисунке.

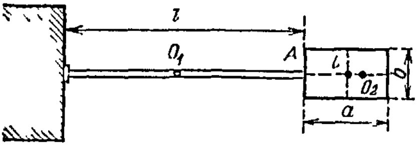
55.32(54.32). Найти частоты главных колебаний двух одинаковых грузов Q, закрепленных на концах горизонтальной консольной балки на равных расстояниях l от ее опор. Балка длины $3l$ свободно лежит на двух опорах, отстоящих друг от друга на расстоянии l, момент инерции поперечного сечения балки J; модуль упругости E. Массой балки пренебречь.



К задаче 55.32

Ответ: $k_1 = \sqrt{\frac{6}{5}\frac{EJg}{Ql^3}}$, $k_2 = \sqrt{2\frac{EJg}{Ql^3}}$.

55.33(54.33). Однородная прямоугольная пластинка массы m закреплена в конце A балки длины l, другой конец которой заделан неподвижно. Система находится в горизонтальной плоскости и совершает в этой плоскости свободные колебания около положения равновесия Определить частоты и формы этих колебаний, если $a = 0{,}2l$, $b = 0{,}1l$ Массой балки пренебречь



К задаче 55.33

Указание Сила Q и момент M, которые должны быть приложены к концу A балки, чтобы создать в этой точке прогиб f и поворот касательной к изогнутой оси балки φ, определяются формулами $f = pQ + sM$, $\varphi = sQ + qM$, причем в рассматриваемом случае однородной балки, заделанной одним концом, $p = l^3/(3EJ)$, $q = l/(EJ)$, $s = l^2/(2EJ)$

Ответ: Частоты главных колебаний равны соответственно

$$0{,}804\sqrt{3EJ/(ml^3)}, \qquad 20{,}7\sqrt{3EJ/(ml^3)};$$

первое главное колебание можно рассматривать как колебание поворота вокруг точки O_1, расположенной на оси балки слева от точки A на расстоянии $O_1A = 0{,}612l$, второе — вокруг точки O_2, расположенной на продолжении оси балки на расстоянии $O_2A = 0{,}106l$ справа от точки A

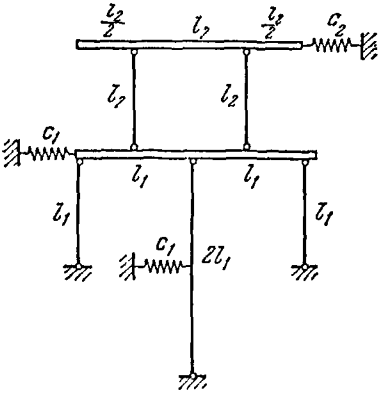
55.34(54.34). К первому из двух первоначально неподвижных дисков, соединенных упругим валом жесткости c, внезапно приложен постоянный вращающий момент M, моменты инерции дисков J. Пренебрегая массой вала, определить последующее движение системы

Ответ:

$$\varphi_1 = \frac{M}{4J}t^2 + \frac{M}{4c}\left(1 - \cos\sqrt{2\frac{c}{J}}\,t\right),$$

$$\varphi_2 = \frac{M}{4J}t^2 - \frac{M}{4c}\left(1 - \cos\sqrt{2\frac{c}{J}}\,t\right).$$

55.35(54.35). Двухъярусная шарнирно-стержневая система удерживается в вертикальном положении тремя пружинами, как это показано на рисунке. Стержни абсолютно жесткие, однородные· вес на длину l равен G Полагая коэффициенты жесткости пружин равными $c_1 = c_2 = 10G/l$, определить устойчивость равновесия системы, а также частоты и формы f_1 и f_2 главных колебаний системы Массой пружин пренебречь· $l_1 = l_2 = l$



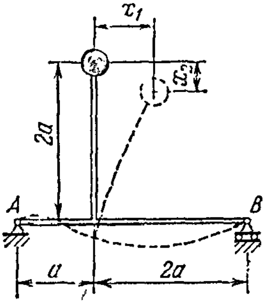
К задаче 55.35

Ответ Равновесие устойчивое, $k_1 = 0{,}412\sqrt{g/l}$, $k_2 = 1{,}673\sqrt{g/l}$, $f_1 = -1{,}455$, $f_2 = 3{,}495$.

55.36(54.36). Груз массы M укреплен на вершине стойки, жестко связанной с балкой AB, свободно лежащей на двух опорах. Полагая, что момент инерции поперечного сечения J, а модули упругости E балки и стойки одинаковы, определить частоты главных изгибных колебаний системы. Массами балки и стойки пренебречь.

Ответ: $k_1 = 0{,}497\sqrt{EJ/(Ma^3)}$,

$k_2 = 1{,}602\sqrt{EJ/(Ma^3)}$.



К задаче 55.36

55.37(54.37). Фундамент машины массы $m_1 = 102\cdot 10^2$ кг, установленный на упругом грунте, совершает вертикальные вынужденные колебания под действием вертикальной возмущающей силы, меняющейся по закону $F = 98\sin\omega t$ кН. С целью устранения резонансных колебаний, обнаруживающихся при угловой скорости вала машины $\omega = 100$ рад/с, на фундаменте установлен на упругих пружинах гаситель в виде тяжелой рамы. Подобрать массу рамы m и суммарную жесткость пружин c_2 гасителя так, чтобы амплитуда вынужденных колебаний фундамента при вышеуказанной скорости вала обратилась в нуль, а амплитуда колебаний гасителя не превосходила $A = 2$ мм.

Ответ: $m = 4{,}9\cdot 10^3$ кг, $c_2 = 49\cdot 10^3$ кН/м.

55.38(54.38). Определить уравнения вынужденных колебаний системы дисков, описанной в задаче 55.2, при действии на средний диск возмущающего момента $M = M_0\sin pt$.

Ответ: $\varphi_1 = \dfrac{M_0(c - Jp^2)}{J^2\left(p^2 - k_1^2\right)\left(p^2 - k_2^2\right)}\sin pt$,

$$\varphi_2 = \frac{M_0 c}{J^2\left(p^2 - k_1^2\right)\left(p^2 - k_2^2\right)}\sin pt,$$

где k_1 и k_2 — частоты главных колебаний системы.

55.39(54.39). Электромотор веса Q_1 закреплен на упругом бетонном фундаменте (в виде сплошного параллелепипеда) веса Q_2 с коэффициентом жесткости c_2, установленном на жестком грунте. Ротор веса P насажен на упругий горизонтальный вал с коэффициентом жесткости при изгибе c_1; эксцентриситет ротора относительно вала r; угловая скорость вала ω. Определить вынужденные вертикальные колебания статора электромотора. Учесть влияние массы фундамента путем присоединения одной трети его массы к массе статора.

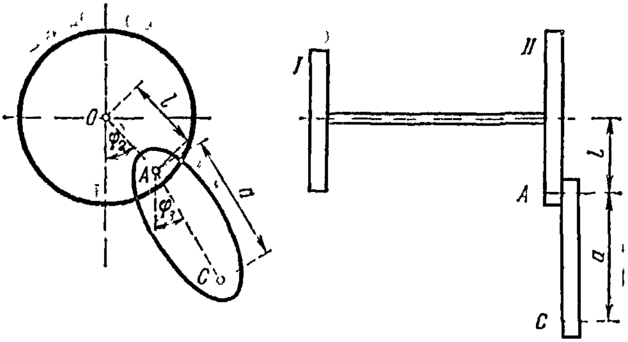
Ответ: $y = \dfrac{c_1 P g r\omega^2\sin\omega t}{c_1 c_2 g^2 - [(c_1 + c_2)P + c_1(Q_1 + {}^1/_3 Q_2)]g\omega^2 + P(Q_1 + {}^1/_3 Q_2)\omega^4}$,

где y — отклонение статора от положения равновесия.

55.40(54.40). В точке A балки AB (см. задачу 55.14) приложена сила $F = F_0\sin pt$ (F_0 и p — постоянные), составляющая все время с нитью OA прямой угол и расположенная в плоскости движения балки Какова должна быть длина b нитей, на которых подвешена балка CD, чтобы амплитуда вынужденных колебаний балки AB равнялась нулю?

Ответ: $b = g/p^2$.

55.41(54.41). Для поглощения крутильных колебаний к одной из колеблющихся масс системы прикрепляется маятник. На рисунке схематически изображена система, состоящая из двух масс I и II, вращающихся с постоянной угловой скоростью ω Ко второй массе прикреплен маятник Моменты инерции масс относительно оси вращения J_1 и J_2; момент инерции маятника относительно оси, параллельной оси вращения системы и проходящей через центр масс маятника, J_3. Расстояние между осью вращения системы и осью подвеса маятника $OA = l$; расстояние между осью подвеса и параллельной осью, проходящей через центр масс маятника, $AC = a$; масса маятника m. Коэффициент упругости (жесткость при кручении) участка вала между массами c_1. Ко второй массе приложен внешний момент $M = M_0 \sin \omega t$. Написать дифференциальные уравнения движения обеих масс системы и маятника. При составлении выражения для потенциальной энергии системы пренебречь потенциальной энергией маятника в поле силы тяжести.



К задаче 55.41

Ответ: $J_1\varphi_1 + c_1(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$, $(J_2 + ml^2)\ddot{\varphi}_2 + mal\varphi_3 \cos(\varphi_2 - \varphi_3) +$
$+ mal\varphi_3^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_3) + c_1(\varphi_2 - \varphi_1) = M_0 \sin \omega t$,

$$(J_3 + ma^2)\dot{\varphi}_3 + mal\ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_3) - mal\dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_3) = 0$$

55.42(54.42). Бак, имеющий форму куба, опирается четырьмя нижними углами на четыре одинаковые пружины; длина стороны куба $2a$. Жесткости пружин в направлении осей, параллельных сторонам куба, равны c_x, c_y, c_z; момент инерции куба относительно главных центральных осей J Составить уравнения малых колебаний и определить их частоты в случае $c_x = c_y$. Масса бака равна M.

Ответ: $M\ddot{x} + c_x x - c_x a\varphi_2 = 0$, $M\dot{y} + c_y y + c_y a\varphi_1 = 0$,

$$M\ddot{z} + c_z z = 0,\ J\varphi_1 + c_y ay + c_y a^2\varphi_1 + c_z a^2\varphi_1 = 0,$$

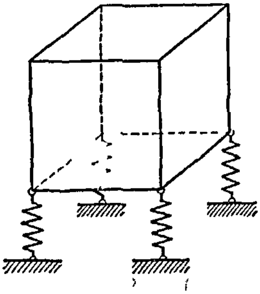
$$J\varphi_2 + c_x a^2\varphi_2 - c_x ax + c_z a^2\varphi_2 = 0,\quad J\psi_3 + c_x a^2\varphi_3 + c_y a^2\varphi_3 = 0,$$

где x, y, z — координаты центра куба, φ_1, φ_2, φ_3 — углы поворота куба относительно координатных осей. Если $c_x = c_y$, то

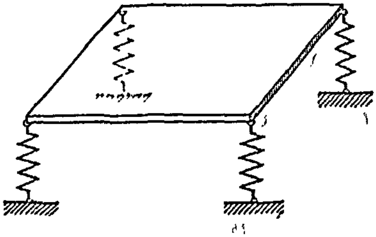
$$k_z = \sqrt{c_z/M}, \qquad k_{\varphi_3} = \sqrt{2c_x a^2/J},$$

$$k^4 - \frac{M(c_x + c_z)a^2 + c_z J}{MJ} k^2 + c_x c_z \frac{a^2}{MJ} = 0.$$

55.43(54.43). Однородная горизонтальная прямоугольная пластина со сторонами a и b опирается своими углами на четыре



К задаче 55.42



К задаче 55.43

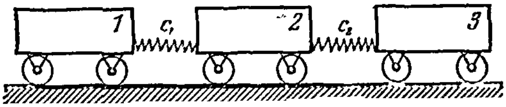
одинаковые пружины жесткости c; масса пластины M. Определить частоты свободных колебаний.

Ответ: $k_1 = \sqrt{4c/M}$, $k_2 = k_3 = \sqrt{12c/M}$.

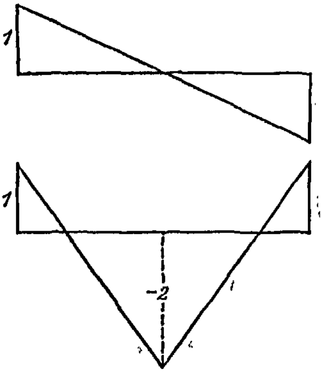
55.44(54.44). Три железнодорожных груженых вагона веса Q_1, Q_2 и Q_3 сцеплены между собой. Жесткости сцепок равны c_1 и c_2. Найти частоты главных колебаний системы.

Ответ: $k_1 = 0$, а k_2 и k_3 суть корни уравнения

$$k^4 - g\left[\frac{c_1}{Q_1} + \frac{c_1 + c_2}{Q_2} + \frac{c_2}{Q_3}\right]k^2 + g^2\left[\frac{c_1 c_2}{Q_1 Q_2} + \frac{c_2 c_1}{Q_2 Q_3} + \frac{c_1 c_2}{Q_3 Q_1}\right] = 0.$$



К задаче 55.44



К задаче 55.45

55.45(54.45). При условиях предыдущей задачи найти уравнения движения вагонов и построить формы главных колебаний для случая вагонов равного веса $Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q$, соединенных сцепками одинаковой жесткости $c_1 = c_2 = c$. В начальный момент два вагона находятся в положении равновесия, а крайний правый вагон отклонен на x_0 от положения равновесия.

Ответ: $x_1 = \frac{x_0}{3} - \frac{x_0}{2}\cos k_2 t + \frac{x_0}{6}\cos k_3 t$, $x_2 = \frac{x_0}{3} - \frac{x_0}{3}\cos k_3 t$,

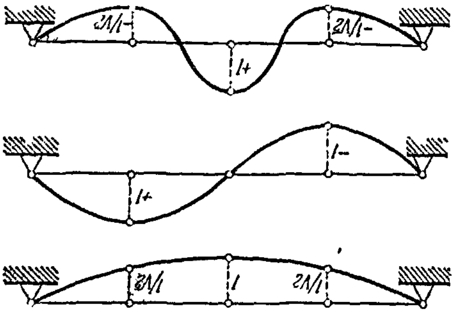
$x_3 = \frac{x_0}{3} + \frac{x_0}{2}\cos k_2 t + \frac{x_0}{6}\cos k_3 t$, $k_2 = \sqrt{\frac{cg}{Q}}$, $k_3 = \sqrt{3\frac{cg}{Q}}$.

Формы главных колебаний изображены на рисунке.

55.46(54.46). Найти частоты и формы главных колебаний системы, состоящей из трех одинаковых масс m, закрепленных на балке на одинаковых расстояниях друг от друга и от опор. Балку считать свободно положенной на опоры, длина балки l, момент инерции поперечного сечения J, модуль упругости E.

Ответ $k_1 = 4{,}93\sqrt{\frac{EJ}{ml^3}}$, $k_2 = 19{,}6\sqrt{\frac{EJ}{ml^3}}$, $k_3 = 41{,}8\sqrt{\frac{EJ}{ml^3}}$.

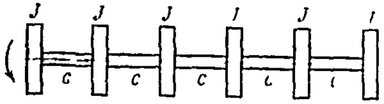
Формы главных колебаний показаны на рисунке



К задаче 55.46

55.47(54.47). Система n одинаковых масс m, соединенных пружинами жесткости c, образует механический фильтр для продольных колебаний. Считая заданным закон поступательного движения левой массы $x = x_0 \sin \omega t$, показать, что система является фильтром низких частот, т. е. что после перехода частоты ω через определенную границу амплитуды вынужденных колебаний отдельных масс изменяются в зависимости от номера массы по экспоненциальному закону, а до перехода — по гармоническому.

К задаче 55.47



К задаче 55.48

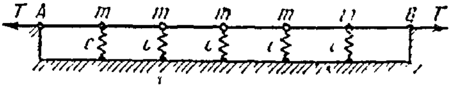
Ответ Фильтр пропускает колебания с частотой $0 < \omega < 2\sqrt{c/m}$.

55.48(54.48). Фильтр крутильных колебаний схематизируется в виде длинного вала с насаженными на него дисками. Считая заданным закон движения левого диска в форме $\vartheta = \vartheta_0 \sin \omega t$, определить вынужденные колебания системы и вычислить амплитуды колебаний отдельных дисков. Моменты инерции дисков J, жесткости участков вала между дисками одинаковы и равны c. Исследовать полученное решение и показать, что система является фильтром низких частот.

Ответ $\vartheta_k = (\vartheta_0 \cos \mu k + c_1 \sin \mu k)\sin \omega t$, $\sin(\mu/2) = (\omega/2)\sqrt{J/c}$, где ϑ_k — угол поворота k-го диска, c_1 — постоянная, определяемая из граничного условия на втором конце вала; первый диск имеет нулевой номер, частота ω должна заключаться в пределах $0 < \omega < 2\sqrt{c/J}$.

55.49(54.49). Механическая система, образующая полосовой фильтр для продольных колебаний, состоит из звеньев, каждое из которых образовано массой m, соединенной с массой следующего звена пружиной жесткости c. Параллельно с этой пружиной к массе присоединена пружина жесткости c_1, связывающая массу m с неподвижной точкой. Закон продольных колебаний левой массы $x = x_0 \sin \omega t$ задан. Показать, что при значениях ω, лежащих в определенных границах, амплитуды колебаний отдельных масс изменяются с расстоянием по гармоническому закону. Найти соответствующие граничные частоты.

К задаче 55.49



К задаче 55.50

Ответ: Полоса пропускания $\sqrt{\frac{c_1}{m}} < \omega < \sqrt{\frac{c_1 + 4c}{m}}$.

55.50(54.50). Система большого числа масс m, насаженных на расстоянии a друг от друга на струну AB, натянутую с усилием T, и поддерживаемых пружинами жесткости c, является полосовым механическим фильтром поперечных колебаний. Вычислить частоты, отвечающие границам полосы пропускания.

Ответ: Полоса пропускания определяется неравенством

$$\sqrt{\frac{c}{m}} < \omega < \sqrt{\frac{c}{m} + \frac{4T}{ma}}$$

55.51(54.51). Нить длины nl подвешена вертикально за один конец и нагружена на равных расстояниях a друг от друга n материальными точками с массами m. Составить уравнения движения. Найти для $n = 3$ частоты поперечных колебаний нити.

Ответ: Уравнения движения имеют вид

$$x_k = \frac{g}{l}[(n-k)x_{k-1} - (2n-2k+1)x_k + (n-k+1)x_{k+1}],$$

где x_k — поперечное смещение k-й частицы (отсчет номеров ведется сверху); $k_1 = 0{,}646\sqrt{g/l}$, $k_2 = 1{,}515\sqrt{g/l}$, $k_3 = 2{,}505\sqrt{g/l}$.

55.52(54.52). Определить частоты свободных поперечных колебаний натянутой нити с закрепленными концами, несущей на себе n масс m, отстоящих друг от друга на расстояниях l. Натяжение нити P.

Ответ: $k = 2\sqrt{\frac{P}{ml}}\sin\frac{\pi s}{2n}$, $1 \leqslant s \leqslant n-1$.

§ 56. Устойчивость движения

56.1(55.1). Двойной маятник, образованный двумя стержнями длины l и материальными точками с массами m, подвешен на горизонтальной оси, вращающейся с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси z. Исследовать устойчивость вертикального положения равновесия маятника. Массой стержней пренебречь.

Ответ. При $g/(l\omega^2) > 1 + 1/\sqrt{2}$ вертикальное положение равновесия маятника устойчиво.

56.2(55.2). Тяжелый шарик находится в полости гладкой трубки, изогнутой по эллипсу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ и вращающейся вокруг вертикальной оси Oz с постоянной угловой скоростью ω (ось Oz направлена вниз). Определить положения относительного равновесия шарика и исследовать их устойчивость.

Ответ: При $\omega^2 \leqslant gc/a^2$ два положения равновесия. а) $x = 0$, $z = c$ (устойчивое), б) $x = 0$, $z = -c$ (неустойчивое).

При $\omega^2 > gc/a^2$ существуют три положения равновесия: а) $x=0$, $z = c$ (неустойчивое), б) $x = 0$, $z = -c$ (неустойчивое), в) $z = gc^2/(\omega^2 a^2)$ (устойчивое).

56.3(55.3). Тяжелый шарик находится в полости гладкой трубки, изогнутой по параболе $x^2 = 2pz$ и вращающейся с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси Oz. (Положительное направление оси Oz — вверх.) Определить положение относительного равновесия шарика и исследовать его устойчивость.

Ответ. Существует единственное положение равновесия $z = 0$; оно устойчиво при $\omega^2 < g/p$ и неустойчиво при $\omega^2 > g/p$, при $\omega^2 = g/p$ — безразличное равновесие.

56.4(55.4). Материальная точка может двигаться по гладкой плоской кривой, вращающейся вокруг вертикальной оси с угловой скоростью ω. Потенциальная энергия $\Pi(s)$ точки задана и зависит только от ее положения, определяемого дугой s, отсчитываемой вдоль кривой, $r(s)$ — расстояние точки от оси вращения. Найти условие устойчивости относительного положения равновесия точки.

Ответ: $\left(\frac{d^2\Pi}{ds^2} - \frac{d}{ds}\left[mr\frac{dr}{ds}\right]\omega^2\right)_{s=s_0} > 0$, где s_0 определяется из уравнения $\left(\frac{d\Pi}{ds}\right)_{s=s_0} = \omega^2\left(mr\frac{dr}{ds}\right)_{s=s_0}$.

56.5(55.5). Показать, что материальная точка массы m под действием центральной силы притяжения $F = ar^n$ ($a = \text{const}$, r — расстояние точки до притягивающего центра, n — целое число) может совершать движение по окружности с постоянной скоростью. Найти условие, при котором это движение устойчиво по отношению к координате r.

Ответ: При $n < -3$ движение неустойчивое, а при $n > -3$ устойчивое.

56.6(55.6). Твердое тело свободно качается вокруг горизонтальной оси NT, вращающейся вокруг вертикальной оси Oz с угловой скоростью ω. Точка G — центр инерции тела, плоскость NTG является плоскостью симметрии, ось OG — главной осью инерции. Ось KL параллельна NT, ось ED проходит через точку O и перпендикулярна NT и OG. Моменты инерции тела относительно осей OG, KL и ED равны соответственно C, A и B, h — длина отрезка OG, M — масса тела. Определить возможные положения относительного равновесия и исследовать их устойчивость.

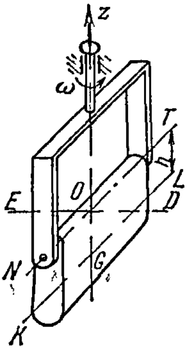
Ответ: Возможным положением относительного равновесия отвечают следующие значения угла отклонения линии OG от оси Oz:

а) $\varphi = 0$ (устойчиво, если $B < C$; при $B > C$ оно устойчиво, если $\omega^2 < Mgh/(B - C)$, и неустойчиво при $\omega^2 > Mgh/(B - C)$;

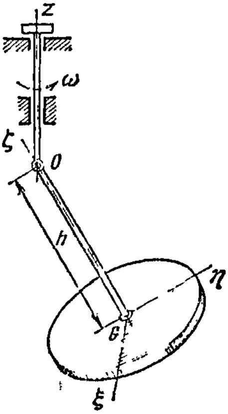
б) $\varphi = \pi$ (неустойчиво, если $B > C$, при $B < C$ оно устойчиво, если $\omega^2 > Mgh/(C - B)$, и неустойчиво при $\omega^2 < Mgh/(C - B)$;

в) $\varphi = \arccos\ [Mgh/((B - C)\omega^2)]$ (существует, если $\omega^2 > Mhg/|B - C|$; устойчиво при $B > C$ и неустойчиво при $B < C$).

56.7(55.8). Определить положения относительного равновесия маятника, подвешенного с помощью универсального шарнира O к вертикальной оси, вращающейся с постоянной угловой скоростью ω, маятник симметричен относительно своей продольной оси; A и C — его моменты инерции относительно главных центральных осей инерции ξ, η и ζ; h — расстояние центра тяжести маятника от шарнира. Исследовать устойчивость положений равновесия маятника и определить период колебаний около среднего положения равновесия.



К задаче 56.6



К задаче 56.7

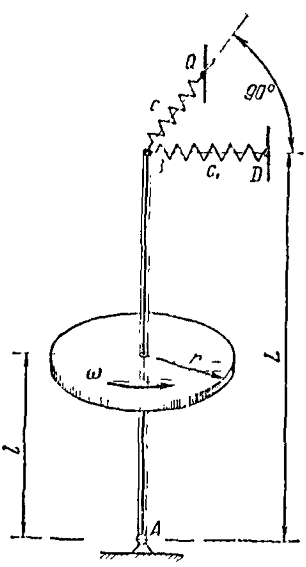
Ответ. Положения равновесия и их устойчивость определяются формулами, данными в ответе к задаче 56.6 (в них нужно положить $B = A + Mh^2$). Период колебаний $T = 2\pi\omega\sqrt{\dfrac{(A + Mh^2)(A + Mh^2 - C)}{(A + Mh^2 - C)^2\omega^4 - M^2g^2h^2}}$.

56.8(55.9). Вертикальная ось симметрии тонкого однородного круглого диска радиуса r и веса Q может свободно вращаться вокруг точки A. В точке B она удерживается двумя пружинами. Оси пружин горизонтальны и взаимно перпендикулярны, их жесткости соответственно равны c_1 и c_2, причем $c_2 > c_1$. Пружины крепятся к оси диска на расстоянии L от нижней опоры; расстояние диска от нижней опоры l. Определить угловую скорость ω, которую нужно сообщить диску для обеспечения устойчивости вращения.

Ответ: При $Ql < c_1L^2$ система устойчива при любой угловой скорости; при $Ql < c_2L^2$ система устойчива, если $\omega \geq \omega^*$, где

$$\omega^* = \frac{\sqrt{gl(r^2+4l^2)}}{r^2}\left\{\sqrt{1-\frac{c_1l^2}{Ql}}+\sqrt{1-\frac{c_2L^2}{Ql}}\right\}$$ При $c_1L^2 < Ql < c_2L^2$ система неустойчива при любой угловой скорости.

56.9(55.10). Материальная точка M движется под действием силы тяжести по внутренней поверхности кругового цилиндра радиуса a, ось которого наклонена под углом α к вертикали. Исследовать устойчивость движения по нижней ($\varphi = 0$) и верхней ($\varphi = \pi$) образующим. Определить период колебаний при движении по нижней образующей.



К задаче 56.8

Ответ: Движение по верхней образующей неустойчиво, период колебаний при возмущении движения вдоль нижней образующей $T = 2\pi\sqrt{a/(g\sin\alpha)}$.

56.10(55.11). Материальная точка вынуждена двигаться по внутренней гладкой поверхности тора, заданного параметрическими уравнениями $x = \rho\cos\psi$, $y = \rho\sin\psi$, $z = b\sin\vartheta$, $\rho = a + b\cos\vartheta$ (ось z направлена вертикально вверх). Найти возможные движения точки, характеризующиеся постоянством угла ϑ, и исследовать их устойчивость.

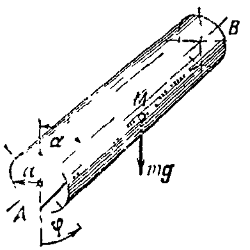
Ответ. Значения $\vartheta = \vartheta_i = \text{const}$ находятся из уравнения

$$(1 + \alpha\cos\vartheta_i) = -\beta\operatorname{ctg}\vartheta_i,$$

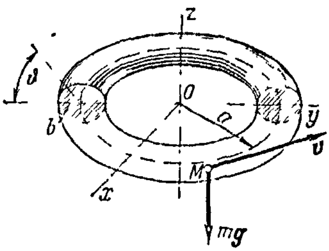
где $\alpha = b/a$, $\beta = g/(a\omega^2)$, $\dot\psi = \omega = \text{const}$. Это уравнение допускает два существенно различных решения:

$$-\pi/2 < \vartheta_1 < 0, \quad \pi/2 < \vartheta_2 < \pi$$

Движение, соответствующее первому решению, устойчиво, второму — неустойчиво.



К задаче 56.9



К задаче 56.10

56.11(55.12). Исследовать устойчивость движения обруча, равномерно катящегося с угловой скоростью ω по горизонтальной плоскости. Плоскость обруча вертикальна; радиус обруча a.

Ответ: Движение устойчиво, если $\omega^2 > g/(4a)$.

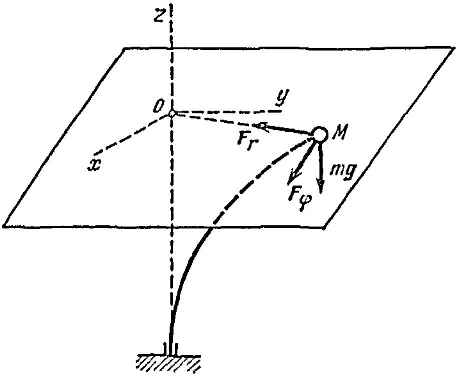
56.12(55.13). Колесо с четырьмя симметрично расположенными спицами катится по шероховатой плоскости Плоскость колеса вертикальна Ободья колеса и спицы сделаны из тонкой тяжелой проволоки. Радиус колеса a, скорость центра его в исходном движении v Исследовать устойчивость движения

Ответ. Движение устойчиво при $v^2 > \frac{\pi + 2}{1(\pi + 4/3)} ag$

56.13(55.14). Исследовать устойчивость движения однородного обруча радиуса a, вращающегося вокруг вертикального диаметра с угловой скоростью ω Нижняя точка обруча соприкасается с горизонтальной плоскостью

Ответ· Движение устойчиво при $\omega^2 > (2/3)(g/a)$.

56.14(55.15). На материальную точку массы m, отклоненную от положения равновесия, действуют сила F_r, по величине пропорциональная отклонению $OM = r = \sqrt{x^2 + y^2}$ из этого положения и направленная к нему; сила F_φ, перпендикулярная первой (боковая сила), по величине тоже пропорциональная отклонению r $|F_r| = c_{11} r$, $|F_\varphi| = c_{12} r$ Исследовать методом малых колебаний устойчивость равновесного положения точки



К задаче 56.14

Указание В таких условиях будет находиться точечная масса, закрепленная на свободном конце сжатого и скрученного стержня (с одинаковыми главными жесткостями на изгиб), нижний конец которого заделан Прямолинейной форме стержня соответствует состояние равновесия Коэффициенты c_{11}, c_{12} зависят от сжимающей силы, скручивающего момента, длины стержня и от жесткостей на изгиб и кручение.

Ответ Равновесие неустойчивое

56.15(55.16). При исследовании устойчивости движения точки в предыдущей задаче принять во внимание силы сопротивления, пропорциональные первой степени скорости $R_x = -\beta\dot{x}$, $R_y = -\beta y$ (β — коэффициент сопротивления).

Ответ Равновесие устойчиво при $\beta^2 c_{11} > mc_{12}^2$.

56.16(55.17). Если у стержня, описанного в задаче 56.14, жесткости на изгиб не равны, то реакции конца стержня, действующие на массу m, определяются выражениями

$$F_x = -c_{11}x + c_{12}y, \quad F_y = c_{21}x - c_{22}y.$$

Выяснить методом малых колебаний условия устойчивости равновесия

Ответ. При $(c_{11} - c_{22})^2 + 4c_{12}c_{21} > 0$ равновесие устойчиво.

56 17(55 18) Уравнение движения муфты центробежного регулятора двигателя имеет вид

$$m\ddot{x} + \beta x + cx = A(\omega - \omega_0),$$

где x — перемещение муфты регулятора, m — инерционный коэффициент системы, β — коэффициент сопротивления, c — жесткость пружин регулятора, ω — мгновенная и ω_0 — средняя угловые скорости машины, A — постоянная Уравнение движения машины имеет вид

$$J\frac{d\omega}{dt} = -Bx$$

(B — постоянная, J — приведенный момент инерции вращающихся частей двигателя)

Установить условия устойчивости системы, состоящей из двигателя и регулятора

Ответ Система устойчива при $AB < Jc\beta/m$ (c, β, J, A, B считаются положительными)

56 18(55.19) Симметричный волчок, острие которого помещено в неподвижном гнезде, вращается вокруг своей вертикально расположенной оси На него поставлен второй симметричный волчок, который также вращается вокруг вертикальной оси Острие оси второго волчка опирается на гнездо в оси первого волчка M и M' — массы верхнего и нижнего волчков, C и C' — их моменты инерции относительно осей симметрии, A и A' — моменты инерции относительно горизонтальных осей, проходящих через острия, c и c' — расстояния центров масс волчков от соответствующих остриев, h — расстояние между остриями Угловые скорости волчков Ω и Ω' Вывести условия устойчивости системы

Ответ Система устойчива, если все корни уравнения четвертой степени

$$\begin{aligned}[AA' + Mh^2(A - Mc^2)]\lambda^4 + [A'C'\Omega' + C\Omega(A' + Mh^2)]\lambda^3 &+ \\ + [A(M'c' + Mh)g + (A' + Mh^2)Mcg + CC'\Omega\Omega']\lambda^2 &+ \\ + [C\Omega(M'c' + Mh)g + C'\Omega' Mcg]\lambda + MC(M'c' + Mh)g^2 &= 0\end{aligned}$$

различны и вещественны

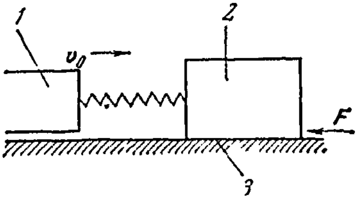
56 19(55 20) Деталь *1* перемещается поступательно с постоянной скоростью v_0 и через пружину передает движение ползуну *2* Сила трения между ползуном и направляющими *3* зависит от скорости ползуна v следующим образом

$$H = H_0 \operatorname{sign} v - \alpha v + \beta v^3,$$

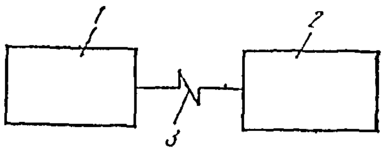
где H_0, α, β — положительные коэффициенты Определить, при каких значениях v_0 равномерное движение ползуна является устойчивым

Ответ: $v_0^2 > \alpha/(3\beta)$.

56.20(55.21). Агрегат, состоящий из двигателя *1* и машины *2*, соединенных упругой муфтой *3* с жесткостью *c*, рассматривается как двухмассовая система. К ротору двигателя, имеющему момент



К задаче 56 19



К задаче 56 20

инерции J_1, приложен момент M_1, зависящий от угловой скорости ротора $\dot\varphi$:

$$M_1 = M_0 - \mu_1(\dot\varphi - \omega_0).$$

К валу машины, имеющему момент инерции J_2, приложен момент сил сопротивления, зависящий от угловой скорости вала $\dot\psi$:

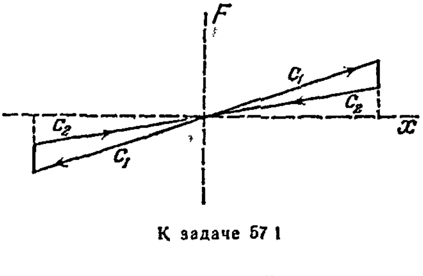
$$M_2 = M_0 - \mu_2(\dot\psi - \omega_0).$$

Коэффициенты μ_1 и μ_2 положительны. Определить условия, при которых вращение системы с угловой скоростью ω_0 является устойчивым.

Ответ: $\mu_1 > \mu_2$, $\dfrac{J_2}{J_1} > \dfrac{\mu_2}{\mu_1}$, $c > \dfrac{\mu_1\mu_2(\mu_1 J_2 - \mu_2 J_1)}{\mu_1 J_2^2 - \mu_2 J_1^2}$.

§ 57. Нелинейные колебания

57.1(56.1). При испытаниях рессор была получена «треугольная» характеристика изменения упругой силы При отклонении рессоры от положения статического равновесия имеет место верхняя ветвь (c_1) характеристики, при возвращении — нижняя ветвь (c_2) характеристики В начальный момент рессора отклонена от положения статического равновесия на x_0 и не имеет начальной скорости. Масса надрессорного тела m, массой рессоры пренебречь; коэффициенты жесткости рессоры c_1 и c_2. Написать уравнения свободных колебаний рессоры для первой половины полного периода колебаний и найти полный период колебаний T.



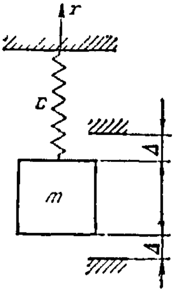
К задаче 57 1

Ответ: При возвращении рессоры в положение статического равновесия $x = x_0 \cos k_2 t$, при отклонении от положения статического равновесия

$$x = -x_0\frac{k_2}{k_1}\sin\left(k_1 t - \frac{\pi}{2}\frac{k_1}{k_2}\right), \quad T = \pi\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right),$$

$$k_1 = \sqrt{c_1/m}, \quad k_2 = \sqrt{c_2/m}.$$

57.2(56.2). Определить закон убывания амплитуд свободных колебаний рессоры, рассмотренной в предыдущей задаче При записи свободных колебаний был получен следующий ряд последовательно убывающих амплитуд 13,0 мм, 7,05 мм, 3,80 мм, 2,05 мм и т. д Определить согласно данным виброграммы отношение коэффициентов жесткости c_1/c_2, соответствующих верхней и нижней ветвям «треугольной» характеристики



К задаче 57.3

Ответ Последовательные значения амплитуд через каждые полупериода колебаний убывают по закону геометрической прогрессии со знаменателем k_2/k_1, $c_1/c_2 = 3{,}4$

57.3(56.3). Масса m колеблется на пружине, коэффициент жесткости которой c. На одинаковых расстояниях Δ от положения равновесия установлены жесткие упоры Считая, что удары об упоры происходят с коэффициентом восстановления, равным единице, определить закон движения системы при периодических колебаниях с частотой ω. Найти возможные значения ω

Ответ: $x = \dfrac{\Delta}{\sin\dfrac{\pi k}{2\omega}} \sin k\left(t - \dfrac{\pi}{2\omega}\right)$ при $0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{\omega}\left(k^2 = \dfrac{c}{m}\right)$, $\omega \geqslant k$.

57.4(56.4). Решить предыдущую задачу в предположении, что имеется только нижний упор

Ответ: $x = -\dfrac{\Delta}{\cos\dfrac{\pi k}{\omega}} \cos\left(\dfrac{\pi}{\omega} - t\right)$ при $0 \leqslant t \leqslant \dfrac{2\pi}{\omega}$, $k \leqslant \omega \leqslant 2k$.

57.5(56.5). Определить зависимость амплитуды первой гармоники свободных колебаний от их частоты в системе, уравнение движения которой имеет вид

$$mx + F_0 \operatorname{sign} x + cx = 0.$$

Ответ: $a_1 = \dfrac{4F_0}{\pi(m\omega^2 - c)}$

57.6(56.6). Движение системы описывается уравнением

$$x + (x^2 + k^2 x^2 - \alpha^2)\dot{x} + k^2 x = 0$$

Определить амплитуду автоколебательного процесса, возникающего в системе, исследовать его устойчивость

Ответ $a = \alpha/k$, автоколебания устойчивы в большом

57.7(56.7). Выявить условия, при которых в системе, рассмотренной в задаче 56 19, могут возникнуть автоколебания, близкие к гармоническим колебаниям частоты $k = \sqrt{c/m}$, где c — коэффициент жесткости пружины, m — масса ползуна. Определить приближенно амплитуду этих автоколебаний

Ответ. $0{,}8\,\dfrac{\alpha}{3\beta} < v_0^2 < \dfrac{\alpha}{3\beta}$ $\quad a^2 \approx \dfrac{1}{k^2}\left(\dfrac{\alpha}{3\beta} - v_0^2\right)$.

57.8(56.8). Предполагая, что в системе, рассмотренной в задаче 56.19, сила трения H постоянна и равна H_2 при $v \gtrless 0$ и равна H_1 при $v = 0$ («трение покоя»), определить период автоколебаний. Принять, что масса ползуна m, а коэффициент жесткости пружины c.

Ответ: $T = t_1 + \frac{1+\alpha^2}{k\alpha}(1 - \cos kt_1)$, где $\alpha = \frac{(H_1 - H_2)k}{cv_0}$, $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$, t_1 — наименьший корень уравнения $\alpha \sin kt_1 = \cos kt_1 - 1$.

57.9(56.9). Масса m связана с неподвижным основанием пружиной с жесткостью c и демпфером сухого трения, величина силы сопротивления в котором не зависит от скорости и равна H. На одинаковых расстояниях Δ от положения равновесия установлены жесткие упоры. Считая, что удары об упоры происходят с коэффициентом восстановления, равным единице, определить значение H, при котором вынуждающая сила $F \cos \omega t$ не может вызвать субгармонических резонансных колебаний, имеющих частоту ω/s (s — целое число).

Указание. Определить условия существования периодического режима, близкого к свободным колебаниям системы с частотой ω/s.

Ответ. Для четного s $H > 0$, для нечетного s

$$H > F\frac{\omega k}{|k^2 - \omega^2|}\operatorname{ctg}\frac{\pi s k}{2\omega}\left(\frac{\omega}{s} > k\right).$$

57.10(56.10). Центр однородного кругового цилиндра, катящегося без скольжения по горизонтальной плоскости, соединен пружиной с неподвижной точкой O, находящейся на одной вертикали с центром диска, когда диск находится в положении равновесия. Масса цилиндра равна m, коэффициент жесткости пружины c. В положении равновесия пружина не деформирована, длина ее равна l.

Определить зависимость периода малых колебаний цилиндра около положения равновесия от амплитуды a, сохранив в уравнении движения члены, содержащие третью степень перемещения.

Ответ: $T = 4l\sqrt{6\frac{m}{c}}\int\limits_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^4 - x^4}} = 4\sqrt{3}\sqrt{\frac{m}{c}}\frac{l}{a}K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, где K — полный эллиптический интеграл первого рода.

57.11(56.11). Методом малого параметра определить амплитуду a и период автоколебаний, возникающих в системе, движение которой определяется уравнением

$$\ddot{x} + k^2 x = \mu\{(\alpha^2 - x^2)x - \gamma x^3\}.$$

Ответ: $a = 2\alpha$, $T = \frac{2\pi}{k}\left(1 - \frac{3\mu\gamma\alpha^2}{2k^2}\right)$.

57.12(56.12). Уравнения движения маятника в среде с сопротивлением и постоянным моментом, действующим только в одном направлении, имеют вид

$$\ddot\varphi + 2h\dot\varphi + k^2\varphi = M_0 \quad \text{при} \quad \dot\varphi > 0,$$
$$\ddot\varphi + 2h\dot\varphi + k^2\varphi = 0 \quad \text{при} \quad \dot\varphi < 0,$$

где h, k и M_0 — постоянные величины.

Считая, что $2h/k \ll 1$, $M_0/k^2 \ll 1$, применить метод медленно меняющихся коэффициентов для нахождения установившегося движения маятника.

Ответ. Устойчивые автоколебания. Радиус ρ предельного цикла на плоскости $(\varphi, \dot\varphi)$ равен $\frac{1}{hT}\frac{M_0}{k^2}$, где $T = \frac{\pi}{k}$.

57.13(56.13). Применяя в предыдущей задаче метод точечных преобразований, найти неподвижную точку преобразования.

Ответ. $\varphi_0 = \frac{M_0}{k^2}\frac{1}{1 - e^{-hT}}$, $\dot\varphi_0 = 0$.

ГЛАВА XIV

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Решение приведенных в этой главе вероятностных задач статики и кинематики основывается на использовании соотношений, связывающих вероятности выполнения неравенств с параметрами, которые входят в эти неравенства. Если u — случайная величина, для которой известны математическое ожидание (среднее значение) m_u и среднее квадратическое отклонение σ_u, то вероятность α нахождения величины u в интервале $(-\infty, a)$, т. е. вероятность выполнения неравенства $u < a$, определяется следующим образом:

$$\alpha = p\{u < a\} = F(\xi), \qquad \xi = \frac{a - m_u}{\sigma_u},$$

где $F(\xi)$ — нормированная функция распределения. Для гауссовского распределения значения $F(\xi)$ приведены в табл. 1.

Таблица 1

ξ	−4,0	−3,5	−3,0	−2,5	−2,0	−1,5	−1,0	−0,5	0,0
$F(\xi)$	$3\cdot10^{-5}$	$2\cdot10^{-4}$	0,001	0,006	0,023	0,067	0,159	0,309	0,500
ξ	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	
$F(\xi)$	0,691	0,841	0,933	0,977	0,994	0,999	0,9998	0,99997	

Вероятность того, что выполняется неравенство $u > a$, определяется следующим образом:

$$\beta = p\{u > a\} = 1 - F(\xi).$$

При гауссовском распределении для определения значений аргумента ξ, соответствующих заданным значениям вероятности α, удобно использовать табл. 2.

Таблица 2

$F(\xi)$	0,0005	0,001	0,005	0,010	0,050	0,100
ξ	−3,4	−3,1	−2,6	−2,3	−1,6	−1,3

$F(\xi)$	0,500	0,900	0,950	0,990	0,995	0,999	0,9995
ξ	0,0	1,3	1,6	2,3	2,6	3,1	3,4

Вероятность нахождения величины u в интервале (a, b) определяется выражением

$$p(a < u < b) = F(\xi_2) - F(\xi_1), \quad \xi_1 = \frac{a - m_u}{\sigma_u}, \quad \xi_2 = \frac{b - m_u}{\sigma_u}.$$

Вероятность того, что величина u не попадает в интервал (a, b), равна

$$p(u < a) + p(u > b) = 1 + F(\xi_1) - F(\xi_2).$$

Интервал (a, b) называется симметричным, если

$$p(u < a) = p(u > b) = \frac{1 - \alpha}{2} = \beta.$$

Если случайная величина u представляет собой линейную комбинацию взаимно статистически независимых случайных величин u_i с известными математическими ожиданиями m_{ui} и средними квадратическими отклонениями σ_{ui},

$$u = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i,$$

то математическое ожидание m_u и среднее квадратическое отклонение σ_u случайной величины u определяются следующим образом

$$m_u = \sum_{i=1}^{n} c_i m_{ui}, \quad \sigma_u^2 = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \sigma_{ui}^2.$$

Если зависимость u от u_i нелинейная,

$$u = \varphi(u_1, \ldots, u_n),$$

но отклонения величин u_i от их математических ожиданий m_{ui} малы, то зависимость следует линеаризовать. Тогда

$$m_u \approx \varphi(m_{u1}, \ldots, m_{un}), \quad \sigma_u^2 \approx \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_i}\right)_0^2 \sigma_{ui}^2.$$

При решении задач о колебаниях систем при случайных воздействиях используются основные соотношения теории случайных процессов. Если на линейную динамическую систему, положение которой определяется обобщенной координатой $q(t)$, действует стационарная случайная вынуждающая сила $Q(t)$, то установившийся режим вынужденных колебаний характеризуется спектральной плотностью $S_q(\omega)$ обобщенной координаты $q(t)$ которая определяется следующим образом

$$S_q(\omega) = [A(\omega)]^2 S_Q(\omega)$$

Здесь $S_Q(\omega)$ спектральная плотность вынуждающей силы $Q(t)$, $A(\omega)$ — амплитудно частотная (резонансная) характеристика системы Квадрат установившегося среднего квадратического отклонения обобщенной координаты определяется как интеграл

$$\sigma_q^2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} S_q(\omega)\,d\omega$$

Если спектральная плотность $S_q(\omega)$ представляет собой дробно рациональную функцию

$$S_q(\omega) = \frac{b_0^2\omega^2 + b_1^2}{c_0^2\omega^4 + c_1^2\omega^2 + c_2^2}, \tag{1}$$

то

$$\sigma_q^2 = \frac{b_0^2 c_2 + b_1^2 c_0}{2c_0 c_2\sqrt{c_1^2 + 2c_0 c_2}}. \tag{2}$$

При гауссовском распределении вынуждающей силы среднее число выбросов процесса $q(t)$ за уровень b на интервале времени $(0, T)$ определяется следующим выражением

$$m_T = \frac{T}{2\pi}\cdot\frac{\sigma_v}{\sigma_q}\exp\left\{-\frac{(b - m_q)^2}{2\sigma_q^2}\right\},$$

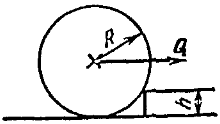
где m_q — математическое ожидание (среднее значение) процесса $q(t)$, а σ_v — среднее квадратическое отклонение производной процесса $q(t)$, определяемое интегралом

$$\sigma_v^2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 S_q(\omega)\,d\omega.$$

При подынтегральном выражении вида (1) величина σ_v^2 находится по формуле (2)

§ 58. Вероятностные задачи статики

58.1. Каток радиуса $R = 0{,}5$ м и массы $m = 800$ кг упирается в жесткое препятствие Высота препятствия h может быть различной, предполагается, что h можно считать случайной величиной с гауссовским распределением, причем ее математическое ожидание равно $m_h = 0{,}1$ м, а среднее квадратическое отклонение равно $\sigma_h = 0{,}02$ м Определить вероятность α_1 того, что горизонтальная сила $Q_1 = 4900$ Н достаточна для преодоления препятствия Определить, при каком значении силы $Q = Q_2$ вероятность преодоления препятствия равна $\alpha_2 = 0{,}999$

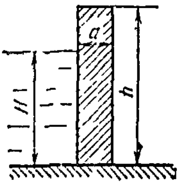


К задаче 58.1

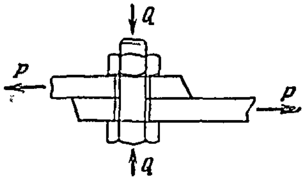
Ответ: $\alpha_1 = 0{,}16$, $Q_2 = 8300$ Н.

58.2. Вертикальная подпорная стенка высоты $h = 5$ м постоянного сечения толщины $a = 1{,}1$ м нагружена гидростатическим давлением воды, уровень которой может быть различным. Плотность материала стены составляет 2,2 т/м^3. Считая высоту H уровня воды от основания стенки случайной величиной с гауссовским законом распределения, с математическим ожиданием $m_H = 3{,}0$ м и средним квадратическим отклонением $\sigma_H = 0{,}5$ м, определить вероятность опрокидывания стенки. Определить также минимально допустимую толщину стенки, исходя из требования, что вероятность ее опрокидывания не должна превышать $3 \cdot 10^{-5}$.

Ответ. 0,001, 1,5 м.



К задаче 58.2



К задаче 58.3

58.3. Определить необходимую силу Q затяжки болта, соединяющего две детали, находящиеся под действием растягивающей силы P, исходя из того, что вероятность проскальзывания должна быть $5 \cdot 10^{-4}$. Сила P и коэффициент трения f между деталями могут принимать различные значения, предполагается, что их можно считать независимыми случайными величинами с гауссовским законом распределения, причем их математические ожидания соответственно равны $m_P = 2000$ Н, $m_f = 0{,}1$, а средние квадратические отклонения $\sigma_P = 200$ Н, $\sigma_f = 0{,}02$.

Ответ. $Q = 63\,000$ Н.

58.4. Груз массы $m = 200$ кг находится на шероховатой наклонной плоскости. Наклон плоскости и коэффициент трения скольжения могут быть различными. Угол γ наклона плоскости относительно горизонта и коэффициент трения f считаются независимыми случайными величинами с гауссовским распределением, их математические ожидания соответственно равны $m_\gamma = 0$ и $m_f = 0{,}2$, а средние квадратические отклонения равны $\sigma_\gamma = 3°$ и $\sigma_f = 0{,}04$. Определить значение горизонтальной силы Q, достаточной для того, чтобы с вероятностью 0,999 сдвинуть груз по плоскости.

Указание. Считать $\cos\gamma \approx 1$.

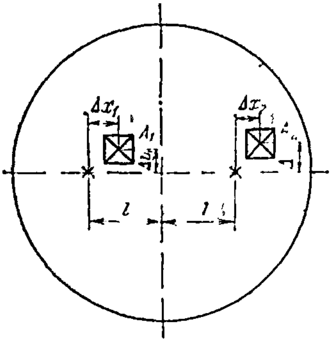
Ответ: $Q = 780$ Н.

58.5. В однородном круглом диске радиуса $R = 1$ м на расстоянии l от центра вырезано круглое отверстие радиуса r. Величины l и r могут принимать различные значения, они считаются случайными, независимыми, подчиняющимися гауссовскому распределению. Их математические ожидания соответственно равны $m_l = 0{,}1$ м и $m_r = 0{,}05$ м, а средние квадратические отклонения равны

$\sigma_l = 0{,}01$ м и $\sigma_r = 0{,}005$ м. Определить такое значение смещения центра масс относительно центра диска, вероятность превышения которого составляет 0,001. В выражении для смещения центра масс пренебречь слагаемыми с произведениями отклонений величин l и r от их математических ожиданий.

Ответ. $4{,}2\cdot 10^{-4}$ м.

58.6. На уравновешенном роторе, масса которого равна 1000 кг, симметрично относительно оси вращения закреплены две однотипные детали A_1 и A_2. Случайные отклонения ΔM_1 и ΔM_2 их масс M_1 и M_2 от номинального значения (математического ожидания) и случайные смещения Δx_1, Δy_1, Δx_2 и Δy_2 их центров масс относительно точек, лежащих на одном диаметре на расстоянии $l = 1$ м от оси ротора, приводят к тому, что центр масс C ротора вместе с деталями оказывается смещенным относительно оси. Поэтому координаты x_C и y_C центра масс являются случайными. Предполагается, что случайные величины M_1, M_2, Δx_1, Δy_1, Δx_2, Δy_2 независимы и распределены по гауссовскому закону, их математические ожидания соответственно равны $m_{M_1} = m_{M_2} = 100$ кг, $m_{\Delta x_1} = m_{\Delta y_1} = m_{\Delta x_2} = m_{\Delta y_2} = 0$, а средние квадратические отклонения равны $\sigma_{\Delta M_1} = \sigma_{\Delta M_2} = 0{,}5$ кг, $\sigma_{\Delta x_1} = \sigma_{\Delta y_1} = \sigma_{\Delta x_2} = \sigma_{\Delta y_2} = 3$ мм. Определить границы симметричных интервалов для координат x_C и y_C центра масс ротора вместе с деталями, вероятность нахождения в которых равна $\alpha = 0{,}99$.



К задаче 58.6

Ответ: (−0,91; +0,91) мм.

58.7. Однородная прямоугольная платформа массы 1000 кг подвешена к опоре на четырех тросах одинаковой длины, сходящихся в одной точке. Расстояние платформы до точки подвеса равно $h = 2$ м. На платформу установлены четыре груза малых размеров. Массы и расположение грузов случайны. Предполагается, что массы грузов и их прямоугольные координаты x_i и y_i, отсчитываемые от центра платформы, взаимно независимы и имеют гауссовское распределение. Математические ожидания масс всех четырех грузов одинаковы и равны $m_M = 100$ кг, среднеквадратические отклонения также одинаковы и равны $\sigma_M = 20$ кг. Координаты грузов имеют нулевые математические ожидания, средние квадратические отклонения координат равны $\sigma_x = 0{,}5$ м и $\sigma_y = 0{,}7$ м. Определить границы таких симметричных интервалов для углов наклона θ_x и θ_y платформы, находящейся в равновесии при установленных грузах, вероятности нахождения в которых равны 0,99. Углы считать малыми.

Ответ. (−11°, +11°), (−15°, +15°).

§ 59. Вероятностные задачи кинематики и динамики

59.1. Самолет летит из начального в конечный пункт, расстояние между которыми равно 1500 км. Скорость полета v постоянна во времени для каждого полета, но для разных полетов принимает различные значения. Предполагается, что скорость представляет собой случайную величину с гауссовским распределением, с математическим ожиданием $m_v = 250$ м/с и средним квадратическим отклонением $\sigma_v = 10$ м/с. Определить симметричный интервал для времени полета, соответствующий вероятности 0,999

Ответ: (5180, 6820) с.

59.2. Самолет летит по прямой линии от начального пункта. Угол ψ отклонения этой прямой от заданной прямолинейной траектории в разных полетах может принимать различные значения. Предполагается, что угол ψ является случайной величиной с гауссовским распределением, его математическое ожидание равно нулю, а среднее квадратическое отклонение равно $\sigma_\psi = 2^\circ$ Определить значения вероятности того, что на расстояниях $L = 50$, 100; 200 км боковое отклонение от заданной траектории не превысит 5 км

Ответ: 0,997; 0,86; 0,52

59.3. Поезд двигался с начальной скоростью 15 м/с При торможении ускорение замедленного движения постоянно во времени, но может принимать различные значения. Предполагается, что ускорение w является случайной величиной с гауссовским распределением, с математическим ожиданием $m_w = -0{,}2$ м/с^2 и средним квадратическим отклонением $\sigma_w = 0{,}03$ м/с^2 Определить математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение тормозного расстояния до остановки, а также верхнюю границу тормозного расстояния, вероятность превышения которой составляет 0,05.

Ответ. 540 м, 81 м, 670 м.

59.4. При расчетной оценке точности стрельбы в мишень принимается, что скорость полета пули постоянна, учитывается случайное отклонение оси ствола и случайное отличие скорости пули от номинального значения. Считается, что пуля попадает точно в центр мишени, если при точном задании направления оси ствола скорость вылета равна номинальному значению 600 м/с. Углы отклонения φ и ψ оси ствола от заданного направления и отличие Δv скорости вылета от номинального значения считаются независимыми случайными величинами с гауссовским распределением, с нулевыми математическими ожиданиями и со средними квадратическими отклонениями соответственно $\sigma_\varphi = \sigma_\psi = 0{,}5\cdot10^{-3}$ рад и $\sigma_v = 75$ м/с Расстояние до мишени равно $l = 50$ м Определить симметричные интервалы для горизонтального и вертикального смещении точек попадания в мишень относительно ее центра, соответствующие вероятности 0,99

Ответ: (—65, +65) мм, (—69, +69) мм

59.5. Снаряд выпущен из орудия с поверхности Земли Угол бросания φ и начальная скорость v_0 могут отличаться от расчетных значений, они считаются независимыми случайными величинами с гауссовским распределением, с математическими ожиданиями, равными расчетным значениям $m_\varphi = 10°$ и $m_{v_0} = 1000$ м/с, со средними квадратическими отклонениями $\sigma_\varphi = 0{,}1°$ и $\sigma_{v_0} = 10$ м/с. Пренебрегая силой сопротивления воздуха, определить интервал дальностей возможных точек падения снаряда на Землю, соответствующий вероятности 0,90. В выражении приращения дальности сохранить слагаемые только первого порядка относительно отклонений угла и скорости от расчетных значений.

Ответ. (31,0, 37,4) км.

59.6. Вагон, центр масс которого находится на высоте 2,5 м от уровня полотна железной дороги с шириной колеи 1,5 м, движется по криволинейному участку с радиусом кривизны $\rho = 800$ м. Подъем наружного рельса над уровнем внутреннего выбран так, чтобы при скорости вагона, равной $v = 20$ м/с, давление колес на оба рельса было одинаковым. В действительности скорость вагона может быть различной. Принимается, что скорость является случайной величиной с гауссовским распределением, с математическим ожиданием $m_v = 15$ м/с и средним квадратическим отклонением $\sigma_v = 4$ м/с. Определить отношение сил давления колес на внешний и внутренний рельсы при скорости, соответствующей верхней границе интервала, определенного для вероятности $\alpha = 0{,}99$.

Ответ. 1,17.

59.7. Автомашина движется по дороге без уклона со скоростью 15 м/с. При торможении сила трения постоянна во времени, но может принимать различные значения. Принимается, что удельная сила трения при торможении является случайной величиной с гауссовским распределением, ее математическое ожидание равно 3000 Н на 1 т массы, а среднее квадратическое отклонение составляет 700 Н на 1 т массы. Определить значения вероятности того, что тормозной путь до остановки превысит 40 м, 80 м.

Ответ. 0,45, 0,02.

59.8. Ротор массы M, представляющий собой однородный цилиндр радиуса R и длины l, насажен на вал с перекосом и смещением, так что его ось симметрии отклонена от оси вала на малый случайный угол γ, а его центр, расположенный посередине между подшипниками, смещен относительно оси вала на случайную величину h. Расстояние между подшипниками равно $2L$. Предполагается, что γ и h представляют собой независимые случайные величины, угол γ имеет нулевое математическое ожидание, расстояние h — математическое ожидание m_h и средние квадратические отклонения соответственно равны σ_γ и σ_h. Угловая скорость ω вращения ротора вокруг вертикальной оси считается случайной величиной с математическим ожиданием m_ω и средним квадратическим отклонением σ_ω. Определить средние квадратические отклонения σ_{R_1} и σ_{R_2} реакций подшипников R_1 и R_2.

Ответ. $\sigma_{R_1} = \sigma_{R_2}^2 \approx \frac{1}{2} M m_\omega \left\{ m_\omega^2 \left[\sigma_h^2 + \frac{1}{8} \frac{(R^2 - l^2)^2}{L^2} \sigma_\gamma^2\right] + 4m_h^2\sigma_\omega^2 \right\}$.

59.9. На груз массы 1 кг, подвешенный на нити длины 1 м, в начальный момент времени находившийся в состоянии покоя на одной вертикали с точкой подвеса, кратковременно действует горизонтальная сила, постоянная во времени в течение интервала действия. Сила F и интервал времени ее действия τ являются независимыми случайными величинами с гауссовским распределением, с математическими ожиданиями, равными соответственно $m_F = 300$ Н и $m_\tau = 0{,}01$ с и средними квадратическими отклонениями, равными $\sigma_F = 5$ Н и $\sigma_\tau = 0{,}002$ с. Определить значения вероятности того, что амплитуда свободных колебаний груза на нити после окончания удара превысит 60° и 90°.

Ответ: 0,46, 0,04

59.10. Груз падает с высоты H на упругую пружину, массой которой по сравнению с массой груза можно пренебречь. Статический прогиб пружины под грузом равен 2 мм. Высота H считается случайной величиной с гауссовским распределением, с математическим ожиданием, равным 1 м, и средним квадратическим отклонением, равным 0,3 м. Определить верхнюю границу интервала возможных изменений максимального значения ускорения при ударе для вероятности нахождения в этом интервале, равной 0,95.

Ответ: 380 м/с^2.

59.11. Длина l математического маятника известна неточно. Предполагается, что l представляет собой случайную величину с гауссовским распределением, с известным математическим ожиданием $m_l = 0{,}25$ м и с неизвестным средним квадратическим отклонением σ_l. Определить допустимое значение σ_l, при котором значения периода свободных малых колебаний различаются не более, чем на 0,1 % с вероятностью 0,99.

Ответ. 0,19 мм

59.12. Физический маятник представляет собой тело массы m, вращающееся вокруг горизонтальной оси; его момент инерции J и смещение l центра масс относительно оси считаются заданными. Силы сопротивления, пропорциональные скорости, таковы, что при свободных колебаниях маятника отношение предыдущего размаха к последующему равно q. Точка подвеса маятника совершает горизонтальные случайные колебания. Ускорение w точки подвеса можно считать белым шумом постоянной интенсивности B^2. Определить установившееся среднее квадратическое значение угла отклонения маятника при вынужденных колебаниях, а также среднее число выбросов n угла за уровень, в 2 раза превышающий среднее квадратическое значение в течение времени T.

Ответ: $\sigma_\varphi^2 = \dfrac{B^2}{4q}\sqrt{\dfrac{ml\,(q^2+\pi^2)}{Jq^3}}$, $n = \dfrac{T}{2\pi}\sqrt{\dfrac{mgl}{J}}\cdot e^{-2}$

59.13. Точка подвеса физического маятника, частота свободных колебаний которого равна $k = 15$ рад/с, а отношение последующего размаха к предыдущему при свободных колебаниях равно $m = 1{,}2$, совершает горизонтальные случайные колебания. Скорость точки подвеса при колебаниях можно считать белым шумом интенсивности $D^2 = 1000$ м²/с. Определить среднее квадратическое значение угла отклонения маятника.

Ответ: 23°.

59.14. Прибор установлен на упругих линейных амортизаторах на подвижном основании, совершающем вертикальные случайные колебания. Силы сопротивления при колебаниях прибора относительно основания таковы, что в режиме свободных колебаний отношение предыдущего размаха к последующему равно $m = 1{,}5$. Вертикальное ускорение при колебаниях основания можно считать белым шумом интенсивности $B^2 = 100$. Определить, каковы должны быть частота свободных колебаний прибора на амортизаторах и статическое смещение под действием силы тяжести, чтобы среднее квадратическое значение абсолютного ускорения w при вынужденных колебаниях прибора было равно $\sigma_w = 50$ м/с².

Ответ: $\omega_0 = 30$ рад/с, $\Delta = 1$ см.

59.15. Линейный акселерометр, основным элементом которого является инерционная масса, связанная линейной пружиной с корпусом и находящаяся в вязкой жидкости, имеет амплитудно-частотную характеристику с резонансным пиком, причем частота, соответствующая пику, равна $\omega_0 = 100$ рад/с, а относительная высота резонансного пика (по отношению к значению амплитудно-частотной характеристики при $\omega = 0$) равна 1,4. При тарировке акселерометра получено, что если установить его измерительную ось вертикально, а затем повернуть акселерометр на 180°, его выходной сигнал, пропорциональный смещению инерционной массы, изменится на 5 В. Акселерометр установлен на подвижном основании, совершающем случайные колебания по одной оси, по этой же оси направлена измерительная ось акселерометра. Предполагается, что случайное ускорение колебаний основания можно считать белым шумом. Определить интенсивность этого белого шума, если осредненное значение квадрата переменной составляющей выходного сигнала акселерометра составляет 100 В².

Ответ: $B^2 = 53$ м²/с³.

59.16. На одном и том же основании, совершающем горизонтальные случайные колебания по одной оси, горизонтально установлены три линейных акселерометра, имеющих одинаковые статические характеристики, но различные динамические свойства. Первый из них имеет собственную частоту ω_0 и относительную высоту резонансного пика, равную 1,2, второй — ту же собственную частоту, но относительную высоту резонансного пика, равную 1,6, третий — собственную частоту $2\omega_0$, а относительную высоту резонансного пика, как у первого акселерометра. Предполагая, что случайное ускорение при колебаниях основания можно считать белым шумом, определить, насколько различаются средние квадратические значения σ_1, σ_2 и σ_3 выходных сигналов этих акселерометров.

Ответ: $\sigma_1^2 : \sigma_2^2 : \sigma_3^2 = 1 : 1{,}33 : 8$.